



考试名家指导

考研辅导教材系列

考研

概率论与数理统计 讲义（基础篇）

北京大学 姚孟臣 编著

第2版



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

021
146-1
2008
考研辅导教材系列

概率论与数理统计讲义

(基础篇)

第2版

北京大学 姚孟臣 编著



机械工业出版社

本书是工学类、经济和管理学类硕士研究生入学考试科目“概率论与数理统计”复习指导书。本书作者多年来一直参加有关考研数学试卷的阅卷和考研辅导班的教学,深知考生的疑难与困惑。作者把他们的教学经验结合考生与考试的实际加以细化、归纳和总结,整理成书奉献给广大读者,旨在提高考研者的数学水平与考试成绩。

本书紧扣数学考试大纲,贴切考试实践,内容丰富。全书共分8章。内容包括:随机事件和概率,随机变量及其分布,多维随机变量及其分布,随机变量的数字特征,大数定律和中心极限定理,数理统计的基本概念,参数估计及假设检验等。本书结构新颖,每一章按照:考试要求,复习要点(重要定义、定理及公式),典型例题分析,练习题四部分编写。本书概念叙述简捷,解题思路清晰,对典型例题从多侧面、不同角度、用多种解法进行讲解,注重对考生基本概念的理解、多种类型基础题目的训练和综合解题能力的培养,是考研者较好的复习指导书和良师益友。

本书可作为硕士研究生入学考试数学一、三、四“概率论与数理统计”的基础复习阶段指导书,对于在校的大学生、大专生及自学考试者,本书也是一本较好的学习参考用书。

本书最早由北京大学出版社于2001年出版,历经3次修订。从第4次修订起已改由机械工业出版社出版。此次为第5次修订。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计讲义. 基础篇/姚孟臣编著. —2版.

—北京:机械工业出版社,2008.8

(考研辅导教材系列)

ISBN 978-7-111-16287-2

I. 概... II. 姚... III. ①概率论—研究生—入学考试—自学参考资料 ②数理统计—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. 021

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第125474号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:边萌 徐春涛

责任编辑:边萌 责任印制:杨曦

三河市宏达印刷有限公司印刷

2008年8月第2版第1次印刷

184mm×260mm $1/16$ • 18.75印张 • 462千字

标准书号:ISBN 978-7-111-16287-2

定价:28.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话:(010)68326294

本社服务热线电话:(010)68311609

本社服务邮箱:marketing@mail.machininfo.gov.cn

投稿热线电话:(010)68354423

投稿邮箱:sbs@mail.machininfo.gov.cn

封面无防伪标均为盗版

前 言

“概率论与数理统计”是全国硕士研究生入学数学考试的一个重要组成部分。从研究必然问题到处理随机问题,不仅大多数初学者感到比较困难,对于曾经学过(或只学过)概率论的广大考生来说也觉得问题不少,特别是在做习题以及解决实际应用方面遇到的问题会更多一些。从近几年的硕士研究生入学数学考试阅卷结果也可以看出这部分试题得分率普遍较低,有些考生甚至完全放弃这部分试题。为了帮助有志攻读硕士研究生的广大考生能在较短的时间内全面、系统地复习有关的内容,根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的有关“概率论与数理统计”的要求,结合我们多年参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验,先后编写了《概率论与数理统计讲义(基础篇)》,《概率论与数理统计讲义(提高篇)》。

本书是《概率论与数理统计讲义(基础篇)》。全书共分8章,每一章由以下四部分构成:

考试要求——编写这部分的目的使广大考生明确每一章考的内容是什么,掌握到什么程度就可以了。在编写过程中,根据我们多年以来参加有关命题的经验把考试大纲所要求的内容加以细化、归纳和总结,使广大考生能够正确把握考试要求,这是区别于其他考研辅导书的一大特点。

重要定义、定理及公式——这部分根据考试大纲的要求,将概念、定理和公式、方法进行了简明扼要的叙述、归纳和总结;精选了各种典型的例题并作详细的解答,使得考生能够在较短的时间内对重点、难点、热点问题复习,全面、系统地掌握所需要的知识,在考试时能够拿得出、用得上。

典型例题分析——这部分根据考试大纲要求的题型进行了分类、归纳,总结了各种题型解题的方法及技巧,开阔了考生的解题思路,使所学的知识能够融会贯通,并迅速提高考生的综合解题能力。

练习题——每章的最后部分精选了适量的练习题,全部习题都附有答案或提示,这些题目作为考生巩固所学知识、复习有关内容时使用,这有利于提高考生分析问题和解决问题的能力。

本书可作为参加硕士研究生入学考试数学一、三、四考生的基础复习阶段指导书,对于在校的大学生、大专生及自学考试者,本套书也是较好的学习参考用书。

张清允同志参加了本书的资料整理及有关章节的编写工作。由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有错误和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编 者

目 录

前言

第 1 章 随机事件和概率	(1)
1.1 考试要点	(1)
1.2 复习要点	(1)
1.2.1 重要概念及性质	(1)
1.2.2 重要定理及公式	(11)
1.2.3 重要方法	(17)
1.3 典型例题分析	(19)
1.3.1 填空题	(19)
1.3.2 选择题	(23)
1.3.3 解答题	(27)
1.4 练习题	(33)
练习题答案与提示	(34)
第 2 章 随机变量及其分布	(36)
2.1 考试要求	(36)
2.2 复习要点	(36)
2.2.1 重要概念及性质	(36)
2.2.2 重要定理及公式	(43)
2.2.3 重要方法	(43)
2.3 典型例题分析	(48)
2.3.1 填空题	(48)
2.3.2 选择题	(51)
2.3.3 解答题	(52)
2.4 练习题	(67)
练习题答案与提示	(69)
第 3 章 多维随机变量及其分布	(71)
3.1 考试要求	(71)
3.2 复习要点	(71)
3.2.1 重要概念及性质	(71)
3.2.2 重要定理及公式	(77)
3.2.3 重要方法	(80)
3.3 典型例题分析	(82)
3.3.1 填空题	(82)
3.3.2 选择题	(84)
3.3.3 解答题	(88)
3.4 练习题	(114)
练习题答案与提示	(115)

第4章 随机变量的数字特征	(117)
4.1 考试要求	(117)
4.2 复习要点	(117)
4.2.1 重要概念及性质	(117)
4.2.2 重要定理及公式	(122)
4.3 典型例题分析	(125)
4.3.1 填空题	(125)
4.3.2 选择题	(130)
4.3.3 解答题	(133)
4.4 练习题	(170)
练习题答案与提示	(172)
第5章 大数定律和中心极限定理	(173)
5.1 考试要求	(173)
5.2 复习要点	(173)
5.2.1 重要概念及性质	(173)
5.2.2 重要定理及公式	(173)
5.3 典型例题分析	(176)
5.3.1 填空题	(176)
5.3.2 选择题	(178)
5.3.3 解答题	(180)
5.4 练习题	(185)
练习题答案与提示	(185)
第6章 数理统计的基本概念	(186)
6.1 考试要求	(186)
6.2 复习要点	(186)
6.2.1 重要概念及性质	(186)
6.2.2 重要定理及公式	(188)
6.3 典型例题分析	(189)
6.3.1 填空题	(189)
6.3.2 选择题	(190)
6.3.3 解答题	(191)
6.4 练习题	(194)
练习题答案与提示	(194)
第7章 参数估计	(195)
7.1 考试要求	(195)
7.2 复习要点	(195)
7.2.1 重要概念及性质	(195)
7.2.2 重要定理及公式	(196)
7.2.3 重要方法	(197)
7.3 典型例题分析	(203)

7.3.1 填空题	(203)
7.3.2 选择题	(205)
7.3.3 解答题	(207)
7.4 练习题	(220)
练习题答案与提示	(220)
第8章 假设检验	(222)
8.1 考试要求	(222)
8.2 复习要点	(222)
8.2.1 重要概念及性质	(222)
8.2.2 重要方法	(223)
8.3 典型例题分析	(231)
8.3.1 填空题	(231)
8.3.2 解答题	(231)
8.4 练习题	(234)
练习题答案与提示	(234)
附录	(235)
附录 A 2000~2008 年全国硕士研究生入学考试数学考试概率论与数理统计部分 试题的解答及分析	(235)
附录 B	(303)
B1 正态分布数值表	(288)
B2 t 分布临界值表	(388)
B3 χ^2 分布临界值表	(289)
B4 F 分布临界值表($\alpha=0.05$)	(290)
B5 F 分布临界值表($\alpha=0.025$)	(291)
B6 F 分布临界值表($\alpha=0.01$)	(292)

第 1 章 随机事件和概率

1.1 考试要求

- (1) 了解样本空间的概念, 理解随机事件的概念, 重点掌握事件的关系与运算;
- (2) 理解概率与条件概率的概念, 掌握概率的基本性质, 会运用古典概型、几何概型计算有关的概率;
- (3) 掌握概率的加法公式、乘法公式、全概公式及贝叶斯公式;
- (4) 理解事件独立性的概念, 掌握利用事件独立性计算有关概率的各种方法; 理解独立重复试验的概念, 掌握运用二项概型计算有关的概率的各种方法.

1.2 复习要点

1.2.1 重要概念及性质

定义 1 (随机现象) 在一定条件下, 具有多种可能发生的结果的现象称为随机现象. 这类现象的一个共同点是: 事先不能预言多种可能的结果中究竟出现哪一种.

定义 2 (随机试验) 为了叙述方便, 我们把对随机现象进行的一次观测或一次实验统称为它的一个试验. 如果这个试验满足下面的两个条件:

- (1) 在相同的条件下可以重复进行;
- (2) 试验都有哪些可能的结果是明确的, 但每次试验的具体结果在试验前是无法得知的, 那么就称它是一个随机试验, 简称为试验. 一般用字母 E 表示.

定义 3 (样本空间) 在随机试验中, 每一个可能出现的不可分解的最简单的结果称为随机试验的基本事件或样本点, 用 ω 表示; 而由全体基本事件构成的集合称为基本事件空间或样本空间, 记为 Ω .

例 1 设 E_1 为从 10 件产品 (其中 2 件次品, 8 件正品) 之中任取 3 件, 观察其中次品的件数. 记 ω_i 为恰有 i 件次品 ($i=0, 1, 2$), 于是 $\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$.

例 2 设 E_2 为在相同条件下接连不断地向一个目标射击, 直到击中目标为止, 观察射击次数. 记 ω_i 为射击 i 次 ($i=1, 2, \dots$), 于是 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$.

例 3 设 E_3 为某地铁站每隔 5 分钟有一列车通过, 乘客对于列车通过该站的时间完全不知道, 观察乘客候车的时间. 记乘客的候车时间为 ω . 显然有 $\omega \in [0, 5)$, 即 $\Omega=[0, 5)$.

通过上面的几个例子可以看出, 随机试验大体可以分成只有有限个可能结果的 (如 E_1); 有可列个可能结果的 (如 E_2) 和有不可列个可能结果的 (如 E_3) 这样三种情况.

应该说明的是, 一个随机试验中样本点个数的确定都是相对试验目的而言的. 另外, 一个随机试验的条件有的是人为的, 有的是客观存在的. 在后一种情况下, 每当试验条件实现时, 人们便会观测到一个结果 ω . 虽然我们无法事先准确地说出试验的结果, 但是能够指出它出现的范围 Ω . 因此, 我们所讨论的随机试验是有着十分广泛的含意的.

例 4 写出下列随机试验的样本空间 Ω :

- (1) 同时掷两枚骰子, 记录两枚骰子点数之和;
- (2) 10 件产品中有 3 件是次品, 每次从中取 1 件, 取出后不再放回, 直到 3 件次品全部取出为止, 记录抽取的次数;
- (3) 生产某种产品直到得到 10 件正品, 记录生产产品的总件数;
- (4) 将一尺之棰折成三段, 观察各段的长度.

解 (1) $\Omega = \{2, 3, \dots, 12\}$;

(2) $\Omega = \{3, 4, \dots, 10\}$;

(3) $\Omega = \{10, 11, \dots\}$;

(4) 设 x, y, z 分别表示第一段、第二段、第三段的长度, 有

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z = 1\}.$$

定义 4 (随机事件) 所谓**随机事件**是样本空间 Ω 的一个子集, 随机事件简称为**事件**, 用字母 A, B, C 等表示. 因此, 某个事件 A 发生当且仅当这个子集中的一个样本点 ω 发生, 记为 $\omega \in A$.

在每次试验中必定要发生的事件称为**必然事件**, 记作 Ω . 在每次试验中必定不会发生的事件称为**不可能事件**, 记为 $\emptyset$. 我们知道, 必然事件 Ω 与不可能事件 $\emptyset$ 都不是随机事件. 因为作为试验的结果, 它们都是确定性的, 并不具有随机性. 但是为了今后讨论问题方便, 我们也将它们当做随机事件来处理.

定义 5 (事件的关系)

(1) 包含

设 A, B 为两个事件. 如果 A 中的每一个样本点都属于 B , 那么称事件 B **包含** 事件 A , 或称事件 A 包含于事件 B , 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 这就是说, 在一次试验中, 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

(2) 等价

如果 $A \subset B$ 与 $B \supset A$ 同时成立, 那么称事件 A 与事件 B **等价**或**相等**, 记为 $A = B$. 这就是说, 在一次试验中, 等价的两个事件同时发生或同时不发生, 因此可以把它们看成是一样的.

(3) 互斥 (互不相容)

设 A, B 为两个事件. 如果 $A \cdot B^{\complement} = \emptyset$, 那么称事件 A 与 B 是**互不相容**的 (或**互斥**的). 这就是说, 在一次试验中事件 A 与事件 B 不可能同时发生.

事件的互不相容关系也可以推广到多于两个事件的情形. 即, 如果 $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n = \emptyset$, 则称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是互斥的. 如果 $A_i \cdot A_j = \emptyset (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n)$, 这时我们又称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是**两两互斥**的. 注意, 如果 n 个事件两两互斥, 那么这 n 个事件之间一定互斥; 反之不真.

(4) 独立

设 A, B 是某一随机试验的任意两个随机事件. 称 A 与 B 是**相互独立**的, 如果

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

○ 这里出现的 $A \cdot B$ (及后面出现 AB) 表示事件 A 与 B 的**交**, 在第 3 页才给出了它的定义. 本书为了便于考生复习, 集中分类归纳叙述了一些概念或术语, 这就可能导致某些概念或术语提前引出, 而它们的定义是滞后给出的. 请读者在阅读本书时能正确理解作者的用意.

这就是在 A 与 B 独立的情况下事件 A 与 B 乘积的概率公式. 可见事件 A 与 B 相互独立是建立在概率基础上事件之间的一种关系. 所谓事件 A 与 B 相互独立就是指其中一个事件发生与否不影响另一个事件发生的可能性. 类似地当 $P(B) \neq 0$ 时, A 与 B 相互独立也可以用

$$P(A | B) = P(A)$$

来定义.

由两个随机事件相互独立的定义, 我们可以得到: 若事件 A 与 B 相互独立, 则 $\bar{A}$ 与 B , A 与 $\bar{B}$, A 与 $\bar{B}$ 也相互独立.

如果事件 A, B, C 满足

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

则称事件 A, B, C 相互独立.

注意, 事件 A, B, C 相互独立与事件 A, B, C 两两独立不同, 两两独立是指上述四个式子中前三个式子成立. 因此, 相互独立一定是两两独立, 但反之不一定.

对于 n 个事件的独立性, 我们有:

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个事件. 如果对于所有可能的组合 $1 \leq i < j < k < \dots \leq n$ 下列各式同时成立:

$$\begin{cases} P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j), \\ P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k), \\ \vdots \\ P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n). \end{cases}$$

那么称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是相互独立的.

定义 6 (事件的运算)

(1) 并

设 A, B 为两个事件. 我们把至少属于 A 或 B 中一个的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的并或和, 记为 $A \cup B$ 或 $A + B$. 这就是说, 事件 $A \cup B$ 表示在一次试验中, 事件 A 与 B 至少有一个发生.

我们用 $A_1 + A_2 + \dots + A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^n A_i$ 表示事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生; 进而用 $A_1 + A_2 + \dots + A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^n A_i$ 表示 $A_1, A_2, \dots$ 中至少有一个发生.

(2) 交

设 A, B 为两个事件. 我们把同时属于 A 及 B 的所有样本点构成的集合称为事件 A 与 B 的交或积, 记为 $A \cap B$ 或 $A \cdot B$, 有时也简记为 AB . 这就是说, 事件 $A \cap B$ 表示在一次试验中, 事件 A 与 B 同时发生.

我们用 $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^n A_i$ 表示事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生; 进而用 $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \dots$ 同时发生.

(3) 逆 (对立)

对于事件 A , 我们把不包含在 A 中的所有样本点构成的集合称为事件 A 的逆 (或 A 的对立事件), 记为 $\bar{A}$. 这就是说, 事件 $\bar{A}$ 表示在一次试验中事件 A 不发生. 我们规定它是事件的基本运算之一.

在一次试验中, 事件 A 与 $\bar{A}$ 不会同时发生 (即 $A \cdot \bar{A} = \emptyset$, 称它们具有互斥性), 而且 A 与 $\bar{A}$ 至少有一个发生 (即 $A + \bar{A} = \Omega$, 称它们具有完全性). 这就是说, 事件 A 与 $\bar{A}$ 满足:

$$\begin{cases} A \cdot \bar{A} = \emptyset, \\ A + \bar{A} = \Omega. \end{cases}$$

根据上面的基本运算定义, 不难验证事件之间的运算满足以下的一些规律:

- 1) $A + B = B + A$ (加法交换律);
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (加法结合律);
- 3) $A + A = A$;
- 4) $A + \bar{A} = \Omega$;
- 5) $A + \Omega = \Omega$;
- 6) $A + \emptyset = A$;
- 7) $A \cdot B = B \cdot A$ (乘法交换律);
- 8) $(AB)C = A(BC)$ (乘法结合律);
- 9) $A \cdot A = A$;
- 10) $A \cdot \bar{A} = \emptyset$;
- 11) $A \cdot \Omega = A$;
- 12) $A \cdot \emptyset = \emptyset$;
- 13) $A(B + C) = AB + AC$ (分配律);
- 14) $A + BC = (A + B)(A + C)$ (分配律);
- 15) $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ (对偶原理 (1));
- 16) $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$ (对偶原理 (2)).

有了事件的三种基本运算我们就可以定义事件的其他一些运算. 例如, 我们称事件 AB 为事件 A 与 B 的差, 记为 $A - B$. 可见, 事件 $A - B$ 是由包含于 A 而不包含于 B 的所有样本点构成的集合.

例 5 设 A, B, C 是三个随机事件. 试用 A, B, C 表示下列各事件:

- (1) 恰有 A 发生;
- (2) A 和 B 都发生而 C 不发生;
- (3) 所有这三个事件都发生;
- (4) A, B, C 至少有一个发生;
- (5) 至少有两个事件发生;
- (6) 恰有一个事件发生;
- (7) 恰有两个事件发生;
- (8) 不多于一个事件发生;
- (9) 不多于两个事件发生;
- (10) 三个事件都不发生.

解 (1) $\overline{ABC}$; (2) $\overline{ABC}$; (3) ABC ; (4) $A + B + C$;

(5) $AB + BC + CA$; (6) $\overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC}$;

(7) $\overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC}$;

(8) $AB + BC + CA$; (9) $\overline{ABC}$; (10) $\overline{ABC}$.

例 6 设某工人连续生产了四个零件, A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品 ($i=1, 2, 3,$

4), 试用 A_i 表示下列各事件:

- (1) 没有一个是次品; (2) 至少有一个是次品;
 (3) 只有一个是次品; (4) 至少有三个不是次品;
 (5) 恰好有三个是次品; (6) 至多有一个是次品.

解 (1) $A_1 A_2 A_3 A_4$; (2) $\overline{A_1 A_2 A_3 A_4}$;

(3) $\overline{A_1} A_2 A_3 A_4 + A_1 \overline{A_2} A_3 A_4 + A_1 A_2 \overline{A_3} A_4 + A_1 A_2 A_3 \overline{A_4}$;

(4) $A_1 A_2 A_3 \overline{A_4} + A_1 A_2 \overline{A_3} A_4 + A_1 \overline{A_2} A_3 A_4 + \overline{A_1} A_2 A_3 A_4 + A_1 A_2 A_3 A_4$;

(5) $A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \overline{A_4} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \overline{A_4} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 \overline{A_4} + \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} A_4$;

(6) $A_1 A_2 A_3 A_4 + \overline{A_1} A_2 A_3 A_4 + A_1 \overline{A_2} A_3 A_4 + A_1 A_2 \overline{A_3} A_4 + A_1 A_2 A_3 \overline{A_4}$.

例 7 下列各式说明 A 与 B 之间具有何种包含关系?

- (1) $AB=A$; (2) $A+B=A$.

解 (1) 因为“ $AB=A$ ”与“ $AB \subset A$ 且 $A \subset AB$ ”是等价的, 由 $A \subset AB$ 可以推出 $A \subset A$ 且 $A \subset B$, 因此有 $A \subset B$.

(2) 因为“ $A+B=A$ ”与“ $A+B \subset A$ 且 $A \subset A+B$ ”是等价的, 由 $A+B \subset A$ 可以推出 $A \subset A$ 且 $B \subset A$, 因此有 $B \subset A$.

定义 7 (概率的公理化定义) 设 E 是一个随机试验, Ω 为它的样本空间, 以 E 中所有的随机事件组成的集合为定义域, 定义一个函数 $P(A)$ (其中 A 为任一随机事件), 且 $P(A)$ 满足以下三条公理, 则称函数 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

公理 1 (非负性) $0 \leq P(A) \leq 1$.

公理 2 (规范性) $P(\Omega) = 1$.

公理 3 (可列可加性) 若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 两两互斥, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

利用概率的公理化定义, 可导出概率的下列一些性质:

1) $P(\emptyset) = 0$;

2) 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个互不相容事件, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i),$$

此称为概率的有限可加性;

3) 对任意事件 A , $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, $P(A) = 1 - P(\overline{A})$;

4) 对事件 A, B , 若 $A \supset B$, 则

$$P(A-B) = P(A) - P(B), \text{ 且 } P(A) \geq P(B);$$

5) 对任意两个事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

该公式称为**加法公式**. 利用归纳法可推出 n 个事件的加法公式:

对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n).$$

这些性质将帮助我们解决概率计算问题.

定义 8 (概率的统计定义) 在一组不变的条件 S 下, 独立地重复作 n 次试验. 设 μ 是 n 次试验中事件 A 发生的次数, 当试验次数 n 很大时, 如果 A 的频率 $f_n(A) = \frac{\mu}{n}$ 稳定地在某一数值 p 附近摆动; 而且一般说来随着试验次数的增多, 这种摆动的幅度会越来越小, 则称数值 p 为事件 A 在条件组 S 下发生的**概率**. 记作

$$P(A) = p.$$

定义 9 (概率的古典定义) 我们把具有特性:

- 1) 试验的结果是有限个;
- 2) 每个结果出现的可能性是相同的

随机试验称为**古典概型随机试验**, 就是说, 在我们所讨论的基本事件空间 Ω 中, 基本事件 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 是有限个, 并且

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n).$$

设古典概型随机试验的基本事件空间由 n 个基本事件组成, 即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. 如果事件 A 是由上述 n 个事件中的 m 个组成, 则称事件 A 发生的**概率**为

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1-1)$$

所谓**古典概型**就是利用关系式 (1-1) 来讨论事件发生的概率的数学模型.

例 8 一个口袋装有 10 个外形相同的球, 其中 6 个是白球, 4 个是红球. “无放回”地从袋中取出 3 个球, 求下述诸事件发生的概率 (所谓“无放回”是指, 第一次取一个球, 不再把这个球放回袋中, 再去取另一个球):

- (1) $A_1 = \{\text{没有红球}\};$
- (2) $A_2 = \{\text{恰有两个红球}\};$
- (3) $A_3 = \{\text{至少有两个红球}\};$
- (4) $A_4 = \{\text{至多有两个红球}\};$
- (5) $A_5 = \{\text{至少有一个白球}\};$
- (6) $A_6 = \{\text{颜色相同的球}\}.$

解 设 $A = \{\text{任取三个球}\}$, 其基本事件空间中基本事件的个数 (即从 10 个球中任取 3 个的“一般组合”数)

$$n = C_{10}^3 = 120.$$

(1) A_1 是由上面 120 个基本事件中的

$$m_1 = C_6^3 C_4^0 = 20,$$

即 20 个组成. 这里的 $C_6^3 C_4^0$ 是从 6 个白球中任取 3 个, 从 4 个红球中取出 0 个 (即不取红球的“两类不同元素的组合”数). 根据关系式 (1-1), 有

$$P(A_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

(2) A_2 是由基本事件中的

$$m_2 = C_6^1 C_4^2 = 36,$$

即 36 个组成. 根据关系式 (1-1), 有

$$P(A_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

(3) A_3 是由基本事件中的

$$m_3 = C_6^1 C_4^2 + C_6^0 C_4^3 = 40,$$

即 40 个组成. 根据关系式 (1-1), 有

$$P(A_3) = \frac{m_3}{n} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}.$$

(4) A_4 是由基本事件中的

$$m_4 = C_6^3 C_4^0 + C_6^2 C_4^1 + C_6^1 C_4^2 = 116,$$

即 116 个组成. 根据关系式 (1-1), 有

$$P(A_4) = \frac{m_4}{n} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}.$$

(5) A_5 是由基本事件中的

$$m_5 = C_6^1 C_4^2 + C_6^2 C_4^1 + C_6^3 C_4^0 = 116,$$

即 116 个组成. 根据关系式 (1-1), 有

$$P(A_5) = \frac{m_5}{n} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}.$$

(6) A_6 是由基本事件中的

$$m_6 = C_6^3 C_4^0 + C_6^0 C_4^3 = 24,$$

即 24 个组成. 根据关系式 (1-1), 有

$$P(A_6) = \frac{m_6}{n} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}.$$

例 9 在例 8 的条件下, “有放回”地从袋中取出 3 个球, 求例 8 中诸事件发生的概率 (所谓 “有放回” 是指, 第一次取一个球, 记录下这个球的颜色后, 再把这个球放回袋中, 然后再去任取一个球).

解 显然有放回的抽取是一个可重复的排列问题, 于是基本事件的个数

$$n = 10^3 = 1000.$$

(1) A_1 是由上面 1000 个基本事件中的

$$m_1 = 6^3 = 216,$$

即 216 个组成. 根据关系式 (1-1), 有

$$P(A_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{216}{1000} = 0.216.$$

(2) A_2 是由基本事件中的

$$m_2 = 3 \times 6 \times 4^2 = 288,$$

即 288 个组成. 根据关系式 (1-1), 有

$$P(A_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{288}{1000} = 0.288.$$

(3) A_3 是由基本事件中的

$$m_3 = 3 \times 6 \times 4^2 + 4^3 = 352,$$

即 352 个组成. 根据关系式 (1-1), 有

$$P(A_3) = \frac{m_3}{n} = \frac{352}{1000} = 0.352.$$

(4) A_4 是由基本事件中的

$$m_4 = 3 \times 6 \times 4^2 + 3 \times 6^2 \times 4 + 6^3 = 936,$$

即 936 个组成. 根据关系式 (1-1), 有

$$P(A_4) = \frac{m_4}{n} = \frac{936}{1000} = 0.936.$$

(5) A_5 是由基本事件中的

$$m_5 = 6^3 + 3 \times 6^2 \times 4 + 3 \times 6 \times 4^2 = 936,$$

即 936 个组成. 根据关系式 (1-1), 有

$$P(A_5) = \frac{m_5}{n} = \frac{936}{1000} = 0.936.$$

(6) A_6 是由基本事件中的

$$m_6 = 6^3 + 4^3 = 280,$$

即 280 个组成. 根据关系式 (1-1), 有

$$P(A_6) = \frac{m_6}{n} = \frac{280}{1000} = 0.28.$$

例 10 把 10 本书随意放在书架上, 求其中指定的 5 本书放在一起的概率.

解 基本事件总数 $n = 10!$, 有利于将指定的 5 本书放在一起的基本事件个数 $m = 6!5!$ (其中 $6!$ 是指 5 本书当作一个元素进行全排列的总数, $5!$ 是 5 本书相互之间进行全排列的总数), 故

$$P(A) = \frac{6!5!}{10!} = \frac{1}{42}.$$

例 11 将 k 个不同的球随机地放入 N 个盒子中去 ($k \leq N$). 假设每个盒子能容纳的球数不限, 试求下列事件的概率:

(1) 指定的 k 个盒子中各有一球(事件 A);

(2) 恰有 k 个盒子, 其中各有一球(事件 B).

解 将 k 个球放入 N 个盒子中去的不同放法作为不同的基本事件, 因每只球都有 N 个盒子可供放入, 故共有 $N \times N \times \cdots \times N = N^k$ 种不同放法, 即基本事件总数 $n = N^k$.

(1) 对事件 A , 其不同放法相当于这 k 个球在这 k 个指定位置的全排列 $k!$, 即 $m = k!$, 故

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{k!}{N^k}.$$

(2) 对事件 B , 首先在 N 个盒子中任选 k 个盒子出来, 其不同选法有 C_N^k 种; 再在选定的 k 个盒子中各放一球, 其不同放法由 (1) 知为 $k!$ 种, 故有利于事件 B 的不同放法共有 $C_N^k \cdot k!$ 种, 即 $m = C_N^k \cdot k! = A_N^k$, 所以

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{A_N^k}{N^k}.$$

例 12 考虑一元二次方程 $x_2 + Bx + C = 0$, 其中 B, C 分别是将一枚色子 (骰子) 接连掷两次先后出现的点数, 求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q .

解 一枚色子 (骰子) 掷两次其基本事件总数 $n = 6^2 = 36$, 方程有实根的充要条件是 $B^2 - 4C \geq 0$ 或 $C \leq B^2/4$. 易见

B	1	2	3	4	5	6
使 $C \leq \frac{B^2}{4}$ 的基本事件数	0	1	2	4	6	6
使 $C = \frac{B^2}{4}$ 的基本事件数	0	1	0	1	0	0

所以

$$p = \frac{1+2+4+6+6}{36} = \frac{19}{36}, \quad q = \frac{1+1}{36} = \frac{1}{18}.$$

定义 10 (概率的几何定义) 我们把具有特性:

- 1) 试验的结果是无限且不可列的;
- 2) 每个结果出现的可能性是均匀的

随机试验称为**几何型随机试验**. 在几何型随机试验中, 我们是通过几何度量 (长度、面积、体积等) 来计算事件出现的可能性.

设 E 为几何型的随机试验, 其基本事件空间中的所有基本事件可以用一个有界区域来描述, 而其中一部分区域可以表示事件 A 所包含的基本事件, 则称事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}, \quad (1-2)$$

其中 $L(\Omega)$ 与 $L(A)$ 分别为 Ω 与 A 的**几何度量**.

所谓**几何概型**就是利用关系式 (1-2) 来讨论事件发生的概率的数学模型.

注意, 上述事件 A 的概率 $P(A)$ 只与 $L(A)$ 有关, 而与 $L(A)$ 对应区域的位置及形状无关.

例 13 某地铁每隔 5 分钟有一列车通过, 在乘客对列车通过该站时间完全不知道的情况下, 求每一个乘客到站等车时间不多于 2 分钟的概率.



图 1-1

解 设 $A = \{\text{每一个乘客等车时间不多于 2 分钟}\}$. 由于乘客可以在接连两列车之间的任何一个时刻到达车站, 因此每一乘客到达站台时刻 t 可以看成是均匀地出现在长为 5 分钟的时间区间上的一个随机点, 即 $\Omega = [0, 5)$. 又设前一列车在时刻 T_1 开出, 后一列车在时刻 T_2 到达, 线段 T_1T_2 长为 5 (见图 1-1), 即 $L(\Omega) = 5$; T_0 是 T_1T_2 上一点, 且 T_0T_2 长为 2. 显然, 乘客只有在 T_0 之后到达 (即只有 t 落在线段 T_0T_2 上), 等车时间才不会多于 2 分钟, 即 $L(A) = 2$. 因此

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)} = \frac{2}{5}.$$

例 14 (会面问题) 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头, 它们在一昼夜内到达的时间是等可能的, 如果甲船的停泊时间是 1 小时, 乙船停泊的时间是两小时, 求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少?

解 这是一个几何概型问题. 设 $A = \{\text{它们中任何一艘都不需要等候码头空出}\}$. 又设甲乙两船到达的时刻分别是 x, y , 则 $0 \leq x \leq 24, 0 \leq y \leq 24$. 由题意, 若甲先到, 则乙必须晚 1 小时到达, 即 $y \geq 1+x$, 若乙先到, 则甲必须晚 2 小时到达, 即 $x \geq y+2$. 由图 1-2 可知: $L(\Omega)$ 是由 $x=0, x=24, y=0, y=24$ 所围图形面积 $S=24^2$, 而

$$L(A) = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}(24-1)^2 + \frac{1}{2}(24-2)^2 = \frac{1}{2}(23^2 + 22^2).$$

所以

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)} = \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{1013}{1152} \approx 0.8793.$$

例 15 从区间 $(0, 1)$ 内任取两个数, 求这两个数的积小于 $1/4$ 的概率.

解 设 $A = \{\text{这两个数的积小于 } 1/4\}$, 以 x, y 表示从 $(0, 1)$ 内任取的两个数, 那末样本空间所对应的区域为 (见图 1-3):

$$S = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\},$$

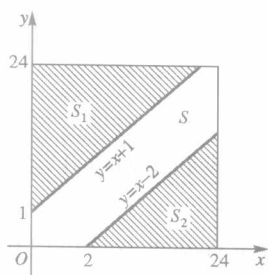


图 1-2

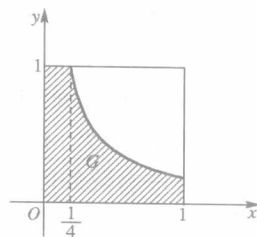


图 1-3

S 的面积=1. 事件 A 所包含的区域为

$$G = \left\{ (x, y) : xy < \frac{1}{4}, 0 < x < 1, 0 < y < 1 \right\},$$

区域 G 的面积为

$$\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{4x} dx + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4},$$

于是所求的概率为

$$P(A) = \frac{L(G)}{L(S)} = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4}.$$

定义 11 (条件概率) 在一般情况下, 我们所讨论的事件 B 的概率 $P_S(B)$, 都是指在一组不变条件 S 下事件 B 发生的概率 (但是为了叙述简练, 一般不再提及条件组 S , 而把 $P_S(B)$ 简记为 $P(B)$).

设 A, B 是条件 S 下的两个随机事件, 且 $P(A) \neq 0$. 则把在 A 发生的前提下 B 发生的概率称为**条件概率**,

记作 $P(B|A)$, 读作在 A 发生的条件下事件 B 的概率, 其定义为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

例 16 在 100 个圆柱形零件中有 95 件长度合格, 有 93 件直径合格, 有 90 件两个指标都合格. 从中任取一件 (这就是条件 S) 讨论在长度合格的前提下, 直径也合格的概率.

解 设 $A = \{\text{任取一件, 长度合格}\}$, $B = \{\text{任取一件, 直径合格}\}$, $AB = \{\text{任取一件, 长度与直径都合格}\}$. 根据古典概型, 在条件 S 下, 基本事件的总数

$$n = C_{100}^1.$$

事件 A 与 B 所包含的基本事件个数分别为

$$m_A = C_{95}^1, \quad m_B = C_{93}^1.$$

AB 所包含的基本事件个数为

$$m_{AB} = C_{90}^1.$$

所以在长度合格的情况下直径也合格的零件概率 $P(B|A)$ 为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{90/100}{95/100} = \frac{18}{19}.$$

例 17 设随机事件 B 是 A 的子事件, 已知 $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/6$, 求 $P(B|A)$.