題解中心

三角法辭典

日本長澤龜之助 原著
薛德炯 吳載耀 編譯

上海 新亞書店 出版

題解中心

三角法辭典

日本 長澤龜之助原著
薛德炯 吳載耀 編譯

上海新亞書店印行

三角法辭典

長澤龜之助著

一九三五年十一月初版
一九五一年十一月六版

定價人民幣六萬元

編譯者　薛德炯
　　　　吳載耀

出版者　新亞書店
上海河南中路159號
電話：94258

總發行所　中國科技圖書聯合發行所
上海中央路24號304室
電話:19566　電報掛號:21963

分發行所　上海　南京 重慶 漢口 貴陽　新亞書店

8001—11200

編譯者言

余等自拋棄教書生涯,廁身於出版界,環顧同業現況,小說出品,車載斗量,科學書籍,寥若晨星,深感無以應國人之所需要,頗思有所貢獻.祇以自身對於科學,亦止淺嘗,何敢高騖:力短心長,不僅余等已也!

二十一年夏,新亞書店以編譯日本長澤氏所著算學辭典相囑,當以茲事體大,未敢輕於嘗試,擱置者半年.翌年春,新亞又重申前議,竊思事在人為,雖不無荆棘當前,祇在吾人能鼓勇猛晉,自有成功希望;因卽由載耀編譯初稿,德炯加以修訂,閱時一載,積稿盈尺.於是卽開始製版,除由呂君憲章,韓君寅生襄助繪圖,史君炳坤襄助校對外,余等復始終自任覆校,明知魯魚亥豕,在所不免,祇期能減少萬一,以稍輕余等之罪過已耳.

茲值發行將始,例須於卷首有言,爰就編校上之所感,縷述於下,以誌完成是書之經過.

1. 是書原以問題解法某某辭典分名各册,而其內容於辭典之通行體裁,頗有出入之處,本擬更名曰辭典式算學題庫,卒以特種關係採用今名,非始願也.

2. 原書疊經修訂,新增之題別列於補遺之部,茲則為之分門別類,納入本文;幾費經營,旨在一貫.中間或尙有未盡善處,祇以時間,精力,兩不我許,未及充分編配,引以為憾.

3. 原書名詞之部依照假名順序編排,茲則改用筆畫順序.我國算學名詞,至不統一,最近國立編譯館正在釐訂而尙未公布,友人中頗有以出書未及其時,將來須經改訂手續為余等惜者,際會如此,又何能已!

4. 排校算學書籍,難於普通書籍者奚啻倍蓰,稍一不愼,錯誤隨之.本書於算式之地位,尤加注意,絕不任其無理割裂.排校之時往往因算式之短長,牽涉行間之中斷,不得不設法添削字句,以資銜接;故為解決此項問題,無形之中費却不少時間,不少精力,於字裏行間.卽此可知一書之編著與排校,莫妙於出自一手.坊間發行之算學書,對於算式之地位,支離割裂,目滿瘡痍者,所在都有;此種過誤,編著者自應負相當責任,不能盡諉之於排校者也.

5. 排校算學書籍,成本之重,遠超於普通書籍,商人於利薄事業而願斥重資者,什不獲一,此關於算學之刊物,數量上所以稀少之主因也.余等之於是書,實有賴於資方之促成,否則以全書五百萬言之巨,而竭我倆之棉薄欲印以行世,縱不望而却走,亦必有所戒懼也.

6. 是書校印將半,知友見之者,獎借備至,殊滋惶愧! 余等自知此書之性質,僅屬一種便於翻檢之類書,與所謂'題庫'者正相若,非比涵義宏大,理論精嚴之皇然巨著.故於編譯之時,僅懸'信''達'二字為的,而忽於文字之工拙.原書之誤點,亦僅就所發覺者加以訂正,未遑一一檢算也.特恐來日多方責難,用敢聲明於此,尙希邦人君子有以諒之!

中華民國二十四年四月　　　　薛德炯　吳載耀

集 平 面

測 角 法

⊙度與法度之比較.

$$D=G-G/10,\ G=D+D/9.$$

⊙分與法分之關係. $27\mu=50m.$

⊙秒與法秒之關係. $81\sigma=250s.$

⊙度與弧度之比較. $180\theta=\pi x.$

⊙法度與弧度之比較. $200\theta=\pi y.$

三角函數之定義

⊙$\sin A=\dfrac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}.$ ⊙$\operatorname{cosec}A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}.$

⊙$\cos A=\dfrac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}.$ ⊙$\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}.$

⊙$\tan A=\dfrac{\text{垂線}}{\text{底邊}}.$ ⊙$\cot A=\dfrac{\text{底邊}}{\text{垂線}}.$

⊙$\operatorname{vers}A=1-\cos A.$ ⊙$\operatorname{covers}A=1-\sin A.$

三角函數之基本關係

⊙$\sin A\times\operatorname{cosec}A=1.$ ⊙$\sin^2A+\cos^2A=1.$

⊙$\cos A\times\sec A=1.$ ⊙$\sec^2A=1+\tan^2A.$

⊙$\tan A\times\cot A=1.$ ⊙$\operatorname{cosec}^2A=1+\cot^2A.$

⊙$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}.$ ⊙$\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}.$

⊙$\sin A<\tan A<\sec A.$

⊙$\cos A<\cot A<\operatorname{cosec}A.$

餘角之三角函數

⊙$\sin(90^\circ-A)=\cos A.$

⊙$\cos(90^\circ-A)=\sin A.$

⊙$\tan(90^\circ-A)=\cot A.$

注意 $\operatorname{cosec}A$, $\sec A$, $\cot A$ 分別爲 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ 之逆數,故從略.

補角之三角函數

⊙$\sin(180^\circ-A)=\sin A.$

⊙$\cos(180^\circ-A)=-\cos A.$

⊙$\tan(180^\circ-A)=-\tan A.$

負角之三角函數

⊙$\sin(-A)=-\sin A.$

⊙$\cos(-A)=\cos A.$

⊙$\tan(-A)=-\tan A.$

$90^\circ+A$ 之三角函數

⊙$\sin(90^\circ+A)=\cos A.$

⊙$\cos(90^\circ+A)=-\sin A.$

⊙$\tan(90^\circ+A)=-\cot A.$

180°+A 之三角函數

◉$\sin(180°+A)=-\sin A$.

◉$\cos(180°+A)=-\cos A$.

◉$\tan(180°+A)=\tan A$.

270°−A 之三角函數

◉$\sin(270°-A)=-\cos A$.

◉$\cos(270°-A)=-\sin A$.

◉$\tan(270°-A)=\cot A$.

270°+A 之三角函數

◉$\sin(270°+A)=-\cos A$.

◉$\cos(270°+A)=\sin A$.

◉$\tan(270°+A)=-\cot A$.

360°−A 之三角函數

◉$\sin(360°-A)=-\sin A$.

◉$\cos(360°-A)=\cos A$.

◉$\tan(360°-A)=-\tan A$.

二角之三角函數

◉$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$.

◉$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$.

◉$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$.

◉$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$.

◉$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$.

◉$\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$.

◉$\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$.

◉$\cot(A-B)=-\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot A-\cot B}$.

◉$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$.

◉$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$.

◉$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$.

◉$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$.

◉$\sin C+\sin D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$.

◉$\sin C-\sin D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}$.

◉$\cos C+\cos D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$.

◉$\cos C-\cos D=-2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}$.

三角之三角函數

◉$\sin(A+B+C)$

$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$
$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C$.

◉$\cos(A+B+C)$

$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$
$-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C$.

◉$\tan(A+B+C)=(\tan A+\tan B+\tan C$
$-\tan A\tan B\tan C)/(1-\tan A\tan B$
$-\tan B\tan C-\tan C\tan A)$

◉$\cot(A+B+C)=(\cot A\times\cot B\times\cot C$
$-\cot A-\cot B-\cot C)/(\cot B\cot C$
$+\cot C\cot A+\cot A\cot B-1)$.

◉若 $A+B+C=90°$, 則

$1=\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A.$

$\cot A\cot B\cot C=\cot A+\cot B+\cot C.$

◉若 $A+B+C=180°$, 則

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

$\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1.$

倍角之三角函數

◉$\sin 2A=2\sin A\cos A.$

◉$\cos 2A=\cos^2A-\sin^2A$

$=2\cos^2A-1=1-2\sin^2A.$

◉$\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2A}.$

◉$\cot 2A=\dfrac{\cot^2A-1}{2\cot A}.$

◉$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3A.$

◉$\cos 3A=4\cos^3A-3\cos A.$

◉$\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3A}{1-3\tan^2A}.$

◉$\cot 3A=\dfrac{\cot^3A-3\cot A}{3\cot^2A-1}.$

分角之三角函數

◉$\cos\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}.$

◉$\sin\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}.$

◉$2\cos\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}.$

◉$2\sin\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}.$

◉$\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{A}{2}+45°\right)=\pm\sqrt{1+\sin A}.$

◉$\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{A}{2}+45°\right)=\pm\sqrt{1-\sin A}.$

◉$\tan\dfrac{A}{2}=(-1\pm\sqrt{1+\tan^2A})/\tan A$

$=(-1\pm\sec A)\cot A.$

普偏角之三角函數

◉$\cos(n\cdot 360°\pm A)=\cos A.$

◉$\sin\{n\cdot 180°+(-1)^nA\}=\sin A.$

◉$\tan(n\cdot 180+A)=\tan A.$

三角形四邊形等

◉$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}.$

$$\left.\begin{array}{l}◉a=b\cos C+c\cos B\\ ◉b=c\cos A+a\cos C\\ ◉c=a\cos B+b\cos A\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}◉a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ ◉b^2=c^2+a^2-2ca\cos B\\ ◉c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}◉\cos A=(b^2+c^2-a^2)/2bc\\ ◉\cos B=(c^2+a^2-b^2)/2ca\\ ◉\cos C=(a^2+b^2-c^2)/2ab\end{array}\right\}$$

次式中假定 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

$$\left.\begin{array}{l}◉\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ ◉\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ ◉\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}◉\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}\\ ◉\cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}\\ ◉\cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&⊙\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\&⊙\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\&⊙\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&⊙(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A=a\cos\tfrac{1}{2}(B-C)\\&⊙(c+a)\sin\tfrac{1}{2}B=b\cos\tfrac{1}{2}(C-A)\\&⊙(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C=c\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&⊙\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\tan\frac{B-C}{2}\\&⊙\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}=\tan\frac{C-A}{2}\\&⊙\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}=\tan\frac{A-B}{2}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&⊙\sin A=\frac{2\Delta}{bc}.\quad \sin B=\frac{2\Delta}{ca}.\quad \sin C=\frac{2\Delta}{ab}\\&\text{但}\quad \Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&⊙r=(s-a)\tan\frac{A}{2}.\quad r_1=s\tan\frac{A}{2}\\&⊙r_2=s\tan\frac{B}{2}.\quad r_3=s\tan\frac{C}{2}\end{aligned}\right\}$$

⊙至 a 之中線 $=\frac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2+2bc\cos A)}$.

$$\left.\begin{aligned}&⊙\text{角 A 之內二等分線}=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}\\&⊙\text{角 A 之外二等分線}=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b\sim c}\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned}⊙\Delta&=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}\\&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=rs\\&=r_1(s-a)=r_2(s-b)=r_3(s-c)\\&=\frac{1}{2}h_a a=\frac{abc}{4R}.\end{aligned}$$

⊙圓之內接四邊形之面積

$$=\sqrt{\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\}}.$$

⊙任意四邊形之面積

$$=\sqrt{\left\{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\times\cos^2\frac{A+C}{2}\right\}}.$$

⊙外切四邊形之面積 $=\sqrt{abcd}\cdot\sin\frac{A+C}{2}$.

⊙內接且外切四邊形之面積 $=\sqrt{abcd}$.

⊙正多角形之邊心距 $r=a/2\tan\frac{\pi}{n}$.

⊙正多角形之半徑 $R=a/2\sin\frac{\pi}{n}$.

⊙同面積 $=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}=nr^2\tan\frac{\pi}{n}$.

De Moivre 氏定理

⊙$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$.

⊙$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\cdots\cdots$.

⊙$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+\cdots\cdots$.

三角函數之展開

$$⊙\sin n\theta=n\sin\theta-\frac{n(n^2-1)}{3!}\sin^3\theta+\frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5\theta\cdots\cdots.$$

$$⊙\cos n\theta=\cos\theta\left\{1-\frac{n^2-1}{2!}\sin^2\theta+\frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4\theta-\cdots\cdots\right\}.$$

三角函數之指數值

⊙$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$.

⊙$\sin\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$.

⊙$i\tan\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$.

級數之和

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha+4\beta)+\cdots+\cos\{\alpha+2(n-1)\beta\}=\frac{\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin n\beta}{\sin\beta}.$$

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+2\beta)+\sin(\alpha+4\beta)+\cdots+\sin\{\alpha+2(n-1)\beta\}=\frac{\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin n\beta}{\sin\beta}.$$

$$\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots\cdots+\cos\left\{\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}=0.$$

$$\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots\cdots+\sin\left\{\alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}=0.$$

三角函數式之因數分解

◉n 爲偶數時，$x^n-1=(x-1)(x+1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left\{x^2-2x\cos\frac{n-4}{n}\pi+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\frac{n-2}{n}\pi+1\right\}.$

◉n 爲奇數時，$x^n-1=(x-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left\{x^2-2x\cos\frac{n-3}{n}\pi+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\frac{n-1}{n}\pi+1\right\}.$

◉n 爲偶數時，$x^n+1=\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{5\pi}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{n-3}{n}\pi+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{n-1}{n}\pi+1\right).$

◉n 爲奇數時，$x^n+1=(x+1)\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{n-4}{n}\pi+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{n-2}{n}\pi+1\right).$

◉$x^n-x^{-n}=(x-x^{-n})\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\times\cdots\cdots\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{n-1}{n}\pi\right).$

◉$x^n+x^{-n}=\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{3\pi}{2n}\right)\cdots\cdots\left(x+x^{-1}-2\cos\frac{2n-1}{2n}\pi\right).$

◉$x^{2n}-2x^n\cos\theta+1=\left(x^2-2x\cos\frac{\theta}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi+\theta}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi+\theta}{n}+1\right)\times\cdots\cdots\left\{x^2-2x\cos\frac{(2n-4)\pi+\theta}{n}+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\frac{(2n-2)\pi+\theta}{n}+1\right\}.$

◉$x^n+x^{-n}-2\cos n\theta=(x+x^{-1}-2\cos\theta)\left\{x+x^{-1}-2\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\right\}\times\cdots\cdots\left\{x+x^{-1}-2\cos\left(\theta+\frac{2n-2}{n}\right)\right\}.$

II. 三角法公式集 球面

基本公式

◉$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos \mathrm{A}$.

◉$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos \mathrm{B}$.

◉$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos \mathrm{C}$.

sin A 之公式

◉$\sin \mathrm{A}=\surd(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a$

$\times\cos b\cos c)/(\sin b\sin c)$

$=2n/(\sin b\sin c)$.

但 $\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}^{\frac{1}{2}}$

$=n$ 及 $2s=a+b+c$.

餘切正弦之公式

◉$\cot a\sin b=\cot \mathrm{A}\sin \mathrm{C}+\cos b\cos \mathrm{C}$.

◉$\cot b\sin a=\cot \mathrm{B}\sin \mathrm{C}+\cos a\cos \mathrm{C}$.

◉$\cot b\sin c=\cot \mathrm{B}\sin \mathrm{A}+\cos c\cos \mathrm{A}$.

◉$\cot c\sin b=\cot \mathrm{C}\sin \mathrm{A}+\cos b\cos \mathrm{A}$.

◉$\cot c\sin a=\cot \mathrm{C}\sin \mathrm{B}+\cos a\cos \mathrm{B}$.

◉$\cot a\sin c=\cot \mathrm{A}\sin \mathrm{B}+\cos c\cos \mathrm{B}$.

正弦比例

◉$\sin \mathrm{A}/\sin a=\sin \mathrm{B}/\sin b=\sin \mathrm{C}/\sin c$

$=2n/(\sin a\sin b\sin c)$.

半角之公式

◉$\sin\frac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$

◉$\cos\frac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}$.

◉$\tan\frac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}$.

半弧之公式

◉$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos \mathrm{S}\cos(\mathrm{S}-\mathrm{A})}{\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}}}$.

◉$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\mathrm{S}-\mathrm{B})\cos\ \mathrm{S}-\mathrm{C})}{\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}}}$.

◉$\tan\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos \mathrm{S}\cos(\mathrm{S}-\mathrm{A})}{\cos(\mathrm{S}-\mathrm{B})\cos(\mathrm{S}-\mathrm{C})}}$.

但 $2\mathrm{S}=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}$.

Napier 氏公式

◉$\tan\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{\mathrm{C}}{2}$.

◉$\tan\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{\mathrm{C}}{2}$.

◉$\tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\tan\frac{c}{2}$.

◉$\tan\frac{1}{2}(a-b)=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\dfrac{c}{2}$.

Delambre 氏比例式

◉$\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$.

◉$\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$.

◉$\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C$.

◉$\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c=\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C$.

球面直角三角形

[C 爲直角]

◉$\sin b=\sin B\sin c$

◉$\sin a=\sin A\sin c$

◉$\tan a=\cos B\tan c$

◉$\tan b=\cos A\tan c$

◉$\tan b=\tan B\sin a$

◉$\tan a=\tan A\sin b$

◉$\tan A\tan B=1/\cos c$

◉$\cot A\cot B=\cos c$

內切圓傍切圓外接圓

◉$\tan r=\dfrac{n}{\sin s}=\tan\dfrac{A}{2}\sin(s-a)$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a$$

$$=\frac{N}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}.$$

但 $N=\{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\times\cos(S-C)\}^{\frac{1}{2}}$.

◉$\cot r=\dfrac{1}{2N}\{\cos S+\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)\}$.

◉$\tan r_1=\dfrac{n}{\sin(s-a)}=\tan\dfrac{A}{2}\sin s$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a$$

$$=\frac{N}{2\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}.$$

◉$\cot r_1=\dfrac{1}{2N}\{-\cos S-\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)\}$.

◉$\tan R=-\dfrac{\cos S}{N}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$

$$=\frac{\tan\frac{1}{2}a}{\cos(S-A)}=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{n}$$

$$=\frac{1}{2n}\{\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s\}.$$

◉$\tan R_1=\dfrac{\cos(S-A)}{N}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}$

$$=\frac{\tan\frac{1}{2}a}{-\cos S}=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{n}$$

$$=\frac{1}{2n}\{\sin s-\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)\}$$

◉$(\cot r+\tan R)^2$

$$=\frac{1}{4n^2}(\sin a+\sin b+\sin c)^2-1.$$

◉$(\cot r_1-\tan R)^2$

$$=\frac{1}{4n^2}(\sin b+\sin c-\sin a)^2-1.$$

面 積

◉球面三角形 $ABC=(A+B+C-\pi)r^2$

◉多角形$=\{\Sigma-(n-2)\pi\}r^2$.

[但 Σ 爲多角形各角之和].

Cagnoli 氏 定 理

◎$\sin\frac{1}{2}E=\frac{\sqrt{\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$. 但 $E=A+B+C-\pi$.

Lhuilier 氏 定 理

◎$\tan\frac{1}{4}E=\sqrt{\{\tan\frac{1}{2}s\tan\frac{1}{2}(s-a)\tan\frac{1}{2}(s-b)\tan\frac{1}{2}(s-c)\}}$.

III. 三角法諸表

三角函數相互之關係

	$\sin\theta=x$	$\cos\theta=x$	$\tan\theta=x$	$\cot\theta=x$	$\sec\theta=x$	$\operatorname{cosec}\theta=x$
$\sin\theta=$	x	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\cos\theta=$	$\sqrt{(1-x^2)}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$
$\tan\theta=$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$
$\cot\theta=$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\sqrt{(x^2-1)}$
$\sec\theta=$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$
$\operatorname{cosec}\theta=$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	x

逆三角函數相互之關係

	$\sin^{-1}$	$\cos^{-1}$	$\tan^{-1}$	$\cot^{-1}$	$\sec^{-1}$	cosec^{-1}
$\sin^{-1}x=$	x	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$
$\cos^{-1}x=$	$\sqrt{(1-x^2)}$	x	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$
$\tan^{-1}x=$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$
$\cot^{-1}x=$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$	$\sqrt{(1+x^2)}$
$\sec^{-1}x=$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	x	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$
$\mathrm{cosec}^{-1}x=$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	x

雙曲線函數相互之關係

	$\sin\mathrm{h}u=x$	$\cos\mathrm{h}u=x$	$\tan\mathrm{h}u=x$	$\cot\mathrm{h}u=x$	$\sec\mathrm{h}u=x$	$\mathrm{cosec}\,\mathrm{h}u=x$
$\sin\mathrm{h}u=$	x	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\cos\mathrm{h}u=$	$\sqrt{(1+x^2)}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}$
$\tan\mathrm{h}u=$	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$
$\cot\mathrm{h}u=$	$\frac{\sqrt{(x^2+1)}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$\sqrt{(1+x^2)}$
$\sec\mathrm{h}u=$	$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{(1-x^2)}$	$\frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$
$\mathrm{cosec}\,\mathrm{h}u=$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$	$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$	$\sqrt{(x^2-1)}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$	x

三角函數之符號及變化

象限 函數	第一		第二		第三		第四	
正弦	正	由 0 至 1	正	由 1 至 0	負	由 0 至 -1	負	由 -1 至 0
餘割		由 ∞ 至 1		由 1 至 ∞		由 -∞ 至 -1		由 -1 至 -∞
餘弦	正	由 1 至 0	負	由 0 至 -1	負	由 -1 至 0	正	由 0 至 1
正割		由 1 至 ∞		負 -∞ 至 -1		由 -1 至 -∞		由 ∞ 至 1
正切	正	由 0 至 ∞	負	由 -∞ 至 0	正	由 0 至 ∞	負	由 -∞ 至 0
餘切		由 ∞ 至 0		由 0 至 -∞		由 ∞ 至 0		由 0 至 -∞

三角函數大小

度 函數	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	度 函數
sin.	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	正弦
cos.	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	餘弦
tan.	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	正切
cot.	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	餘切
sec.	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	正割
cosec.	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	餘割

目　次

卷首 (1)—(12)

I. 三角法公式集(平面) …(1)

II. 三角法公式集(球面) …(6)

III. 三角法諸表 ……………(8)

第一門　平面三角法解法之部 ……………1—604

第一節　測角法 …………1—13

I. 六十分法及百分法………1—6

II. 弧度法 ……………6—10

III. 雜題 ……………10—13

第二節　銳角之三角函數 ……………13—52

I. 關於定義之問題………13—17

II. 餘角之三角函數………17—18

III. 恆等式……………18—34

IV. 由一巳知函數求其餘函數之問題……………34—39

V. 關於特別角之問題……39—44

VI. 關於特別角之問題中有餘角之關係者……………44—46

VII. 雜題……………46—52

第三節　普偏角 ………52—75

I. 代數符號之適用………52—71

II. 角之普偏值之公式……71—75

第四節　和及差之公式 ……………75—189

I. 和及差之正弦餘弦……75—89

II. 和及差之正切餘切……90—94

III. 倍角 ……………94—109

IV. 積及和之變形………109—130

V. 分角……………130—141

VI. 特別角……………141—149

VII. 雜題……………149—189

(1) 和及差之正弦餘弦 149—155

(2) 和及差之正切餘切 155—157

(3) 倍角……………157—175

(4) 積及和之變形……175—186

(5) 分角及特別角……186—189

第五節　三角形之性質……………189—300

I. 三角形中三角之關係 189—208

II. 恆等式(各角有限制者)……………208—215

III. 直角三角形之性質…215—218

IV. 任意之三角形………218—252

V. 三角形之內切圓外接圓面積等……………252—300

等六節　對數…………300—336

I. 表之構成……………300—304

II. 對數及對數級數……304—313

III. 表之用法……………313—328

(1) 對數表三角函數表 313—319

(2) 三角函數表用法之問題……………319—320

(3) 五位對數表之問題 ……321

(4) 七位對數表之問題 321—325

(5) 五位三角函數之對數表問題……………325—326

(6) 七位三角函數之對數表問題……………326—328

IV. 論比例部分…………328—336

第七節　三角形 ……336—434

I. 論直角三角形之解法 336—338

II. 論斜三角形之解法…338—351

III. 直角三角形之解法…351—358

(1) 不用對數者………351—356

(2) 五位對數…………356—357

(3) 七位對數…………357—358

IV. 斜三角形之解法 ……358—376

(1) 不用對數者………358—362

(2) 五位對數…………362—365

(3) 七位對數…………365—376

V. 複雜之解法…………376—383

VI. 測量應用……………384—434

(1) 理論……………384—411

(2) 用三表函數表者…411—414

(3) 單含已知三角函數者………………………………414—426
(4) 用五位對數表者…426—430
(5) 用四位或六位對數表者………………………………430—432
(6) 用七位對數表者…432—434

第八節 逆三角函數 434—448
I. 證明問題………………434—445
II. 方程式………………445—448

第九節 方程式 ……448—477
I. 角有限制者…………448—453
II. 角無限制者…………453—477

第十節 消去法 ……477—492

第十一節 ……………………492—511
I. 值之變化及極限……492—499
II. 不等式………………499—502
III. 極大極小……………502—511

第十二節 ……………………511—516
I. 對稱式………………511—512
II. 交代式………………512—513
III. 代數學及三角法中之公式之變換………………513—514
IV. 用輔角之方程式解法 514—516

第十三節 De Moivre 氏定理……………………516—522

第十四節 三角函數之展開式……………………522—526

第十五節 餘弦及正弦之指數值 ……………526—529

第十六節 級數之和 …530—534

第十七節 三角函數式之因數分解…………534—544

第十八節 雙曲線函數 544—554

第十九節 平面三角法雜題……………………………554—604
I. 第一至第四節………554—567
(1) 測角法………………554—557
(2) 銳角之三角函數…557—562
(3) 普徧角………………562—563
(4) 和及差之公式……563—567
II. 第五至第七節………567—598
(1) 三角形之性質……567—573
(2) 函數及對數………573—575
(3) 解法及測量………575—598
III. 第八至第十二節……598—604

第二門 球面三角法解法之部…………………………605—677

第一節 球面三角形之邊與角之關係…605—615

第二節 球面直角三角形之解法…………615—622

第三節 球面斜三角形之解法 ……………623—630

第四節 內切圓外接圓等…………………………630—634

第五節 球面三角形之面積及過剩 ……634—639

第六節 近似公式 …639—643

第七節 測地術之問題 ……………………………643—645

第八節 球面三角形邊角之小變差 ……645—647

第九節 平面及球面三角法公式之聯結…………………………………648—656

第十節 多面體 ……656—662

第十一節 球面上之弧 662—666

第十二節 雜題…………666—673

第十三節 球面三角形解法之應用…………673—677

第三門 名詞之部…………679—690

第四門 三角法小史 ……695—709
I. 總論 ……………………………695
II. 第一期………………695—700
III. 第二期………………700—704
IV. 第三期………………704—709

附錄 英漢名詞對照表 …691—694

題解中心

三角法辭典

第一門　平面三角解法之部

第一節　測角法

I. 六十分法及百分法

1. 一任意角之度數用公制表示與用法制表示,其數的關係若何?

解 設一任意角之度數在公制爲 D, 在法制爲 G. 因公制一直角爲 90 度,故所設角與直角之比爲 $D/90$. 又因法制一直角爲 100 度,故所設角與直角之比爲 $G/100$. 因此, $\frac{D}{90}=\frac{G}{100}$, 故 $D=\frac{90}{100}G=\frac{9}{10}G=G-\frac{1}{10}G\cdots\cdots(1)$, 又 $G=\frac{100}{90}D=\frac{10}{9}D=D+\frac{1}{9}D\cdots\cdots(2)$. 據公式 (1), 由一任意角之法制度數,減其十分之一,則其所餘數卽此角之公制度數.據公式 (2), 由一任意角之公制度數,加其九分之一,則其和卽此角之法制度數.

2. 一任意角之分數用公制表示與用法制表示,其數的關係若何?

解 設一任意角之分數在公制爲 m, 在法制爲 μ. 因公制一直角爲 (90×60) 分,故所設角與直角之比,得以 $m/(90\times60)$ 表之.又因法制一直角爲 (100×100) 分,故所設角與直角之比,又得以 $\mu/(100\times100)$ 表之.由是可知, $\frac{m}{90\times60}=\frac{\mu}{100\times100}$, 故 $m=\frac{9\times6}{10\times10}\mu=\frac{27}{50}\mu$, 又 $\mu=\frac{50}{27}m$.

3. 一任意角之秒數用公制表示與用法制表示,其數的關係若何?

解 設一任意角之秒數在公制爲 s, 在法制爲 σ, 則與前題同理,

$$\frac{s}{90\times60\times60}=\frac{\sigma}{100\times100\times100},$$

故 $$s=\frac{81}{250}\sigma,\quad \sigma=\frac{250}{81}s.$$

4. 直角之二分之一,三分之一,四分之一,五分之一,六分之一,分別爲幾度?

解 直角爲 $90°$, 故其二分之一, 三分之一,四分之一, 五分之一, 六分之一分別爲 $90°\times\frac{1}{2}=45°$, $90°\times\frac{1}{3}=30°$, $90°\times\frac{1}{4}=22.5°$, $90°\times\frac{1}{5}=18°$, $90°\times\frac{1}{6}=15°$.

5. 一直角之六十分之十一爲幾度?

解 一直角爲$90°$,故所求度數爲 $90°\times\frac{11}{60}=16.5°$.