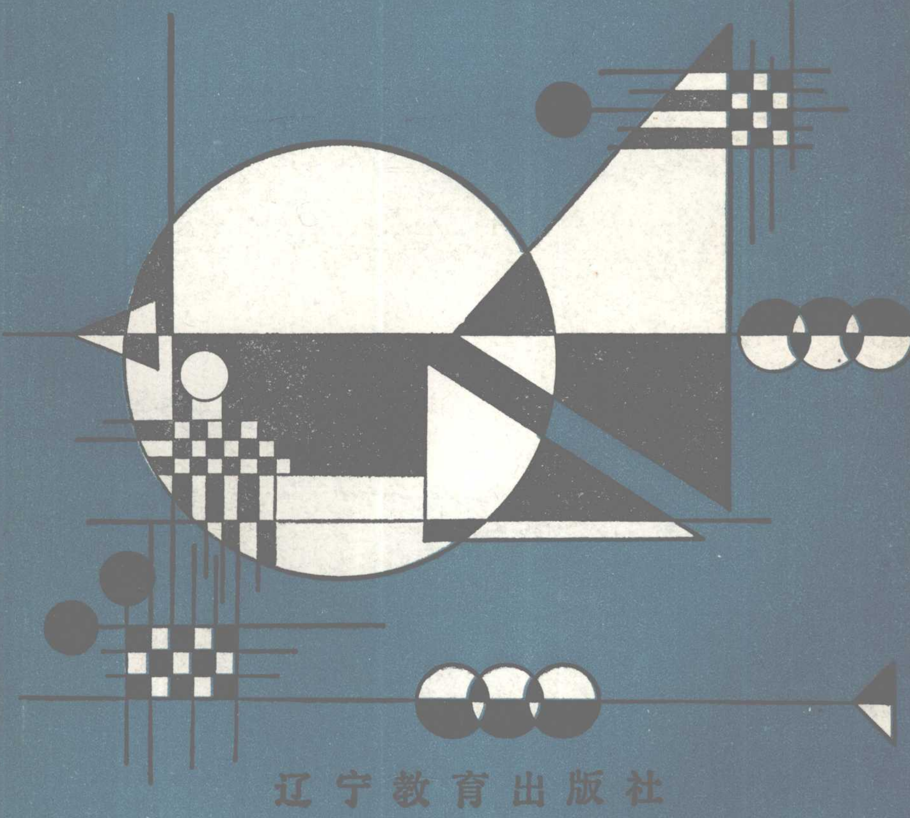
中学生学习指导丛书

ZHONG XUE SHENGXUEXI ZHIDAOCONGSHU

初中代数（第四册）



辽宁教育出版社

中学生学习指导丛书

初中代数

（第四册）

吕 品 曹景伟 编

辽宁教育出版社

一九八七年·沈阳

中学生学习指导丛书

初 中 代 数 第 四 册

吕 品　曹景玮　编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行

（沈阳市南京街6段1里2号）　朝阳新华印刷厂印刷

字数：150,000　开本：787×1092 1/32　印张：7.5

印数：153,901—371,900

1987年8月第1版　1987年8月第2次印刷

责任编辑：王越男　责任校对：李晓晶

封面设计：安　迪

统一书号：7371·165　定价：1.05元

标准书号：ISBN7—5382—0110—6

编者说明

教材是学生在校学习的主要材料。正确地指导学生理解和掌握教材，是全面提高教学质量的基本途径。为了帮助学生积极主动地学好教材，经省教育厅批准，我们编写了这套《中学生学习指导丛书》。

面向大多数中学生，指导他们理论联系实际地学好教材，教给必要的学习方法，培养学生的自学能力，是编写这套丛书的重要指导思想。内容尽量作到少而精，分量适当，有利于减轻学生的学习负担。各科均按章节编写，体例大体一致，主要包括以下几项内容：

一、目的要求：讲清该章（或单元）学习目的要求，力求明确、具体，便于学生把握。

二、内容提示：不泛泛地分析教材内容，把着眼点放在重点、难点上，讲清知识结构，突出具有实践意义的内容。

三、练习辅导：利用简短的文字，说明教材练习设计意图，解答问题的思路和要点，培养学生分析问题和解决问题的能力。

本丛书实行分科主编负责制。参加编写的同志是中学教研员和第一线的骨干教师。他们有丰富的教学经验，熟悉学生和教材，内容有较强的针对性和实用性。

由于编写时间仓促，疏漏之处在所难免，希望同学和老师提出意见，以便修改。

《中学生学习指导丛书》编委会

1986年12月

目　　录

第十三章　常用对数

内 容 提 要

我们已经学过指数，现在来学习与指数有紧密联系的对数。对数概念的结构是：

- 对数
  - $\log_a N$
    - 恒等式 $a^{\log_a N} = N$
    - 运算法则
      - $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
      - $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
      - $\log_a M^n = n\log_a M$
      - $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_a M$
  - $\lg N$ — 常用对数的性质
    - 对数表
    - 反对数表

利用对数进行计算

本章内容是在前一章指数概念的推广的基础上接着学习对数的概念，运用对数式与指数式的关系说明了对数的运算法则，然后学习常用对数的性质，对数的首数、尾数和首数的求法。最后学习利用对数进行计算的方法。

本章内容的重点是利用对数进行计算。能够正确、熟练地进行对数计算的关键在于掌握好对数的运算法则和含负首数的对数计算。而要掌握好对数运算法则，又在于透彻理解

对数的定义。所以透彻理解对数概念是学好本章的关键。对数这部分的难点是如何从幂与指数引进对数概念，另一个难点是掌握好常用对数的性质和常用对数表的查法。指数和对数是中学代数的一个重要组成部分，学好本章内容对于将来学好指数函数和对数函数，解决实际问题将起重要的作用。

学 习 指 点

13·1 对数

1．对数概念的引入

在指数运算法则中，我们知道：

（1）$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

（2）$a^m \div a^n = a^{m-n}$

（3）$(a^m)^n = a^{mn}$

（4）$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

这就是说，如果正数M、N能写成a（$a>0$，$a\neq 1$）的乘幂形式，利用指数运算法则就可以把M、N二数积的运算转化为加法运算，二数商的运算转化为减法运算，一数M的乘方运算转化为乘法运算，一数M的开方运算转化为除法运算。

例1　$100\times 1000 = 10^2\times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$

例2　若已知$2.5 = 2^{1.32}$，$3.2 = 2^{1.68}$

求：$2.5\times 3.2 = ?$

解　$2.5\times 3.2 = 2^{1.32}\times 2^{1.68} = 2^3 = 8$

例3　若已知$57.54 = 10^{1.76}$，$1738 = 10^{3.24}$

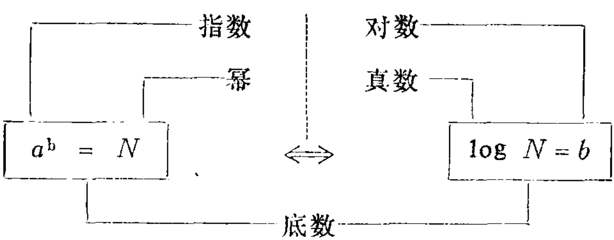
求$57.54\times1738=?$

解　$57.54\times1738=10^{1.76}\times10^{3.24}=10^{5}$

这三个例子启发了我们，在做乘法时，若能把各个因数写成以同一个数为底的幂的形式，便可以利用指数法则来简化乘法运算。当然也可以同样简化除法、乘法、开方运算，由此可见，简化计算要求我们把一个已知数写成以另一个已知数为底的幂的形式，如把15.96写成$15.96=10^{?}$，我们就把要求的“？”叫做对数。因此，要想化高级运算为底一级的运算以简化计算，就必须首先解决把已知正数N写成已知不等1的正数a的乘幂问题。这个幂指数就是我们要学习的对数。

对数定义：如果$N=a^b(a>0, a\neq1)$，那么$b=\log N$。这样引进对数的概念能使同学们明确下面几个问题：

（1）把对数和幂指数紧密联系在一起，求对数就是求乘方的另一种逆运算（已知乘幂、底数求幂指数），但与开方不同，它们的关系是：



（2）揭示了研究对数的目的就是简化运算。

（3）揭示了利用对数简化计算是一种间接计算。它需要经过取对数、对数计算、去对数等步骤，这种引进对数概

念的方法，为今后学习指明了方向。

2．在引进对数定义时，为什么要规定$a>0$，$a\neq1$呢？

学了对数定义后，要把$a^b=N$和$\log_a N=b$（$a>0$，$a\neq1$，$N>0$）作比较，使同学们进一步懂得对数式$\log_a N=b$，只不过是指数式$a^b=N$的改写，两者所表示的a、b和N三个数的关系是一样的。在底数相同的条件下，对数式和指数式可以互相转化。还应当注意两定义中的不同点，就在于对数定义中规定了$a\neq1$。

在引进对数定义时，为什么规定$a>0$，$a\neq1$呢？可以与指数式$a^b=N$中的底数a的条件对照考虑。因此：

（1）若$a<0$，则N为某些值时，b不存在，如$b=\log_{(-2)}8$不存在。

（2） 若$a=0$，N不为0时，b不存在，如$\log_0 2$不存在；N亦为0时，b可为任何正值，是不唯一的，即$\log_0 0$有无数个值。

（3）若$a=1$，N不为1时，b不存在，如$\log_1 5$不存在，N亦为1时b可为任何数，是不唯一的即$\log_1 1$有无数个值。因此，在$a^b=N$或$\log_a N=b$中，为了使b为任意实数时都有意义，所以规定了$a>0$，$a\neq1$这个条件。

3．对数概念的巩固

通过指数式与对数式的互相转化，已知底数、真数、对数三个量中的两个，求第三个量，和通过对数恒等式的应用来巩固对数的定义。

（1）由于$a^b=N\Longleftrightarrow\log_a N=b$，所以我们可以把指数式与对数式进行互化。

（2）由于 $\log N=b\Rightarrow a^b=N$，所以我们可以把与对数式有关的问题转化为指数式来解决。

例如：$\log_2 X=3\Longrightarrow X=2^3=8$，

$\log 10=1\Longrightarrow a=10$

（3）由对数定义，可得 $N=a^{\log_a N}$（$a>0$，$a\neq 1$，$N>0$）。它说明任一正数 N 都可写成 a 的乘幂。

例如：把 2 写成以 5 为底的乘幂。

解　$2=5^{\log_5 2}$

【注意】从指数式和对数式的互化中，可以推得对数的两个性质，即 $\log_a 1=0$，$\log_a a=1$，课本在例 5 中给出，可以作为公式使用，这些基本性质，在今后的对数的化简或计算题中常用到。

13·2　积、商、幂、方根的对数

积、商、幂、方根的对数的求法是应用对数化高级运算为低级运算的依据，它直接影响到同学们今后能否正确、熟练地利用对数进行计算问题，因此必须在理解的基础上牢牢地记住。

1．关于法则的证明

这四个对数运算法则的证明，是根据对数的意义和指数的运算法则来证明的。可以按照课本那样推导，也可利用对数恒等式和指数运算法则推导。

证　设 $M>0$，$N>0$，$a>0$，$a\neq 1$。

$\because$　$M=a^{\log_a M}$，$N=a^{\log_a N}$，

$\therefore$　$M\cdot N=a^{\log_a M}\cdot a^{\log_a N}=a^{\log_a M+\log_a N}$。

根据对数定义可得

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N,$$

同理：$\because \quad M = a^{\log_a M},$

$\therefore \quad M^n = (a^{\log_a M})^n = a^{n\log_a M}.$

根据对数定义可得$\log_a M^n = n\log_a M$。

依照上面的方法可证

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N,$$

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_a M.$$

同学们自己证一证。

2. 应用对数法则的注意事项

使用这四条法则时一定要注意，只有当所得结果的对数和所给数的对数都存在时，法则才能成立。

（1）请同学们注意对数法则的成立条件是$M>0$，$N>0$。

例如：$\log_2(-4)(-8) \neq \log_2(-4)+\log_2(-8)$，虽然$\log_2(-4)(-8)$是存在的，而$\log_2(-4)$，$\log_2(-8)$无意义。

同样，$\log_{10}(-10)^2 \neq 2\log_{10}(-10)$，因为$\log_{10}(-10)$无意义。

即$\log_3 x^2$中，x可取不等于零的实数，在$2\log_3 x$中x只能取正实数。当$\log_3 x^2 \Longrightarrow 2\log_3 x$时，$x$取值范围缩小了。

（2）要注意防止如下的错误：

$$\log_a(M \pm N) = \log_a M \pm \log_a N,$$

$$\log_a(MN)=\log_a M\cdot\log_a N,$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\frac{\log_a M}{\log_a N},$$

$$\log_a M^n=(\log_a M)^n \text{ 等。}$$

13·3 常用对数

1．定义

以10为底的对数叫做常用对数，理解和掌握常用对数的关键在于掌握正数N的科学记数法．即$N=a\times10^n$（其中$1\leqslant a<10$，n为整数）．

2．由数N确定n的规律是什么？

（1）若$N\geqslant1$时，则n为非负整数，它等于N的整数部分的位数减去1；

（2）若$0<N<1$时，则n为负整数，其绝对值等于N中第一个有效数字前面所有零的个数．注意它包括整数部分的零。

由于$\lg N=\lg(a\times10^n)=n+\lg a$，所以上述由$N$确定n的法则，就是由真数$N$确定其对数首数的法则，由于$1\leqslant a<10\Longrightarrow0\leqslant\lg a<1$，所以$\lg a$是正的纯小数，即$N$的对数的尾数。

3．常用对数的性质

（1）对数的组成：

$$\lg N=\underbrace{首数}_{（整数）}+\underbrace{尾数}_{（正的纯小数或0）}$$

常用对数由两部分组成，首数是整数，可以为正、负或零，尾数都是正的，进行对数计算时必须考虑这个符号特征。

为了避免减法中的符号错误，可以借助以下变形，把减法转化为加法：

例如：$-3.386=-3+(-0.386)$

$$=(-3-1)+(1-0.386)$$

$$=\bar{4}.614.$$

这就是说，把负对数化成对数标准形式，只须把首数变号减去 1，就得到标准形式的首数；用 1 减去尾数，就得标准形式的尾数。

（2）只有小数点位置不同的数，它们的对数的尾数都相同。因此我们只须列出 1——10间各数的对数，就可以求出一切正实数的对数。这种列出的数表叫做常用对数表。

4．由已知对数求真数

首先要把对数写成标准形式；其次由 $\lg(a\times10^{n})=n+\lg a$可知要求真数$a\times10^{n}$，须先查反对数表由 $\lg a$求a，再乘以10 即得真数。

例如：已知：$\lg x=-0.7325$

求：x。

解　$\lg x=-0.7325=\bar{1}.2675$。

$\lg a=0.2675$，查反对数表得$a=1.851$，

$\therefore\quad x=1.351\times10^{-1}=0.1851$.

5．利用对数进行计算

（1）利用对数进行计算是前面所学知识的综合应用。

这一节的难点是含负首数的对数运算，在学习中应注意把首数部分与尾数部分先分开计算，然后再合并，为了解决这一难点，要结合例题总结出规律来，以便于掌握。

（2）利用对数计算应分两步：

①对所要计算的值取对数；

②由求得的对数值查反对数表求出真数，即得所求的值。

解 题 指 导

例1　求下列各式中的x：

（1）$3^{2x-1}=81$；（2）$\log_2\frac{1}{8}=x$；

（3）$\log_{\sqrt{2}}x=4$；（4）$\log_x 0.125=-2$。

解

（1）由$3^{2x-1}=81\Longrightarrow 3^{2x-1}=3^4$，

$\therefore\quad 2x-1=4$，即　$x=\frac{5}{2}$。

（2）$\because\quad \log_2\frac{1}{8}=x$，

则　$2^x=\frac{1}{8}$，即$2^x=2^{-3}$

$\therefore\quad x=-3$。

（3）$\because\quad \log_{\sqrt{2}}x=4$，

$\therefore\quad x=(\sqrt{2})^4=(2^{\frac{1}{2}})^4=4$。

（4）$\because$ $\log_x 0.125 = -2$，

则 $x^{-2} = 0.125 \Longrightarrow x^2 = 8$。

$\therefore$ $x = 2\sqrt{2}$（负值不合题意，舍去）。

例 2　如果$\log_{2x^2-1}(3x^2+2x-1) = 1$，求：$x$。

解　根据底的对数等于 1 这个性质，得：

$3x^2 + 2x - 1 = 2x^2 - 1$，

即　$x^2 + 2x = 0$。

解得：$x_1 = 0$ 或$x_2 = -2$。

当 $x = 0$ 时，$2x^2 - 1 < 0$，所以不合题意 舍 去。

当$x = -2$ 时，$2x^2 - 1 = 7$，$3x^2 + 2x - 1 = 7$，

故$\log_{2x-1}(3x^2 + 2x - 1) = \log_7 7 = 1$。

$\therefore$ $x = -2$。

例 3　不查表计算下列各式的值：

（1）　$\lg 2 + \lg 5 + \lg\sqrt{10} + \lg 0.01$；

（2）　$\lg 5^2 + \lg 2 \cdot \lg 50 + \lg^2 2$。

解　（1）原式 $= (\lg 2 + \lg 5) + \frac{1}{2} - 2$

$$= 1 + \frac{1}{2} - 2$$

$$= -\frac{1}{2}。$$

（2）原式 $= 2\lg 5 + \lg 2\ (\lg 50 + \lg 2)$

$$= 2\lg 5 + 2\lg 2$$

$$= 2(\lg 5 + \lg 2)$$

$$= 2 \times 1$$

$= 2$ （利用$\lg 2 + \lg 5 = 1$）。

例 4　计算下列各式的值：

（1）$6\log_3\frac{2}{3} - 4\log_3\frac{10}{9} + 2\log_3\frac{25}{6}$；

（2）$-\log_3\left(\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}\right)$；

（3）$[(\lg 3 + \lg 10)^2]^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\lg^2 3 - 2\lg 3 + 1}$；

（4）$2^{\log_4(2-\sqrt{3})^2} + 3^{\log_9(2+\sqrt{3})^2}$

解　（1）原式$= \log_3\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^6\cdot\left(\frac{25}{6}\right)^2}{\left(\frac{10}{9}\right)^4} = \log_3 1 = 0$。

（2）原式$= -\log_3(\log_3 3^{\frac{1}{27}})$

$= -\log_3\frac{1}{27}$

$= -(-3)$

$= 3$。

（3）原式$= \lg 30 + \sqrt{(\lg 3 - 1)^2}$

$= \lg 30 + \lg 10 - \lg 3$

$= 2$。

（4）原式$= 2^{2\log_4(2-\sqrt{3})} + 3^{2\log_9(2+\sqrt{3})}$

$= 4^{\log_4(2-\sqrt{3})} + 9^{\log_9(2+\sqrt{3})}$

$= (2-\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3})$

$= 4$。

例 5　求$\frac{\lg\lg N^{10}}{1+\lg\lg N}$的值，并指出$N$取什么值时，式子