"十一五"国家重点图书出版规划项目

9

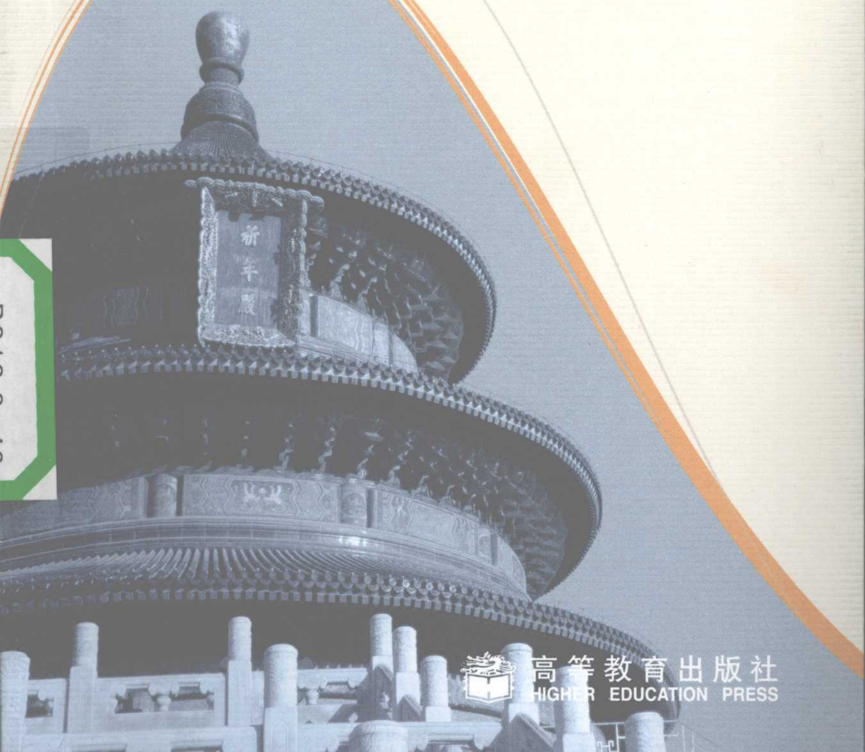
数学文化小丛书

李大潜 主编

数学中之类比

——一种富有创造性的推理方法

王培甫



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

"十一五"国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜 主编

数学中之类比

——一种富有创造性的推理方法

王培甫

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学中之类比：一种富有创造性的推理方法/王培甫. —北京：高等教育出版社，2008.11
(数学文化小丛书/李大潜主编)
ISBN 978-7-04-024360-4

Ⅰ. 数… Ⅱ. 王… Ⅲ. 类比-普及读物 Ⅳ. B812.3-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 140391 号

策划编辑 李 蕊 **责任编辑** 崔梅萍
封面设计 王凌波 **责任绘图** 杜晓丹
版式设计 王艳红 **责任校对** 王效珍
责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800－810－0598
		网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
总　　机	010－58581000	**网上订购**	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司		
开　　本	787×960　1/32	**版　　次**	2008 年 11 月第 1 版
印　　张	3.625	**印　　次**	2008 年 11 月第 1 次印刷
字　　数	65 000	**定　　价**	10.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　24360－00

数学文化小丛书编委会

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多,更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有

专长的学者执笔, 抓住主要的线索和本质的内容, 由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长, 并相对独立, 以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则, 有的专题单独成册, 有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书, 走近数学、品味数学和理解数学, 充分感受数学文化的魅力和作用, 进一步打开视野, 启迪心智, 在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005 年 12 月

目　录

一、引　　言

我珍视类比胜过任何东西，它是我最可信的老师，它能揭示自然界的秘密，在几何学中，它应该说是最不容忽视的.

—— 开普勒

大家一定知道在平面几何里，三角形面积等于底与高乘积的一半 (如图 1 中的 $\frac{1}{2}a \cdot h$)，那么请大家估计一下在立体几何中四面体的体积公式可能是什么?

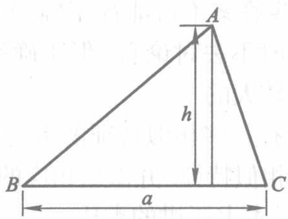


图 1

由于三角形由平面上三条线段围成，四面体由

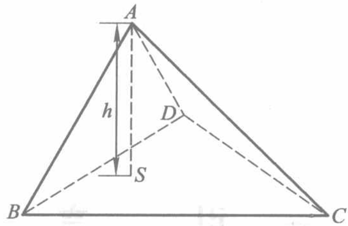


图 2

空间四个三角形围成, 它们的组成很“相似”, 因此, 四面体的体积公式与三角形的面积公式可能有某种类同的结构. 但三角形是平面图形, 四面体是空间图形, 它们又存在区别, 因此四面体的体积公式与三角形的面积公式间还可能存在差异, 于是各种不同的估计就产生了,

$$V=\frac{1}{2}Sh, V=\frac{1}{3}Sh, V=\frac{1}{4}Sh, \cdots\cdots$$

式中 V, S, h 分别表示四面体的体积、底面积与高, 见图 2.

当然, 这些答案不可能都正确, 也许全不正确, 这一点我们暂时不去讨论它, 但正确答案落在这里面的概率是比较大的.

从两种具有某些相似特征的事物中, 发现它们之间的另一些相似特征, 并做出相应的判断, 这种思维的方法, 就是本书所讲的类比.

“类比”一词源于希腊文“$\alpha\nu\alpha\lambda o\gamma\iota\kappa\acute{\epsilon}\zeta$”, 含有“比例”的意思, 当然这里所指的比例不是简单的 $1:2=3:6$ 中的比例, 而是相关事物之间的某些相似

关系的迁移, 是自然界与人类社会内部互相联系的一种反映.

由上可见, 类比推理中的“相似”不是一个严密的概念, 每一个人都可以有自己对“相似”的理解, 并确定自己推理的方向, 得出相应的推理结果. 因此, 类比推理是一种很自由的、生动活泼的思维方式, 它帮助不少科学家继往开来, 推陈出新, 找到自己的研究方向, 获得许多美丽的成果.

当然, 类比仅是一种或然推理, 它的每一个结果, 严格来讲应该叫做合理猜想, 可能是正确的, 也可能是不正确的, 还必须用逻辑方法给予严格证明, 或经过多次实践检验, 方能确认.

下面我们通过一些典型的例子来介绍类比方法在数学中应用的一些结果, 以及获得这些结果的思维过程, 以便帮助读者熟悉这种有用的数学方法.

二、从勾股定理谈起

勾股定理是数学中最古老、最有用的定理之一，其内容是:

“直角三角形的两条直角边的平方和等于它的斜边的平方.”

勾股定理的一个等价命题是:

“长方形两条相邻边的平方和等于它的一条对角线的平方.”

据我国现存的一部最古老的数学典籍《周髀算经》记载，公元前一千一百多年，我国数学家商高与周公的对话中就明确地提出“勾三股四弦五”这一重要的数量关系，书中还记有“… 勾股各自乘，并而开方除之，得邪 …”这是勾股定理的一般形式在我国的最早记载，可惜没有理论上的证明. 至魏晋时代的赵爽 (公元 3—4 世纪) 对《周髀算经》作注时，利用弦图 (图 3) 做出了我国对勾股定理的最早证明. 他的证法很简明，由图 3 所示的字母及图形的面积关系，有

$$c^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + (a-b)^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

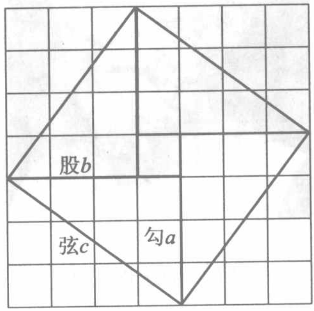


图 3

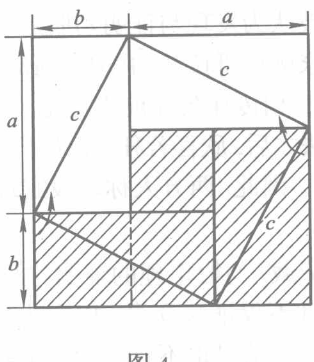


图 4

如果你关注一下赵爽弦图 (图 4) 中的两个方块 a^2 和 b^2 (阴影部分), 及图形变化的箭头, 那么勾股定理 $a^2 + b^2 = c^2$ 的证明更一目了然了. 所以大家

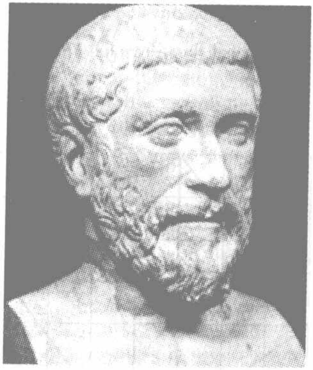


图 5　毕达哥拉斯

一致认为赵爽的弦图是一篇极有价值的数学历史文献.

在国外被认为发现与证明勾股定理的第一人是希腊大数学家毕达哥拉斯 (Pythagoras, 约前 569 —— 约前 475). 相传在公元前六世纪, 当他找到勾股定理证明方法之后, 欣喜若狂, 宰杀了一百头牛来祭神, 以示庆贺. 因此, 西方人称勾股定理为毕达哥拉斯定理.

据资料记载, 勾股定理的证明方法多达 360 余种. 勾股定理不仅证法众多, 以它为出发点, 应用类比方法推得的结果也不计其数. 如果把勾股定理比喻成树干, 由它推出的结果比喻成树枝与树叶, 那么, 这棵大树真的可称得上枝繁叶茂了. 下面, 我们将从勾股定理出发, 运用类比, 由近及远地介绍一些由勾股定理推导出的结果, 来观赏一下这棵大树的

美丽景色.

首先把直角三角形与斜三角形去类比.

类比推理 2.1 (三角形的余弦定理) 设斜三角形 ABC 中, $\angle A,\angle B$ 及 $\angle C$ 的对边分别为 a,b 及 c, 则有

$$\boxed{\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A,\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B,\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{aligned}}$$

证明 如图 6, 设 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 为锐角, 作 $CD\perp AB$ 于点 D, 则根据勾股定理有

$$\begin{aligned} a^2-b^2&=BD^2-AD^2\\ &=(BD+AD)(BD-AD)\\ &=c(c-2AD)\\ &=c^2-2cAD\\ &=c^2-2bc\cos A,\end{aligned}$$

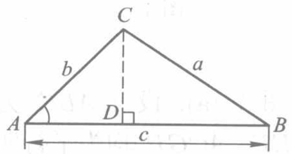


图 6

所以

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

同理可证, 当 A 为钝角时 (此时 $\cos A < 0$) 上述表达式也成立, 其他两式也一样. □

类比推理 2.2 (巴普士定理) 分别以任意三角形的每一边为边各作一个平行四边形, 第一个平行四边形位于三角形的内侧, 且其两个顶点位于三角形之外, 另外两个平行四边形位于该三角形的外侧, 且它们的对边分别过第一个平行四边形的两个顶点, 则第一个平行四边形的面积恰等于另外两个平行四边形的面积之和.

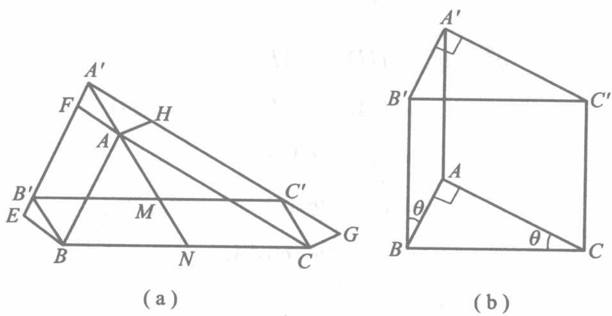


图 7

证明 如图 7 (a), 设 $\triangle ABC$ 为任意三角形, $BCC'B'$、$ABEF$、$ACGH$ 均为平行四边形, 且 EF 过 B'、GH 过 C'. 设 EF 与 GH 延长相交于 A' 点, 连 $A'A$ 延长交 $B'C'$ 于 M 点, 交 BC 于 N 点. 则易证

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.(\text{a.s.a})$$

所以

$$AB = A'B', AB//A'B',$$

即 $ABB'A'$ 是平行四边形; 同理 $ACC'A'$ 也是平行四边形. 所以

$$AA' = B'B = MN = C'C.$$

由此可得

$$S_{\square BB'A'A} = S_{\square BB'MN},\text{①}$$

$$S_{\square CC'A'A} = S_{\square CC'MN}.$$

容易看出

$$S_{\square ABEF} = S_{\square ABB'A'},$$

$$S_{\square ACGH} = S_{\square ACC'A'}.$$

所以

$$\begin{aligned} & S_{\square ABEF} + S_{\square ACGH} \\ = & S_{\square ABB'A'} + S_{\square ACC'A'} \\ = & S_{\square BB'MN} + S_{\square CC'MN} \\ = & S_{\square BB'C'C}. \end{aligned}$$

显然, 如图 7 (b), 若把 $\triangle ABC$ 中的角 A 取为直角, 取 $BCC'B'$ 为正方形, 作 $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$, 连

① 这里 S 表示面积, 如 $S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积, $S_{\square BB'AA'}$ 表示 $\square BB'AA'$ 的面积, 以后均是如此, 不再说明.

AA', 则容易证明, 四边形 $BB'A'A$ 及四边形 $CC'A'A$ 均为平行四边形, 且平行四边形 $BB'A'A$、$CC'A'A$ 与正方形 $BB'C'C$ 符合巴普士定理的条件. 从而有

$$S_{\square BB'A'A} + S_{\square CC'A'A} = S_{\square BB'C'C}.$$

设 $BC = a, AB = c, AC = b, \angle ACB = \angle ABB' = \theta$. 则有

$$ca\sin\theta + ba\cos\theta = a^2,$$

即

$$c^2 + b^2 = a^2.$$

这就是勾股定理.

因此, 巴普士定理是勾股定理的另外一种形式的推广, 它是由古希腊数学家巴普士 (Pappus, 约 300 年) 收录在他的著作《数学汇编》第四卷之中, 故称巴普士定理. □

把空间的长方体与平面上的矩形作类比.

类比推理 2.3 长方体过同一顶点的三条棱长的平方和等于该长方体的一条对角线的平方.

证明 如图 8, 设 $ABCD-A'B'C'D'$ 是长方体, 则由勾股定理得

$$\begin{aligned}AC'^2 &= AC^2 + CC'^2\\ &= AB^2 + BC^2 + CC'^2\\ &= AB^2 + AD^2 + AA'^2.\end{aligned}$$