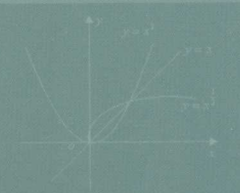
GAODENGSHUXUE

高等数学

（专升本）



黄建雄　沙荣方　李康弟　主编

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

高等数学

（专升本）

黄建雄　沙荣方　李康弟　主编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是理工类专科起点本科大学生的“高等数学”课程的教材或教学参考用书，要求学生具有一元函数微积分基础．主要内容为函数的微分学，函数的积分学，对坐标的曲线积分和曲面积分，幂级数和傅立叶级数，常微分方程．

供理工类专科起点本科大学生阅读参考．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：专升本/黄建雄，沙荣方，李康弟主编．—上海：同济大学出版社，2009.1

ISBN 978-7-5608-3893-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．①黄…②沙…③李…　Ⅲ．高等数学—成人教育：高等教育—升学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 187015 号

高等数学(专升本)

主编　黄建雄　沙荣方　李康弟

责任编辑　辜　翔　　责任校对　杨江淮　　封面设计　陈益平

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn

（地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021-65985622）

经　销　全国各地新华书店

印　刷　同济大学印刷厂

开　本　787mm×960mm　1/16

印　张　14.25

印　数　1—5 100

字　数　285 000

版　次　2009 年 1 月第 1 版　　2009 年 1 月第 1 次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-3893-9

定　价　29.00 元

前　言

随着高等教育不断地发展，各种层次的本科大学生教育也蓬勃兴起，针对不同类型大学生的“高等数学”课程的教材建设也成为亟需进行的工作.

针对专科起点的本科生的“高等数学”课程的教学特点，本书在内容中舍弃了专科教学中已讲授过的极限理论部分的内容，对一元函数的微积分计算只作了简单的介绍，但对微元分析法和多元函数微积分学部分的内容作了较完整的论述，同时对具有较大应用价值的其他内容，如函数的幂级数展开、Fourier 级数展开、微分方程等也作了较多的论述.

本书在部分章节中运用复指数函数处理正弦余弦函数的技巧，技术上与信息类和强电类课程对此类问题的处理较为近似，相信对学生快速适应后续课程的学习有较大的帮助. 在函数的幂级数和 Fourier 级数展开内容的部分，采用较多的函数图像说明级数的近似效果，以期学生对该部分较抽象的内容有直观的认识.

本书可作为理工类专科起点本科大学生的“高等数学”的教材或教学参考用书，要求学生初步掌握一元函数微积分的基本理论和知识. 本书包含了函数的微分学，函数的积分学，对坐标的曲线积分和曲面积分，幂级数和傅立叶级数，常微分方程等方面的内容.

本书由黄建雄，沙荣方，李康弟策划，第 1 章和第 4 章由黄建雄编写，第 2 章由张申媛编写，第 3 章由钱道翠编写，第 5 章由蒋书法编写. 全书的修改和统稿工作由黄建雄，沙荣方，李康弟完成.

编者

2008 年 12 月

目　录

1 微分学

微分学是微积分的重要组成部分,包含导数和微分两个重要概念及其应用.导数反映的是函数值关于自变量的变化率,函数的微分反映的是当自变量有微小改变时,函数值改变量的近似表示,利用导数和微分的性质,可有成效地解决许多实际问题.

1.1 一元函数微分学

1.1.1 导数与微分的概念

1. 瞬时速度 考虑一个质点的直线运动,建立坐标系,设在时刻 t,质点的坐标为 $s=f(t)$,从时刻 t_0 到 $t_0+\Delta t$,质点的位移为 $\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$.在此时间间隔内,质点运动的平均速度为

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

如果时间间隔 Δt 充分小,应用中就将上述值看成为质点在时刻 t 的近似速度,利用极限语言,若极限 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$ 存在,则称

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

为质点在时刻 t_0 的瞬时速度.

2. 曲线的切线 我们从几何上切线的直观概念,讨论曲线 $C: y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线问题,要求出曲线在点 M 处的切线方程,只需求出切线斜率即可.在曲线 C 上另取一点 $N(x,f(x))$,当 N 无限接近点 M 时,割线 MN 的极限位置就是曲线 C 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线 T.设割线 MN 的倾角为 φ,切线 T 的倾角为 α,则 $N\to M$ 时,$\varphi\to\alpha$,$\tan\varphi\to\tan\alpha$,如图 1-1.

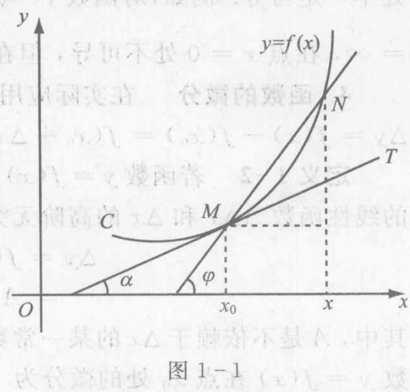


图 1-1

割线 MN 的斜率为 $\tan\varphi=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,当 N 无限接近点 M 时,有 x

$\to x_0$，因此，当极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在时，曲线 C 在点 M 处的切线 T 的斜率为

$$k=\tan\alpha=\lim_{x\to x_0}\tan\varphi=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

此时，切线的方程为

$$y-f(x_0)=k(x-x_0).$$

3. 导数定义 记自变量的增量为 $\Delta x=x-x_0$，函数 $y=f(x)$ 的增量为 $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，在上述两个问题的讨论中，都出现了极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 的存在性问题，数学上对上述极限给出了下列解释.

定义 1-1 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，称极限值 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，也可记为 $y'(x_0)$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

同理，称 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 为函数 $y=f(x)$ 的导函数.

定理 1-1 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$.

值得注意的是，当函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续时，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不一定可导. 例如，对函数 $y=\sqrt[3]{x}$，有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}-0}{\Delta x}=\infty$，在点 $x=0$ 处不可导，但在点 $x=0$ 处连续.

4. 函数的微分 在实际应用中，经常需要近似计算函数 $y=f(x)$ 的增量 $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，其中一种近似称为函数的微分.

定义 1-2 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的增量 Δy 可表达为自变量增量 Δx 的线性函数 $A\Delta x$ 和 Δx 的高阶无穷小量之和，即

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\\&=A\Delta x+o(\Delta x),\qquad(\Delta x\to 0)\end{aligned}$$

其中，A 是不依赖于 Δx 的某一常数，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，并记函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分为

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = \mathrm{d}f\big|_{x=x_0} = A\Delta x = A\mathrm{d}x.$$

定理 1－2 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的充要条件为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x$.

函数可微性的几何意义见图 1－2，其中，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{|NP|}{|MQ|}=\dfrac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}\to 0$.

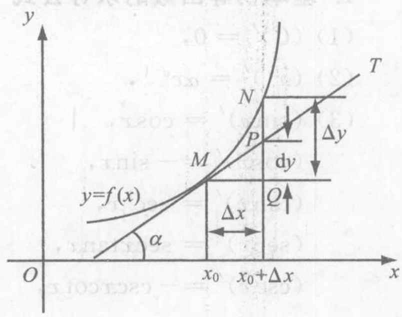


图 1－2

记自变量的增量为 $\Delta x = x - x_0$，函数的增量为 $\Delta y = f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，函数的可微性回答了如下问题，在可微条件下，函数增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可用 $f'(x_0)\mathrm{d}x$ 来近似，从而，$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. 即在点 $x=x_0$ 附近，函数 $y=f(x)$ 可用线性函数 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 近似，曲线 $y=f(x)$ 在点$(x_0,f(x_0))$附近可用其切线近似表示. 另一方面，函数的导数 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可用函数微分 $\mathrm{d}y$ 和自变量微分 $\mathrm{d}x$ 之比表示，故导数经常称为微商，用微商的概念可给求导运算带来很大的便利.

例 1－1 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的导函数，并给出函数在点 $x=1$ 处的导数.

解 $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

函数在点 $x=1$ 处的导数为 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

例 1－2 求曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在点$(1,\mathrm{e})$处的切线方程.

解 $$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^h-1)}{h}=\mathrm{e}^x\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}=\mathrm{e}^x,$$

曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在点$(1,\mathrm{e})$处的切线斜率为 $k=y'\big|_{x=1}=\mathrm{e}$，所求切线方程为

$$y-\mathrm{e}=\mathrm{e}(x-\mathrm{e}).$$

例 1－3 求函数 $y=x^2$ 的微分，并计算 1.02^2 的近似值.

解 $$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=2x,$$

故函数 $y=x^2$ 的微分为 $\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x$.

由于1.02可以看成为1的微小改变，函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的增量可由其微分近似，即

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2\approx \mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x,$$

取 $x=1,\Delta x=0.02$，则

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 1.02^2 - 1^2 \approx \mathrm{d}y = 2x\Delta x = 0.04$$

故

$$1.02^2 \approx 1^2 + 0.04 = 1.04.$$

1.1.2 求导方法

1. 基本初等函数的求导公式 经过讨论可得到如下公式.

(1) $(C)' = 0$, $\mathrm{d}(C) = 0$; (C 为常数)

(2) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$, $\mathrm{d}(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha - 1}\mathrm{d}x$; ($\alpha$ 为常数)

(3) $(\sin x)' = \cos x$, $\mathrm{d}\sin x = \cos x \mathrm{d}x$;

$(\cos x)' = -\sin x$, $\mathrm{d}\cos x = -\sin x \mathrm{d}x$;

$(\tan x)' = \sec^2 x$, $\mathrm{d}\cot x = -\csc^2 x \mathrm{d}x$;

$(\sec x)' = \sec x \tan x$, $\mathrm{d}\sec x = \sec x \tan x \mathrm{d}x$;

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$, $\mathrm{d}\csc x = -\csc x \cot x \mathrm{d}x$.

(4) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\mathrm{d}\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\mathrm{d}x$;

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\mathrm{d}\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\mathrm{d}x$;

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $\mathrm{d}\arctan x = \dfrac{1}{1 + x^2}\mathrm{d}x$;

$(\mathrm{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$, $\mathrm{d}\,\mathrm{arccot}\, x = -\dfrac{1}{1 + x^2}\mathrm{d}x$.

(5) $(a^x)' = a^x \ln a$, $\mathrm{d}a^x = a^x \ln a \mathrm{d}x$. ($a \neq 1$ 为常数)

特别,$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$;

(6) $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $\mathrm{d}\log_a |x| \dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$; ($a \neq 1$ 为常数)

特别,$(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}$, $\mathrm{d}\ln |x| = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

2. 四则运算和复合函数求导法则 由于在实际问题中需要计算初等函数的导数,而初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算或函数复合形成的,为此我们有如下定理.

定理 1-3(四则运算求导法则) 设 $f(x)$,$g(x)$ 在点 x 处可导(可微),则

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$, $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$;

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, $\mathrm{d}(fg) = g\mathrm{d}f + f\mathrm{d}g$;

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},\ \mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\mathrm{d}f - f\mathrm{d}g}{g^2} \quad (g(x) \neq 0).$$

定理 1-4(复合函数求导法则) 设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 处可导,且函数

$y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 处可导,则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x_0 处可导且

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{u=\varphi(x_0)}\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},$$

此时, $\mathrm{d}y=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\mathrm{d}x=f'(u_0)\varphi'(x_0)\mathrm{d}x=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{u=u_0}\mathrm{d}u=f'(u_0)\mathrm{d}u.$

复合函数的微分计算法则

$$\mathrm{d}y=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\mathrm{d}x=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{u=u_0}\mathrm{d}u$$

称为一阶微分的形式不变性.

3. 高阶导数 将函数 $y=f(x)$ 的导函数再求导, 得到函数的二阶导数, 类似地, 可定义 n 阶导数如下

$$f''(x)=[f'(x)]',f'''(x)=[f''(x)]',\cdots,f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]',\cdots$$

n 阶导数也可记为 $y^{(n)}(x)$, $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n},\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

例 1-4 求函数 $y=\frac{1+\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x+x^2}$ 的导数.

解
$$\begin{aligned}y'&=\frac{(1+x^{1/2})'(\mathrm{e}^x+x^2)-(1+\sqrt{x})(\mathrm{e}^x+x^2)'}{(\mathrm{e}^x+x^2)^2}\\&=\frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}(\mathrm{e}^x+x^2)-(1+\sqrt{x})(\mathrm{e}^x+2x)}{(\mathrm{e}^x+x^2)^2}\\&=\frac{(\mathrm{e}^x+x^2)-2(x+\sqrt{x})(\mathrm{e}^x+2x)}{2\sqrt{x}(\mathrm{e}^x+x^2)^2}.\end{aligned}$$

例 1-5 求函数 $y=\ln(1+x^2)\mathrm{e}^{\sin x}$ 的导数.

解
$$y'=[\ln(1+x^2)]'\mathrm{e}^{\sin x}+\ln(1+x^2)[\mathrm{e}^{\sin x}]'$$

而 $\ln(1+x^2)$ 是由 $\ln u, u=1+x^2$ 复合形成, 故

$$[\ln(1+x^2)]'=\frac{1}{u}\times(1+x^2)'=\frac{2x}{1+x^2},$$

$\mathrm{e}^{\sin x}$ 是由 $\mathrm{e}^u, u=\sin x$ 复合形成, 故

$$[\mathrm{e}^{\sin x}]'=\mathrm{e}^u\times(\sin x)'=\mathrm{e}^{\sin x}\cos x,$$

从而,
$$y'=\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{e}^{\sin x}+\ln(1+x^2)\mathrm{e}^{\sin x}\cos x.$$

例 1-6 求函数 $y=\mathrm{e}^{ax}$ 的 n 阶导数.

解 $y=\mathrm{e}^{ax}$ 由 $y=\mathrm{e}^u, u=ax$ 复合形成, 故

$$y'=(\mathrm{e}^{ax})'=\mathrm{e}^u\times a=a\mathrm{e}^{ax},$$
$$y''=(a\mathrm{e}^{ax})'=a\times(\mathrm{e}^{ax})'=a^2\mathrm{e}^{ax},$$

设
$$y^{(n)}=a^n\mathrm{e}^{ax},$$

有 $$y^{(n+1)}=(a^n e^{ax})'=a^n\times(e^{ax})'=a^{n+1}e^{ax},$$
由数学归纳法知，$y^{(n)}=a^n e^{ax}$，$(n=1,2,\cdots)$.

1.1.3 用参数方程表示函数及隐函数的导数计算

作为导数的应用，曲线的切线方程的计算是我们经常要讨论的问题，直角坐标系下，平面上曲线的常用表示方式有显函数 $y=f(x)$ 形式，参数方程形式及隐函数形式，下面对不同形式表示的函数求导方法进行简单讨论.

1. 用参数方程表示的函数的求导方法 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程
$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},\quad a\leqslant t\leqslant b$$
确定，若 $x=\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加(减少)，$\varphi(t)$，$\psi(t)$ 可导且 $\varphi'(t)\neq 0$，则
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$
进一步，若 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 二阶可导且 $\varphi'(t)\neq 0$，则
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\mathrm{d}t}}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

例 1-7 求曲线 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta\\ y=2\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$ 上的点 $(1,2)$ 处的切线方程.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{2}\sin\theta}=2\cot\theta,$$
而点 $(1,2)$ 处对应的参数值为 $\theta=\frac{\pi}{4}$，点 $(1,2)$ 处的切线斜率为 $k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=2$，故所求切线方程为 $y-2=2(x-1)$.

例 1-8 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 参数方程为
$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}.$$

因此，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+t^2}\times 2t}=t,$$

由于$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=t$仍旧是$t$的函数，不能直接对变量$x$求导，故

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{\frac{t}{1+t^2}}=\frac{1}{t}+t.$$

2. 隐函数的求导方法　设函数 $y=y(x)$ 由方程 $F(x,y)=0$ 确定，即 $F(x,y(x))\equiv 0$，在 $F(x,y(x))\equiv 0$ 两端对 x 求导，然后解出 $y'(x)$ 即可.

在数学计算中，对数函数能简化大量的乘除和指数运算，在求导运算中有对数求导法，常用于多个因子的乘积形成的函数和幂指函数的求导运算中.

例 1-9　设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x+y+x\mathrm{e}^y=2$ 确定，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$.

解　由于函数 $y=y(x)$ 由方程 $x+y+x\mathrm{e}^y=2$ 确定，即

$$x+y(x)+x\mathrm{e}^{y(x)}=2,$$

将上式两端对 x 求导，有

$$1+y'+\mathrm{e}^y+x\mathrm{e}^y y'=0,$$

$$y'=-\frac{1+\mathrm{e}^y}{1+x\mathrm{e}^y}.$$

$x=1$ 时，$y=0$；将 $x=1$，$y=0$ 代入上式，得

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=-1.$$

例 1-10　求曲线 $x^2+xy+2y^2=8$ 上的点$(2,1)$处的切线方程.

解　形式上，由方程 $x^2+xy+2y^2=8$ 决定函数 $y=y(x)$，即

$$x^2+xy(x)+2y^2(x)\equiv 8,$$

将上式两端对 x 求导，有

$$2x+y+xy'+4yy'\equiv 0,$$

将 $x=2$，$y=1$ 代入上式，得

$$5+6y'=0,$$

故所求切线斜率为

$$k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(2,1)}=-\frac{5}{6},$$

所求切线方程为

$$y-1=-\frac{5}{6}(x-2).$$

1.1.4 中值定理

导数概念在许多领域中有重要的应用，应用的桥梁就是微分中值定理. 下面我们不加证明地给出 Lagrange 中值定理.

定理1-5 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在区间 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Lagrange 中值定理表明，在曲线 $y=f(x)$ 上的两点 A,B 之间至少可找到一点 C，使得曲线在点 C 的切线平行于 A，B 两点之间的连线. Lagrange 中值定理的几何意义如图 1-3 所示.

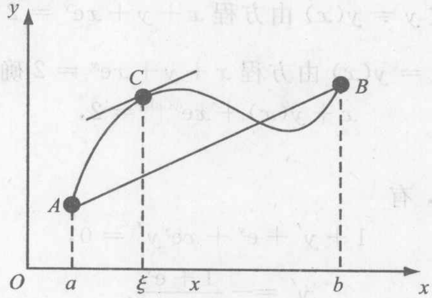


图 1-3

讨论 若函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的某邻域内可导，则有

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(\xi)\Delta x,$$

即

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(\xi)\Delta x.$$

其中，ξ 介于 $x_0, x_0+\Delta x$ 之间.

记 $\theta=\dfrac{\xi-x_0}{\Delta x}$，$0<\theta<1$，则上式可写为

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x.$$

Lagrange 中值定理有许多有价值的应用. 在导数计算中，我们知道常值函数的导数为零，那么，逆命题是否成立就值得讨论.

推论 1 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)=0$，则 $f(x)\equiv C$.

证明 给定 $x_0\in[a,b]$，任取 $x\in[a,b]$，由 Lagrange 中值定理知，存在

ξ 介于 x_0, x 之间，使得

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0,$$

即

$$f(x) \equiv f(x_0) = C.$$

用推论 1 可以证明某些函数恒等式.

例 1－11 证明 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1,1]$.

证明 令 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$，则 $f(x)$ 在 $y = f(x)$ 在区间$[-1,1]$上连续. 又

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0 \qquad x \in (-1,1)$$

由推论 1 知，$f(x) \equiv f(0) = \frac{\pi}{2}$，即

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

利用函数导数的符号，我们可讨论函数的单调性.

推论 2 设函数 $y = f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，在区间(a,b) 内可导，且 $f'(x) > 0$($f'(x) < 0$)，则 $f(x)$ 在区间$[a,b]$ 上单调增加(减少)，即对任意给定的 $x_2 > x_1, x_1, x_2 \in [a,b]$，有 $f(x_2) > f(x_1)$($f(x_2) < f(x_1)$).

证明 对任意给定的 $x_2 > x_1, x_1, x_2 \in [a,b]$，由 Lagrange 中值定理知，存在 ξ 介于 x_1, x_2 之间，使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0,$$

从而

$$f(x_2) > f(x_1).$$

例 1－12 讨论函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ 的单调性.

解
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3).$$

当 $x = -1, x = 3$ 时，$f'(x) = 0$.

$x \in (-\infty, -1)$ 时，$f'(x) > 0$，故 $x \in (-\infty, -1]$ 时，$f(x)$ 单调增加；

$x \in (-1,3)$ 时，$f'(x) < 0$，故 $x \in [-1,3]$ 时，$f(x)$ 单调减少；

$x \in (3, +\infty)$ 时，$f'(x) > 0$，故 $x \in [3, +\infty)$ 时，$f(x)$ 单调增加.

上述解答过程可列表 1－1。

表 1－1　　函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ 的单调性

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

中值定理和函数单调性质可以用来证明许多不等式.

例 1－13 证明 $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$，$(x > 0)$.

证明 令
$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2},$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0, \qquad (x > 0)$$
故 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调增加，有 $f(x) > f(0) = 0$，

即
$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2};$$
令
$$g(x) = x - \ln(1+x),$$
$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0, \qquad (x > 0)$$
故 $g(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调增加，有 $g(x) > g(0) = 0$，

即
$$x > \ln(1+x).$$

1.1.5 极值与最大(小)值问题

在应用中，如最优化设计等问题中，人们经常要讨论极值与最大(小)值问题. 下面对此问题作一般性的讨论.

1. 极值与最值的概念

极值与极值点：若存在点 x_0 的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，使得对所有的 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，都有 $f(x_0) \geqslant f(x)$ $(f(x_0) \leqslant f(x))$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $y = f(x)$ 的极大值(极小值)，称 $x = x_0$ 为函数 $y = f(x)$ 的极大值点(极小值点).

最大(小)值与最大(小)值点：若函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义，且对所有的 $x \in I$，都有 $f(x_0) \geqslant f(x)$ $(f(x_0) \leqslant f(x))$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上的最大值(最小值)，称 $x = x_0$ 为函数 $y = f(x)$ 的最大值点(最小值点).

讨论 极值和最值是两个不同的概念，x_0 是极值点有两方面的含义，其一，函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中有定义；其二，x_0 是函数在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内的最值点.

2. 极值的计算

费马(Fermat)引理 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处取到极值，且 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，则必有 $f'(x_0) = 0$.

讨论 满足 $f'(x) = 0$ 的点 x 称为函数的驻点，费马引理告诉我们，若 x_0 是极值点，则要么 $f'(x_0) = 0$，要么函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 不可微. 但驻点不一定是极值点，例如，$y = x^3$，$x = 0$ 是驻点，但不是极值点.

函数极值点的求法 由费马引理知，函数的极值点通常出现在驻点或函数的不可导点，那么，在求极值的问题中，我们只需讨论这些点是否是极值点，判别方法通常由下列性质给出.

定理 1-6 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上有定义，且 x_0 是 $y=f(x)$ 的驻点或 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导，则下列结论成立.

(1) 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上连续，且函数 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 上单调增加，在 $(x_0, x_0+\delta)$ 上单调减少，则 $x=x_0$ 为函数 $y=f(x)$ 的极大值点.

(2) 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上连续，且在 $(x_0-\delta, x_0)$ 上 $f'(x)\geqslant 0$，在 $(x_0, x_0+\delta)$ 上 $f'(x)\leqslant 0$，则 $x=x_0$ 为函数 $y=f(x)$ 的极大值点.

(3) 如果 $f'(x_0)=0$，且 $f''(x_0)<0$，则 $x=x_0$ 为函数 $y=f(x)$ 的极大值点.

关于极小值点的判别方法有类似的结论.

例 1-14 求函数 $y=xe^{-x}$ 的极值.

解

$$y'=(1-x)e^{-x},$$

$x=1$ 时，$y'=0$，

$y=xe^{-x}$ 的驻点是 $x=1$.

$$y''=(x-2)e^{-x}.$$

$x=1$ 时，$y''=-e^{-1}<0$.

因此，点 $x=1$ 是函数 $y=xe^{-x}$ 的极大值点，极大值为 e^{-1}.

例 1-15 求函数 $y=2-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ 的极值.

解

$$y'=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}},$$

y' 无零点，但 $x=1$ 时，y' 不存在，故 $x=1$ 可能是极值点.

当 $x<1$ 时，$y'>0$，当 $x>1$ 时，$y'<0$，

因此，点 $x=1$ 是函数 $y=2-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ 的极小值点，极小值为 2.

讨论连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的最大值问题时，如果最大值在区间 (a,b) 内取到，则最大值点必为 $y=f(x)$ 的极值点，因此，最大值点只能是极值点或区间的端点，从而最大值点只能是函数的驻点，不可导点或区间的端点. 类似地可讨论最小值问题.

例 1-16 求函数 $f(x)=x^2-2x+2$ 在区间 $[0,3]$ 上的最大值和最小值.

解 $f'(x)=2(x-1)$，$x=1$ 时，$y'=0$.

比较驻点和端点的函数值

$$f(1)=1, f(0)=2, f(3)=5.$$

从而，函数 $f(x)=(x-1)^2+1$ 在区间 $[0,3]$ 上的最大值为 $f(3)=5$，最小值为 $f(1)=1$.

在应用领域中经常讨论的许多优化问题可归结为函数的最大(小)值问题.