

CRITICAL
数 学 改 变 世 界

以自组织 临界系统理论 为理念的数学教学

于永昌◆等著



以自组织临界系统理论为 理念的数学教学

于永昌 王秀明 宋庆风 著
刘 宇 李宏杰

辽宁教育出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

以自组织临界系统理论为理念的数学教学/于永昌等著. —沈阳:
辽宁教育出版社, 2006. 1

ISBN 7-5382-7685-8

I. 以… II. 于… III. 数学课—教学研究—中学
IV. G633. 602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 004158 号

选题策划 刘国玉

责任编辑 张 领 王宛昕

责任校对 王丽华

技术设计 袁启江 宋奎成

装帧设计 熊 飞

出版发行 辽宁教育出版社 沈阳市和平区十一纬路 25 号 110003

印 刷 沈阳六〇六所印刷厂

版 次 2006 年 1 月第 1 版

印 次 2006 年 1 月第 1 次印刷

开 本 140 毫米×203 毫米 1/32

印 张 6.75

字 数 150 千字

定 价 28.00 元

序 言

我不会也不能告诉你自组织临界系统理论是什么，我只能告诉你如果这个世界不是按照自组织临界系统运行，它会是是个什么样子：

学生无论怎样“好好学习”，也不会“天天向上”或者“天天向下”；

教师无论如何努力，都不会使教学质量有所起伏；

“现在”的世界既同“过去”一样，也同“将来”没有任何不同。

这样的表述或许并没有使你思想澄明，反倒更加迷惑。我还是讲一个故事吧，它或许会令你有所感、有所知、有所

悟。

猴子们居住在一个群岛上，A 岛上的 N 只猴子以吃地瓜为乐。“猴急”就如“犟牛”一般闻名遐迩，每次猴子挖到地瓜后都是迫不及待地胡吃，在“挖、吃”地瓜的程序化生活中乐此不疲。

动物学家的到来打破了 A 岛的平静，猴子们奔走相告：“岛上来了一群‘类猴’的动物。”闹腾了几天，一切又如往常，猴子们依然“挖、吃”着地瓜；动物学家也吃，不过他们的环节是“挖、洗、煮、吃”。

动物学家想做个实验，他们选取了 a 只小猴子，教它们在挖之后、吃之前先“洗”。

小猴子“挖、吃”惯了，怎么也学不会。动物学家挠头思索着，小猴子也学着样儿挠头，当然不一定思索。动物学家灵光一现：何不运用模仿教学法教小猴子洗地瓜？

终于有一天，一只小猴子灵光一现，学会了；

过了一段时间， a 只小猴子逐个灵光一现学会了；

又过了一段时间， a 只小猴子的父母灵光一现；

过了几段时间，岛上 $N-1$ 只猴子全都灵光一现；

就在动物学家研究这第 N 只猴子为何不会时，终于，它也灵光一现了。

“我吃故我洗”的理念从此深入“猴”心，A 岛展开了浩浩荡荡的“洗瓜”运动。动物学家为纪念这一运动，将 A 岛命名为“洗瓜岛”。

“星星之火，可以燎原”，洗瓜岛周围岛上的猴子也纷纷

灵光一现，最终形成了“洗瓜群岛”。

你一定纳闷：“除了 a 只小猴子外，其他的猴子是如何学会的呢？”其实猴子又何尝不纳闷。

毫无讽刺之意，这是事实。

问题是：如果你是动物学家，你会如何在最短的时间内教会猴子呢？如果你是猴子，你又将第几个学会？

本书将带给你一些启迪。

于永昌

目录

Contents

第一章 自组织临界系统理论分析与应用	001
第一节 自组织临界系统的理论分析	001
一、自组织临界系统理论的起源	002
二、自组织临界系统的特点	005
(一) 自组织临界系统的一般性特点	006
(二) 自组织临界系统的标志性特点	008
三、自组织临界系统的理论依据	012
(一) 系统论中的自组织原理	012
(二) 混沌理论对自组织临界系统理论的 贡献	014
(三) 分形理论对自组织临界系统理论的 贡献	018
第二节 自组织临界系统理论在各学科中的应用 概述	020
一、自组织临界系统理论在物理学中的应用	021

(一) “顺磁—铁磁”相变中的临界现象	021
(二) 湍流串级过程中的自组织临界系统理论	022
二、自组织临界系统理论在经济学中的应用	024
(一) 投资基金中的自组织临界系统理论	024
(二) 动态规模报酬中的自组织临界系统理论	025
(三) 过剩生产能力产生过程中的自组织临界系统理论	026
三、感觉记忆形成过程中的自组织临界系统理论	028
第二章 自组织临界系统理论观下的数学教学系统	031
第一节 数学教学是一个系统	031
一、系统论的基本概念	031
二、数学教学是一个系统	033
(一) 数学教学的整体集合特征	034
(二) 数学教学系统的目的明确特征	037
(三) 数学教学系统的组织结构特征	039
(四) 数学教学系统的层次动态特征	045
第二节 数学教学系统是自组织临界系统	052
一、数学教学系统具有自组织临界系统的一般性特点	052
(一) 数学教学系统的开放性	052

- (二) 数学教学系统的非平衡态 054
- (三) 数学教学系统的相对独立性 056
- (四) 数学教学系统的宏观有序性 062
- (五) 数学教学系统的相对的稳定性 065
- (六) 数学教学系统的变化跃迁性 069
- (七) 数学教学系统的极限性非稳定态 073
- (八) 数学教学系统的不可逆性 075

二、数学教学系统具有自组织临界系统的标志 性特点 078

- (一) 数学教学系统的自相似性 078
- (二) 数学教学系统的幂律行为 079

第三章 数学教学系统中的临界现象分析 083

第一节 学生学习数学知识的临界现象分析 085

- 一、学生记忆数学知识的自组织临界现象 086
- 二、学生理解数学知识的自组织临界现象 097
 - (一) 理解数学知识的临界态标志 100
 - (二) 数学理解的形成机制是重新自组织 102
 - (三) 促进学生数学理解的自组织临界教
学策略 103

第二节 数学教学过程的自组织临界现象分析 107

- 一、建构主义指导下的数学教学过程 108
 - (一) 积极创设问题情境, 激发学习兴趣 110
 - (二) 引导学生提出有价值的解决方法 111
 - (三) 启发学生积极探索, 形成最佳的学习

状态, 强化主体地位.....112

(四) 形成知识.....116

二、“创设情境——知识传授”自组织临界现象的分析.....117

(一) 问题情境创设的临界现象.....123

(二) 问题情境递进的临界现象.....130

三、“知识传授——反馈”自组织临界现象的分析.....140

(一) 分析知识的临界点, 运用多元教学手段对临界知识进行处理.....142

(二) 分析学生思维的临界点.....144

(三) 激发学生思维的临界点.....144

(四) 引导学生参与教学的全过程.....145

(五) 精收反馈信息.....146

第四章 自组织临界系统理论在数学教学中的应用.....147

第一节 自组织临界系统理论在数学教学设计中的应用.....148

一、一般的数学教学设计.....150

(一) 传统教学设计定义.....150

(二) 传统教学设计的内容与步骤.....150

二、自组织临界系统理论指导下的数学教学设计.....159

第二节 自组织临界系统理论在数学教学方法中的应用.....183

- 一、一般的数学教学方法184
- 二、自组织临界系统理论指导下的数学教学方法187

第一章

自组织临界系统理论分析与应用

系统论、经济管理理论、心理学理论等对于数学教学都有着深远的影响，并具有很强的指导意义。这些理论中较具深远性影响的理论是自组织临界系统理论。那么，自组织临界系统理论是从哪些理论衍生出来的？什么是自组织临界系统？它主要应用于什么理论之中？有何异同？等等，都是必须首先了解的，本章对此加以阐述，也将此作为本书之引论。

第一节 自组织临界系统的理论分析

“更上一层楼”才可“千里目”，经历了“山重水复疑无

路”便可到达“柳暗花明又一村”的境地。很多事情都有明确的因果关系，但并不是说所有的事情都有完整的因果关系，比如好心不一定得到好报，费力不一定讨好等等。这里都存在一个度的问题。中国人讲究“中庸”就是要适度。有人说：先进一步是英雄，先进三步是烈士。尽管这话有些不够积极，但这说明创新也需要有与之适应的社会土壤，才能获得好的结果。自组织是有生命的系统共有的特点，那么自组织系统为何可以发展到的临界状态？又是如何发展的呢？明理则达人，欲明晰自组织系统的理论，就需从其起源、特点、理论依据来加以分析。

一、自组织临界系统理论的起源

对于物理学的描述正可以引用清朝乾隆题于北京颐和园宝云阁的这句“境自远尘皆入咏，物含妙理总堪寻”加以概括。也正是在对物理学理论“总堪寻”的过程中，发现了自组织临界系统，当时将其称之为“自组织临界状态”或“自组织临界性”。

其实有关临界现象或临界点的理论可以说是“始于物理，行于物理”。早在一百多年前就已经观察到了。如 1860 年门捷列夫发现“液—气”界面张力在一特定温度处消失，液、气两相变为一相。门捷列夫称此温度为物质的绝对沸腾温度，后来被称为物质的临界温度。再如 1896 年，皮埃尔·居里研究镍在磁场强度 $H=0$ 时的自发磁化强度 M 与温度 T 的关系时，发现自发磁化强度 M 在 631.58K 时消失。这是铁磁体的

居里点，实际上就是铁磁体 M 的临界点。类似于这些的物理现象还有很多，我们将在下一节中做详细的说明，在此就不一一论述了。这些众多的物理现象中有关临界现象的理论都仅仅是在宏观上对于临界点的把握。只有在最近 30 年内，自组织临界系统理论的出现才有了令人满意的微观解释，才开始引起了各学术界的关注。

自组织的临界性是巴克（Per Bak）与他的合作者唐超（Chao Tang）、科特·威森费尔德（Kurt Wiesenfeld）于 1986 年在研究“电荷密度波”的深奥的凝聚态现象时发现的。他们利用沙堆模型揭示了系统在进化过程中如何从自组织发展到临界态，又如何突破临界点，在更高的层次达成新的平衡。这就是著名的沙堆理论。他们运用摄像技术，记录下沙堆形成的整个过程。首先，沙粒不断地、均匀地落在桌子上，开始时，沙堆四周边缘上会有细沙均匀地流泻而下，沙子会越积越高。随着沙堆的不断增高，沙堆边缘上的细流中偶尔会出现小的整块的滑落现象。当沙堆很大时，就会出现突然的坍塌现象。对于此比喻的理解可以借助于图 1—1 来作进一步说明：

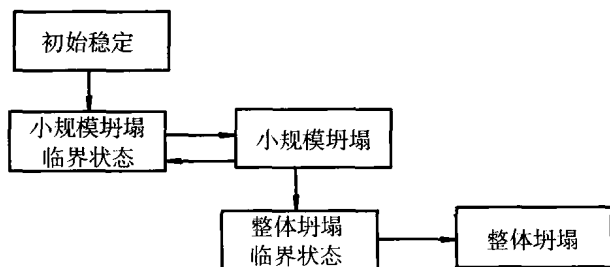


图 1—1

沙堆首先处于相对稳定状态，沙粒对沙堆整体影响很小，但却在逐渐地接近于小规模坍塌的临界状态即表面的沙粒刚好能呆住的状态。这里所指的小规模是相对沙堆整体而言的，指任何比整体小的可以互相影响的沙体集合。它们大小不等、自由组合，所以由小规模坍塌临界状态过渡到小规模坍塌是一个循环过程，并且某一个小规模的坍塌都会影响到其他小规模的坍塌，从而扩张自己的规模，再逐渐地接近于整体坍塌的临界状态。偶尔的一粒沙子也许会造成沙堆的小规模的坍塌，偶尔的一个小规模的坍塌也会影响到整体性的坍塌。

在此之后，巴克及他的助手利用慢速录影和计算机模拟了以上的过程，精确地计算出了在沙堆顶部随着每一粒沙子的落下会连带多少沙粒的移动。通过对沙堆临界状态的进一步研究，发现沙堆小规模在达到“临界状态”时，每粒沙与其他沙粒就处于“一体性”状态。每一粒新落下的沙都会产生一种“力波”，尽管微细，却能通过“一体性”的接触贯穿沙堆整体，将新落下沙粒的碰撞传给所有沙粒，沙堆的结构将随着每粒沙子的落下逐渐变得脆弱。最终导致整个沙堆整体结构性失衡——坍塌，也就是所说的崩溃。研究表明坍塌过程将持续到沙堆重归临界状态。他们经过多次的实验，运用数学的方法将坍塌的规模与时间作为变量绘制成图，从中发现了自组织临界性隐藏的科学法则：幂律原理及自相似性，即：越是较大规模的坍塌，发生的概率越小，越小规模的坍塌，发生的概率越大。同时，这种随机坍塌在行为上表

现出一种与分形几何所相同的特征。据此，提出了“自组织临界”（self-organized criticality 简称 SOC）的理论。自组织临界状态理论认为：

大的相互作用的复合系统包含着众多的发生短程相互作用的组元，系统自然地无需由外部加以调整，就会从随机状态演化到一种有序的临界状态。即：当系统通过自组织达到失稳边缘状态，在此状态下，由外部流入系统的能量，按系统组元之间内在规律相互作用（即自组织），而使外部流入系统的能量被系统吸收或耗散，从而使系统的能量状态平均值维持在某一个临界值附近呈无规律变化，称此状态为自组织临界状态。

这一概念来自于 Bak、Tang 及 Wiesenfeld（BTW）在 1987 年发表于《物理评论快报》的文章中，文中提出了“自组织临界”（SOC）的概念。一石激起千层浪。从此自组织临界性受到了各学界的重视，并一直笼罩在激烈的争论气氛中。

二、自组织临界系统的特点

随着沙粒的堆积，沙堆的斜率会不断增大，在此期间可能会有数次小规模的山崩使得沙堆的斜率略有减小，直至最后沙堆不堪重负，在一颗小沙粒的作用下彻底坍塌，重又回到起始状态。由此我们不难看出，在自组织临界系统中，即使看来无足轻重的因素也会引发灾难性的后果，从而我们可以得到自组织临界系统的一个主要特征，即随着时间的推移

其稳定性会逐渐削弱，直至最后突然崩塌，回到起初的某种更加稳定的状态。自组织临界系统包含着自组织系统与临界状态本身所具有的特点，并且还拥有可以称为其标志性的特点，下面将从一般性特点到标志性特点分别对自组织临界系统的特点进行论述：

（一）自组织临界系统的一般性特点

自组织临界系统是一个开放的系统，它的自组织性主要是由于与外界既有能量交换又有物质与信息的交流而产生的。这里的能量交换指的是将其他系统的特点吸收于其中，物质与信息的交流指的是将其他系统直接纳入其中。

1. 自组织临界系统的自组织特点

自组织是系统能够根据环境的变化，主动改变系统结构的一种特点。具体表现在以下几个方面：

（1）自组织临界系统的开放的非平衡态特点

自组织系统并不是绝对地与外界毫无往来的自组织，它是一个开放的系统。自组织临界系统的宏观性质既随时间而变化，又随空间状态变化而变化。系统论中将这样的系统称为非平衡态系统，它会经历由一个相对稳定状态跃迁到另一个相对稳定状态的过程，并且在此过程中必然会经过一个非稳定的临界状态。例如：在教学中，学生经常会对数学概念的理解停留在似懂非懂的状态，教师也常常被学生的这种思维状态所困，不知教学该如何进行。此时学生的理解并不是随着教师对知识的讲解的增多而更加透彻，相反，有时会越讲越糊涂；但有时也会向着明朗的方向前进。在这个状态