全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材

测量数据处理理论与方法

THE THEORY AND METHOD OF SURVEYING DATA PROCESSING

邱卫宁 陶本藻 姚宜斌 吴云 黄海兰 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材

测量数据处理理论与方法

THE THEORY AND METHOD OF SURVEYING DATA PROCESSING

邱卫宁 陶本藻 姚宜斌 吴云 黄海兰 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

测量数据处理理论与方法/邱卫宁,陶本藻,姚宜斌,吴云,黄海兰编著.—武汉:武汉大学出版社,2008.6

全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材

ISBN 978-7-307-06241-2

Ⅰ.测… Ⅱ.①邱… ②陶… ③姚…… ④吴… ⑤黄… Ⅲ.测量—数据处理—研究生—教材 Ⅳ.P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 064117 号

责任编辑:王金龙　　责任校对:刘　欣　　版式设计:马　佳

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)
印刷:武汉中科兴业印务有限公司
开本:720×1000　1/16　印张:12.25　字数:213 千字　插页:1
版次:2008 年 6 月第 1 版　2008 年 6 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-06241-2/P·136　定价:26.00 元

前　言

《测量数据处理理论与方法》是面向测绘工程专业工程硕士的专业课教材。

测量数据处理相关课程，是测绘工程专业的重要理论和应用的系列课程，贯穿于本科生和研究生的整个学习阶段。我们针对学生学习的不同阶段，编写了测量平差系列教材。《误差理论与测量平差基础》[1]是测绘工程专业本科生的专业基础必修课教材；《高等测量平差》[2]是针对测绘工程专业本科生高年级学习的专业必修课教材；《广义测量平差》[3]是研究生学习阶段的通用教材；《测量数据处理理论与方法》的适用对象是测绘工程专业的工程硕士。

在本教材的编写上，我们根据测绘工程专业工程硕士的培养目标，从内容到结构都进行了精心的组织，将近二十年来研究的测量平差较为成熟的实用方法及研究热点编著成这本教材。课程内容着重应用，包括测绘生产中的应用和后续各专业课教学的需要，也考虑到培养研究生所必要的基础知识。课程目标是：使学生不仅具有扎实的理论基础，而且具有开阔的思路和较强的解决实际问题的能力。

本教材的特点是注重系统性，强调实用性，保持前沿性。在编写本教材时，充分考虑了工程硕士生来自于各测绘研究、生产单位，具有一定的实践经验等特点，知识的起点定位于学生已掌握了误差理论和测量平差的基础知识（如教材[1]、[4]、[5]中的基本内容）。从现代平差方法和工程应用角度出发，达到和在校硕士研究生所应掌握的数据处理理论同样的目标。在内容的安排上，有部分内容与我们所编的《高等测量平差》相同，这是因为我们考虑到《高等测量平差》是我院在进行课程改革后设置的课程，在我院本科生近几年的学习计划中实施，取得了很好的效果，但并不是其他院校都开设了这门课，而有些内容正是工程硕士生应掌握的。在编写中，充分考虑到本教材的特点，对每一种原理和方法既有理论证明，也有实际的操作步骤。在算例的选择上，用模拟算例来解释原理，用实际算例来说明原理的应用。力求让读者掌握原理方法，并能够用于实践。为了给工程硕士生进一步的学习和研究提供方便，在书

后还列出了本教材中专业术语、关键词的英汉对照和主要参考文献。

本教材取材适中、系统性强、立足先进、顾及前沿、学用结合、易于掌握、表述清楚、范例翔实。

全书共分 7 章，第 1 章、第 4 章、第 5 章及 7.1 节由邱卫宁教授编写，第 3 章、第 6 章由姚宜斌教授编写，第 2 章、5.9 节及 7.2 节由吴云讲师编写，第 7 章中 7.3 节、7.4 节、7.5 节由黄海兰讲师编写。全书由陶本藻教授审查，统一修改定稿。

本书是在测绘工程工程硕士指导委员会的组织和指导下编写的，并得到了测绘工程工程硕士指导委员会提供的教材建设专项基金的资助。武汉大学测绘学院的领导对本教材的编写非常重视和关心，使编写工作得以顺利完成，在此我们深表感谢！

感谢武汉大学出版社的大力支持，由于他们的辛勤工作，使本书在较短的时间内得以出版，保证了教学的需要。

我们恳切希望使用本教材的教师和广大读者对本书提出宝贵意见。

编著者

2008 年 2 月

目　录

第 1 章　测量平差概论

利用测量仪器获取的数据不可避免地会包含误差，对含有误差的观测数据进行处理，使之成为目标值的最优估计，是测量平差的主要任务之一。长期以来，测绘工作者经过不断的研究与实践，将基于高斯创立的最小二乘理论的经典平差发展成完整的理论体系。随着现代科技信息化、智能化的发展，计算机和通信技术在测绘领域的广泛应用，以“3S”及其集成为代表的现代测量新技术的不断完善，测量数据获取手段的更新和测量数据本身内涵的外延，数据处理的对象已由地球表面发展到空间。空间数据的高精度、高动态、多源性、多维性、多分辨率和误差来源的多样性，使得经典平差方法已不能满足这样的数据处理。因此，测量平差的研究也在不断地发展。本书系统地介绍了近代测量平差发展的较为成熟的实用方法和研究热点。

现代测量平差方法是在经典测量平差即其误差理论基础上发展的，为了使课程内容有较好的衔接，本章对误差理论与测量平差基础知识进行了概述，对以往的知识进行了总结性的回顾。

本书使用的符号，基本上与文献[1]《误差理论与测量平差基础》一致。

1.1　误差理论简述

1.1.1　观测值的数学期望

设有 n 个观测量 $L_1, L_2, \cdots, L_n$，其真值为 $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \cdots, \tilde{L}_n$。由于观测值含有误差，观测值和真值不相等，其差值为真误差 Δ_1，Δ_2，$\cdots$，Δ_n 有如下关系式

$$\Delta_i = \tilde{L}_i - L_i \tag{1-1-1}$$

设 Δ 不含系统误差和粗差，仅为偶然误差，从概率和数理统计的角度看，偶然误差的数学期望为零，此时观测值的数学期望就等于其真值。记

$$\underset{n,1}{L}=\begin{bmatrix}L_1\\L_2\\\vdots\\L_n\end{bmatrix},\underset{n,1}{\widetilde{L}}=\begin{bmatrix}\widetilde{L}_1\\\widetilde{L}_2\\\vdots\\\widetilde{L}_n\end{bmatrix},\underset{n,1}{\Delta}=\begin{bmatrix}\Delta_1\\\Delta_2\\\vdots\\\Delta_n\end{bmatrix},E(L)=\begin{bmatrix}E(L_1)\\E(L_2)\\\vdots\\E(L_n)\end{bmatrix},E(\Delta)=\begin{bmatrix}E(\Delta_1)\\E(\Delta_2)\\\vdots\\E(\Delta_n)\end{bmatrix},$$

则有

$$\Delta=\widetilde{L}-L \tag{1-1-2}$$

取数学期望

$$E(\Delta)=\widetilde{L}-E(L) \tag{1-1-3}$$

若

$$E(\Delta)=0 \tag{1-1-4}$$

可得

$$E(L)=\widetilde{L} \tag{1-1-5}$$

当 $n=1$ 时,L 称为随机变量;$n>1$ 时,L 称为随机向量或观测向量。

1.1.2 观测值的精度与方差

方差是衡量观测值或观测误差的精度指标,观测值的方差定义为

$$D(L)=E[L-E(L)][L-E(L)]^{\mathrm{T}} \tag{1-1-6}$$

当 L 为一个随机变量时

$$D(L)=\sigma_L^2=E[L-E(L)]^2 \tag{1-1-7}$$

当 L 为随机向量时

$$D(L)=D_{LL}=\begin{bmatrix}\sigma_{L_1}^2 & \sigma_{L_1L_2} & \cdots & \sigma_{L_1L_n}\\\sigma_{L_2L_1} & \sigma_{L_2}^2 & \cdots & \sigma_{L_2L_n}\\\vdots & & \ddots & \vdots\\\sigma_{L_nL_1} & \sigma_{L_nL_2} & \cdots & \sigma_{L_n}^2\end{bmatrix} \tag{1-1-8}$$

式中:主对角元素 $\sigma_{L_i}^2$ 为 L_i 的方差,通常简写为 σ_i^2;非主对角元素 $\sigma_{L_iL_j}$ 为 L_i 与 L_j 的协方差,通常简写为 σ_{ij},协方差的定义式为

$$\sigma_{ij}=E[(L-E(L_i))(L_i-E(L_i))] \tag{1-1-9}$$

方差还可表达为相应的协因数与单位权方差的乘积,即

$$D(L)=\sigma_0^2Q_{LL} \tag{1-1-10}$$

式中:Q_{LL} 称为协因数矩阵。

当 Q_{LL} 非奇异时,$Q_{LL}^{-1}=P_L$,P_L 为 X 的权阵。当 X 为一个随机变量时,则权的定义为

$$P_x = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_x^2} \tag{1-1-11}$$

上式表明，权与方差成反比。比例常数 σ_0^2 称为单位权方差。权是一个相对精度指标。

误差估计总是与平差参数估计同时进行，而且依附于平差参数估计之中，因为误差也是平差系统中所要估计的参数。

1.1.3 观测值的精确度与均方误差

精确度是指观测结果与其真值的接近程度，精确度的衡量指标为均方误差，观测值 L 的均方误差的定义为

$$\mathrm{MSE}(L) = E(L-\widetilde{L})^2 \tag{1-1-12}$$

当观测值仅含偶然误差时，$E(L)=\widetilde{L}$，均方误差即为方差。

上式可改写为

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(L) &= E[(L-E(L))+(E(L)-\widetilde{L})]^2 \\ &= E(L-E(L))^2 + E(E(L)-\widetilde{L})^2 \\ &\quad + 2E[(L-E(L))(E(L)-\widetilde{L})]\end{aligned} \tag{1-1-13}$$

式中：

$$E[(L-E(L))(E(L)-\widetilde{L})] = (E(L)-E(L))(E(L)-\widetilde{L}) = 0$$

因此

$$\mathrm{MSE}(L) = \sigma_L^2 + (E(L)-\widetilde{L})^2 \tag{1-1-14}$$

即观测值 L 的均方误差等于 L 的方差加上一个偏差的平方。

当观测值仅含偶然误差时，$E(L)=\widetilde{L}$，均方误差即为方差。

当 $\underset{n,1}{L}$ 为随机向量时，有均方误差

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(L) &= E[(L-\widetilde{L})^{\mathrm{T}}(L-\widetilde{L})] \\ &= E[(L-E(L))+(E(L)-\widetilde{L})^{\mathrm{T}}(L-E(L))+E(L)-\widetilde{L})] \\ &= E[(L-E(L))^{\mathrm{T}}(L-E(L))] + \| E(L)-\widetilde{L} \|^2 \\ &= \mathrm{tr}(D_{LL}) + \sum_{i=1}^{n}(E(L_i)-\widetilde{L}_i)\end{aligned} \tag{1-1-15}$$

1.1.4 协方差传播律

观测值 $\underset{n,1}{L}$ 的方差为(1-1-6)式，设有 L 的 m 个线性函数 $\underset{m,1}{X}$ 和 t 个线性函

数$\underset{t,1}{Y}$

$$
\begin{aligned}
\underset{m,1}{X} &= \underset{m,n}{K}\underset{n,1}{L} + K_0 \\
\underset{t,1}{Y} &= \underset{t,n}{F}\underset{n,1}{L} + F_0
\end{aligned}
\tag{1-1-16}
$$

式中:K、F 和 K_0、F_0 分别是已知的系数和常数。

则函数 X 和 Y 的方差分别为

$$
\begin{aligned}
\underset{m,m}{D_{XX}} &= KD_{LL}K^{\mathrm{T}} \\
\underset{t,t}{D_{YY}} &= FD_{LL}F^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
\tag{1-1-17}
$$

X 对于 Y 的协方差阵为

$$
\underset{m,t}{D_{XY}} = KD_{LL}F^{\mathrm{T}} \tag{1-1-18}
$$

1.1.5 协因数传播律

方差还可表达为相应的协因数与单位权方差的乘积,即

$$
D_{LL} = \sigma_0^2 Q_{LL} \tag{1-1-19}
$$

式中:Q_{LL} 为观测值$\underset{n,1}{L}$的协因数。

将上式代入式(1-1-17)、式(1-1-18),可得 L 的函数 X、Y 的协因数和互协因数阵

$$
\left.
\begin{aligned}
\underset{m,m}{Q_{XX}} &= KQ_{LL}K^{\mathrm{T}} \\
\underset{t,t}{Q_{YY}} &= FQ_{LL}F^{\mathrm{T}} \\
\underset{m,t}{Q_{XY}} &= KQ_{LL}F^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
\right\}
\tag{1-1-20}
$$

式(1-1-17)、式(1-1-18)和式(1-1-20)统称为广义传播律。

1.2 平差模型综述

1.2.1 附有限制条件的间接平差

1. 平差模型

设有 n 个观测值$\underset{n,1}{L}$,必要观测数为 t,设有 u 个参数$\underset{u,1}{X}$,其平差值为$\underset{u,1}{\hat{X}}$,$u>t$,非独立参数的个数为 $S=u-t$。则可列函数模型

$$
\left.
\begin{aligned}
L &= F(\hat{X}) \\
\Phi(\hat{X}) &= 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{1-2-1}
$$

随机模型

$$\underset{n,n}{D} = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1}$$

相应的误差方程和限制条件为

$$\left.\begin{aligned} \underset{n,1}{V} &= \underset{n,u}{B}\,\underset{u,1}{\hat{x}} - \underset{n,1}{l} \\ \underset{s,u}{C}\,\underset{u,1}{\hat{x}} &+ \underset{s,1}{w_x} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-2-2}$$

式中：

$$l = L - F(X^0)$$

$$w_x = \Phi(X^0)$$

根据最小二乘原理，可得式(1-2-16)的法方程

$$\left.\begin{aligned} N_{BB}\hat{X} + C^{\mathrm{T}}K_S - B^{\mathrm{T}}Pl &= 0 \\ C\hat{X} + W_x &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-2-3}$$

及解

$$\left.\begin{aligned} \hat{x} &= (N_{BB}^{-1} - N_{BB}^{-1}C^{\mathrm{T}}N_{CC}^{-1}CN_{BB}^{-1})B^{\mathrm{T}}Pl - N_{BB}^{-1}C^{\mathrm{T}}N_{CC}^{-1}W_x \\ V &= B\hat{x} - l \\ \hat{X} &= X^0 + \hat{x} \\ \hat{L} &= L + V \end{aligned}\right\} \tag{1-2-4}$$

式中：

$$N_{BB} = B^{\mathrm{T}}PB, N_{CC} = CN_{BB}^{-1}C^{\mathrm{T}}$$

2. 精度评定

单位权方差估计值为

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^{\mathrm{T}}PV}{r} = \frac{V^{\mathrm{T}}PV}{n-(u-s)} \tag{1-2-5}$$

协因数阵的计算公式列于表 1-1，其推证见文献[1]、[4]、[5]。

表 1-1　　附有限制条件的间接平差的协因数阵

	L	$\hat{X}$	V	$\hat{L}$
L	Q	$BQ_{\hat{x}\hat{x}}$	$-Q_{vv}$	$Q-Q_{vv}$
$\hat{X}$	$Q_{\hat{x}\hat{x}}B^{\mathrm{T}}$	$N_{BB}^{-1}-N_{BB}^{-1}C^{\mathrm{T}}N_{CC}^{-1}CN_{BB}^{-1}$	0	$Q_{\hat{x}\hat{x}}B^{\mathrm{T}}$
V	$-Q_{vv}$	0	$Q-BQ_{\hat{x}\hat{x}}B^{\mathrm{T}}$	0
$\hat{L}$	$Q-Q_{vv}$	$BQ_{\hat{x}\hat{x}}$	0	$Q-Q_{vv}$

1.2.2 间接平差法

1. 平差模型

在附有限制条件的间接平差模型中，如果所设的参数 u 正好等于必要观测数 t，即 $u=t$，此时非独立参数的个数为 $s=u-t=0$，参数之间不存在限制条件。则函数模型为

$$L = F(\hat{X}) \tag{1-2-6}$$

随机模型

$$\underset{n,n}{D} = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1}$$

相应的误差方程为

$$\underset{n,1}{V} = \underset{n,u}{B}\,\underset{u,1}{\hat{x}} - \underset{n,1}{l} \tag{1-2-7}$$

式中：

$$l = L - F(X^0)$$

法方程及解为

$$N_{BB}\hat{x} - B^{\mathrm{T}}Pl = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{x} &= N_{BB}^{-1}B^{\mathrm{T}}Pl \\ V &= B\hat{x} - l \\ \hat{X} &= X^0 + \hat{x} \\ \hat{L} &= L + V \end{aligned}\right\} \tag{1-2-8}$$

2. 精度评定

单位权方差估值为

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^{\mathrm{T}}PV}{r} = \frac{V^{\mathrm{T}}PV}{n-t} \tag{1-2-9}$$

协因数阵的计算公式列于表 1-2。

表 1-2 **间接平差中的协因数阵**

	L	$\hat{X}$	V	$\hat{L}$
L	Q	BN_{BB}^{-1}	$BN_{BB}^{-1}B^{\mathrm{T}}-Q$	$BN_{BB}^{-1}B^{\mathrm{T}}$
$\hat{X}$	$N_{BB}^{-1}B^{\mathrm{T}}$	N_{BB}^{-1}	0	$N_{BB}^{-1}B^{\mathrm{T}}$
V	$BN_{BB}^{-1}B^{\mathrm{T}}-Q$	0	$Q-BN_{BB}^{-1}B^{\mathrm{T}}$	0
$\hat{L}$	$BN_{BB}^{-1}B^{\mathrm{T}}$	BN_{BB}^{-1}	0	$BN_{BB}^{-1}B^{\mathrm{T}}$

1.3　线性模型估计方法的分析与进展

在测量数据平差处理中，线性模型的参数估计仍占主导地位。自高斯提出线性模型的最小二乘估计以来，随着测绘学科应用上的需求，至今已发展成为一套较完整的线性模型类型和参数估计优化方法。

如何应用和组合已有的线性模型，构建合适的函数模型和随机模型，消除和降低模型误差的影响，是当前国内外数据处理领域主要研究和要解决的实际课题。早在 20 世纪中后期，国际大地测量协会数学物理大地测量研究专题组就将线性模型在“3S”及其集成的应用研究和发展非线性模型的应用研究作为当时的重点研究课题之一。可见，测量线性模型估计方法，特别是其在现代测量数据处理中应用研究尚需深入和发展。

设平差的函数模型和随机模型的线性形式为

$$\underset{n,1}{L} = \underset{n,t}{A}\underset{t,1}{X} \tag{1-3-1}$$

$$\underset{n,n}{D} = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} \tag{1-3-2}$$

式(1-3-1)、式(1-3-2)称为高斯-马尔可夫模型。构成线性模型的要素是带有偶然误差 Δ 的观测向量 L，函数模型的系数阵 B 和参数 X，L 确定后，其方差阵是给定的。

所谓经典平差模型是指：第一，L 中的观测值之间可以是独立或相关的，但必须是函数独立的，即 L_i 之间不存在函数关系。在这种情况下，L 的方差阵 D 为非奇异阵，故有 $Q=P^{-1}$，P 为 L 的权阵，随机模型为式(1-3-2)；第二，参数 X 的选定必须使函数模型的系数阵 B 为列满秩阵，即 B 的秩 $R(\underset{n,t}{B})=t<n$，这就是网中具有必要起始数据时的情形；第三，所选参数 X 的统计性质，即其数学期望和方差是未知的，X 称为非随机参数。满足平差模型式(1-3-1)、式(1-3-2)的上述这三个性质，就是通常所说的经典平差模型。1.2 节中论述的就是这种模型的解法。

由于测量控制网优化设计、监测网变形分析、近景摄影测量等应用方面的需要，经常会在控制网中不设定必要的起算数据。在这种情况下，系数阵 B 为列不满秩阵，即 B 的秩 $R(\underset{n,t}{B})<t$，上述第二个条件将不能满足，这种平差模型的特点是：第一，随机模型为式(1-3-2)；第二，系数阵 B 列亏；第三，X 为非随机参数。满足此条件的称为秩亏平差模型，相应的平差方法称为秩亏自由网平差。这是 20 世纪六七十年代发展起来的一种现代平差方法。

由于重力场参数的推估，测量控制网的扩展，不同类观测网的联合，整体平差、坐标转换等应用上的需要，平差参数 X 的一部分或全部在平差前具有先验统计信息，即这些参数的先验期望和方差是已知的。这样就产生了新的平差问题。此时其模型特点是：第一，观测的随机模型仍为式(1-3-2)；第二，系数阵 B 仍为列满秩阵；第三，X 不仅是非随机参数，也可是随机参数，即在模型中对随机参数相应的随机模型要增加。

$$D_X = \sigma_0^2 Q_{XX} = \sigma_0^2 P_X^{-1} \tag{1-3-3}$$

这种模型称为配置模型(或拟合推估模型)，相应的平差方法称为最小二乘拟合推估。这也是20世纪六七十年代发展起来的一种现代平差方法。

在线性模型中，如果 L 的确定不论函数是否独立，系数阵 B 是否列满或列亏，但 X 总为非随机参数，这种模型称为线性平差的综合模型。Rao 早在1971年[6]就针对综合模型给出了最小二乘估计准则和解法，并取名为最小二乘统一理论。1990年，陶本藻、刘大杰用奇异正态分布的最大似然估计方法[7]，也给出了综合模型的最小二乘解。

如果平差模型中参数 X 不局限于非随机量，这样，平差模型中三个基本要素 L、B、X 的确定就完全不受限制，则成为完整的综合模型。在综合模型平差中，将随机参数化为非随机参数的等价模型问题，已由崔希璋、陶本藻、刘大杰等在广义最小二乘原理[3]中得到了解决。至此，基于偶然误差($E(\Delta)=0$)观测向量的线性模型平差理论已趋完善。

误差理论的主要进展是从单纯研究偶然误差扩展到研究系统误差和粗差。与偶然误差类似，其研究内容包括误差分布、传播律、检验及其估计方法。误差分布不仅要进一步研究正态分布、均匀分布等单一分布理论，还要研究各分布间的合成分布。系统误差的传播仍基于前述的误差传播律，并根据系统误差的性质予以扩充。误差检验的目的是要在平差问题中排出系统误差和粗差的影响，以保证测量成果的精度。误差估计总是与参数估计同时进行，而且依附于参数估计中。

为消除系统误差而提出的平差方法主要是附有系统参数的平差法和半参数估计法等。针对粗差的平差方法是稳健估计法，也称抗差估计。这些都属于现代平差方法范畴。

线性模型的参数估计理论和方法虽已成熟，但结合复杂的测量数据处理还需进一步地深入研究和完善。线性模型参数估计的应用研究有待进一步发展。对于线性模型参数估计精度的研究，其中一个重要的方向是如何消除或削弱模型误差的影响，虽然已经给出了各种情况下的有关模型，但用于实际工

程还存在很多问题。例如，模型误差的识别消除，最优模型的选取等；在线性模型中还有一些实际的问题需要解决，例如，病态模型、反演模型、融合模型等，都应加强研究；“3S”及其集成中的质量控制，其中涉及的有关线性模型的平差问题。

1.4　本课程的主要内容

《测量数据处理理论与方法》着重介绍在测量数据处理领域中较为成熟的研究成果、实用平差方法及热点问题，课程内容的选取，主要考虑培养测绘工程工程硕士这一层次所必须掌握的平差理论知识的要求，具体内容为：

(1)偶然误差理论及经典平差方法——对误差理论和经典平差方法进行了概括，回顾学习现代测量平差方法所必须掌握的基础知识。

(2)秩亏自由网平差理论与方法——介绍广义逆矩阵解法以及测量中常用的秩亏自由网平差的各种方法。

(3)滤波配置模型的平差——介绍滤波模型及最小二乘配置平差方法。

(4)平差系统可靠性分析——介绍假设检验原理和方法，评价平差系统可靠性的度量指标。

(5)现代回归模型的平差——介绍回归分析在测量数据处理中的应用，常用模型的回归分析方法及整体最小二乘回归、半参数回归等模型的现代平差方法。

(6)稳健估计理论和方法——介绍稳健估计原理、选权迭代法以及针对处理粗差的几种常用抗差最小二乘法。

(7)有偏估计的平差原理——主要介绍有偏估计估计原理、算法和估计量的统计性质。

(8)几种特殊问题的估计方法——内容包括附加系统参数估计、权的验后估计、有偏估计、非线性估计等。

第2章 秩亏自由网平差

2.1 概 述

在控制网按间接平差中，通常有足够的起始数据，待定参数是点的坐标，它们是非随机参数，平差的数学模型是

$$\underset{n,1}{L} = \underset{n,t}{B}\,\underset{t,1}{X} + \underset{n,1}{\Delta} \text{ 或 } E(L) = BX \tag{2-1-1}$$

$$D(\Delta) = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} \tag{2-1-2}$$

模型(2-1-1)及模型(2-1-2)就是高斯-马尔可夫模型。由于平差有足够的起始数据，B 必为列满秩阵，即 B 的秩 $R(B)=t$，t 为待定坐标参数的个数。随机模型中的权阵 P 是满秩阵，即 $R(P)=n$，表示观测值之间不存在函数相关，所以这是一个满秩平差问题。用上述函数模型中平差的条件是控制网中必须设定足够的坐标起始数据，如果设定的坐标起始数据正好等于必要的起始数据个数，这种控制网的平差就称为经典自由网平差。

1944 年，R. C. Bose 将满秩的高斯-马尔可夫模型中的 B 矩阵扩充为秩亏阵，提出了系数阵秩亏的高斯-马尔可夫模型：

$$\begin{gathered}\underset{n,1}{L} = \underset{n,t}{B}\,\underset{t,1}{X} + \underset{n,1}{\Delta} \text{ 或 } E(L) = BX \\ D(L) = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} \\ R(B) < t, \det(P) \neq 0\end{gathered} \tag{2-1-3}$$

对于系数阵秩亏的高斯-马尔可夫模型，实质上是数学上如何解算系数阵秩亏方程的问题，而对于测绘工作者来说，重要的不仅是如何解算方程，而是要弄清这个模型的含义，即造成秩亏的原因，在此基础上采取合适的解算方法，并对获得的估计作出解释。

在测量控制网中，误差方程系数秩亏通常由两种原因引起，一种是控制网中必要观测不足引起的秩亏，称为形亏。这种原因引起的秩亏可以通过增加必要观测来解决。另一种是控制网没有足够的起算数据，即基准不足或网中