探究课堂

主体探究

学习方略

十五规划教育部重点课题
实施研究性学习专题研究课题组 编著

高中新课程

数学

配人教B版 必修5

科学理念

全新思维

启迪智能

开阔视野

百战百胜

山东教育出版社

出版说明

CHU BAN SHUO MING

国家教育大纲(纲要)是教育工作的"准宪法",也是这套丛书所有作者的共同信条。我国新课改纲要以及新课标,不仅对课程、教法,而且对考试(包括中考、高考)都揭示了改革方向以及最终要达到的目标。新课改大力推进以培养创新精神和实践能力为主的素质教育,以让学生更多地在探究中学习,在实践中学习,扭转长期以来教学脱离科研实际和社会实践的局面,并大力提倡学生自主学习、合作学习、以学习者为中心的现代教学理念。新课改精神和新课标,是策划编写本丛书的出发点,又是归宿。因此,编者树立了新的编写理念,确定了新的编写目标,选择了新的编写视角,采取了新的编写方法。

除了上述"四新"以外,本丛书还有"六个特点":

1. 编写宗旨——改变学生的学习方式。

即从根本上改变以接受知识为主的传统学习方式。

2. 推进以探究为主的多元学习方式。

多元学习包括探究的、实践的、合作的、自学的、接受的学习。探究既是科学的操作方式,又是科学的本质。科学学习和科学探究过程的不分离,越来越被视为学生掌握完整的知识,培养各种能力和优良品质品德的最佳途径。

3. 贯彻"以学习者为中心"理念。

本丛书以学生为直接的读者对象,为学生课内外探究实践、自学、合作、备考、应考提供最好的"援助"。

4. 紧扣新课标新教材的每章节、每节课的教学任务。

本丛书既是最好的学生用书,又是最好的教师用书。

5. 以多种精彩的学习范例启导学生。

范例的示范、启导作用无可估量,远远胜于直接传授。

6. 提出大量探究题和训练题,充分发扬传统教学"精讲多练"等优良传统。

尽可能地增加学生自主地探究、拓展、巩固知识和技能的契机。

本丛书作为全国教育科学"十五"规划重点课题"实施研究性学习专题研究"科研成果的重大推广项目,遵循从教学第一线中来到教学第一线中去的思路。课题组长崔相录研究员,十多年来潜心从事有关素质教育和探究教学的开创性研究工作。本丛书编写工作严格执行专家——教研员——第一线教师三结合原则。所有的作者,都是多年来接受过有关培训,在实验和实践研究中涌现出来的探究学习专才。

我们相信和期待,本丛书能够引领数以万计的中学生和教师走进充满生机的探究世界,踏上从根本上改变学习方式和教学方式、全面提高学习和教学质量的征程。

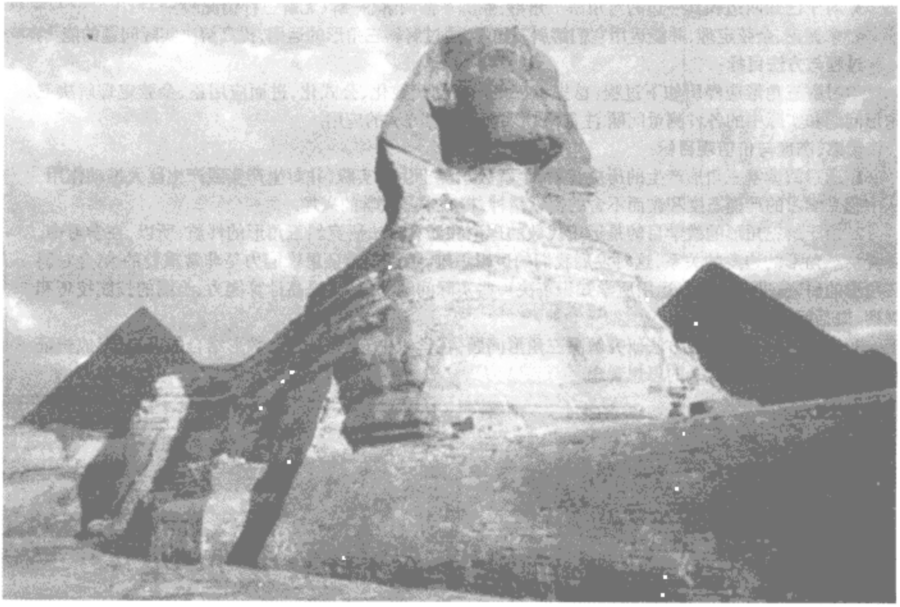
总主编

2009 年 1 月

目　　录

第一章

解三角形



随着神六、神七成功地遨游太空，我国又制定了登月计划.在我国古代就有嫦娥奔月的神话故事，明月高悬，我们仰望夜空，会有无限遐想，不禁会问：遥不可及的月亮离地球有多远?

早在1671年，两位法国天文学家就测出了地球和月球之间的距离大约为385400 km，他们是怎样测出两者之间的距离的呢?

在数学发展史上，受到天文测量、航海测量和地理测量等方面的推动，解三角形的理论得到不断发展，被用于解决许多测量问题.

有许多测量问题仅用初中学过的锐角三角函数是不够的，例如：

1. 怎样在航行途中测量海上两个岛屿之间的距离?
2. 怎样测量底部不能到达的建筑物的高度?
3. 怎样在水平飞行的飞机上测量飞机下方山顶的海拔高度?
4. 怎样测出海上航行的轮船的速度和航向?

在本章中，我们要学习正弦定理和余弦定理，并学习应用这两个定理解三角形以及解决实际测量中的一些问题.

三维目标

知识与技能目标：

1. 通过对直角三角形的复习，弄清边和角的特殊关系.掌握一般三角形的边角关系.理解三角形的边和角是可以相互转化的.

2. 掌握正、余弦定理可以解决四类问题：已知三边；已知两边和它们的夹角；已知两角和任意一边；已知两边和一边的对角，解三角形.

3. 对于已知两边和其一边的对角解三角形，熟练掌握两解、一解、无解三种情况.

4. 掌握正、余弦定理，并能运用它们解斜三角形，通过解斜三角形的运用，提高解决实际问题的能力.

过程与方法目标：

学习解三角形应经历如下过程：首先将三角形问题代数化、公式化，进而应用正、余弦定理解决三角形问题和实际中的各种测量问题.注重“数形结合”思想方法的应用.

情感、态度与价值观目标：

1. 通过阅读解三角形产生的历史背景，了解数学源于生产实践，并对生产实践产生巨大推动作用，从中感受学习的严谨态度和锲而不舍的探索精神，提高学习数学的兴趣.

2. 由于解三角形的教学目的是运用代数的理论和计算方法研究斜三角形的性质，所以，在学习中，要弄清三角形的边角的关系，这对发展我们的逻辑思维，特别是辩证思维能力是非常重要的.结合对斜三角形的研究，进一步培养运用所学知识解决一些实际问题的能力，提高计算能力，绘图的技能技巧和观察、概括问题的能力.

3. 解三角形是用代数方法研究解决三角形问题，在学习中，要充分体会数形结合的思想，形成辩证唯物主义思想和对立统一的思想观念.

第一节　正弦定理和余弦定理

情景导入

我们知道，在任意三角形中有大边对大角，小边对小角的边角关系.类比直角三角形中的边和角的关系，你能探究出这个边、角关系准确量化的表示吗？

主题一　正弦定理

主题探究

[主题情景]

在任意三角形中，有大边对大角，小边对小角的边角关系，借助于直角三角形的边角关系，你能探究出任意三角形的边角的准确量化关系吗？

[知识填空]

1. 正弦定理的内容：在一个三角形中，各边和所对角的____________________相等.

2. 正弦定理的数学表达式：____.

3. 正弦定理的用途：

解决两类解三角形问题.

(1)已知___________和___________，求其他___________和___________.

(2)已知___________及___________，求另一边的对角及其他的边和角.

[问题导探]

问题 1：在$\triangle ABC$中，若$\angle ABC=30°$，$AB=4\sqrt{3}$，$AC=4$，求$\triangle ABC$的面积.

[我的探究]

专家导言

考查正弦定理、三角形面积公式等基础知识，还考查了数学的分类讨论思想.

问题 2：在$\triangle ABC$中，已知$a=8$，$B=60°$，$C=75°$，求A，b，c？

[我的探究]

专家导言

熟练运用正弦定理解三角形问题.

范例导析

根据数学高考的方向,利用正弦定理解三角形问题,将会与三角函数、数列、方程、向量等知识结合起来,尤其是与生活、生产、科学实际相结合,考查综合运用数学知识的能力.

例1:在$\triangle ABC$中,若$\angle B=30°$,$AB=2\sqrt{3}$,$AC=2$,则$\triangle ABC$的面积是________.

解答:由正弦定理得

$\sin C=\frac{AB\sin B}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because AB>AC$,

$\therefore C>B$,$\therefore C$有两解.

若C为锐角,则$C=60°$,$A=90°$,

由三角形面积公式得

$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=2\sqrt{3}$.

若C为钝角,则$C=120°$,$A=30°$,

故$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\sqrt{3}$.

答案为:$2\sqrt{3}$或$\sqrt{3}$.

导析:本题涉及正弦定理、三角形面积公式等基础知识,考查了数学中的分类讨论思想.

例2:在$\triangle ABC$中,已知$b=\sqrt{2}$,$c=1$,$B=45°$,求a,A,C.

解答:$\because b=\sqrt{2}$,$c=1$,$B=45°$,

由正弦定理得

$\sin C=\frac{c\cdot\sin B}{b}=\frac{1\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

由$b>c$,$B=45°$,可知$B>C$,$\therefore C=30°$.

又$A+B+C=180°$,$\therefore A=105°$,

再由正弦定理有

$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 105°}{\sin 45°}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

导析:此类型三角形解的问题,利用正弦定理来解决,需注意解的个数的判定;由以上可以看出利用正弦定理可解决两边及其一边对角(需讨论)及两角及其一边的三角形解的问题.

例3:在$\triangle ABC$中,a,b,c分别表示$\angle A,B,\angle C$所对边长,若$a=2b\cos C$,判断$\triangle ABC$的形状.

解答:由正弦定理知$a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\cos C$,得

$\sin A=2\sin B\cos C$.

又$A=\pi-(B+C)$,

$\therefore\sin(B+C)=2\sin B\cos C$,

得$\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\cos C$,

得$\sin(B-C)=0$.

又B,C为三角形的内角,有$B-C=0$,

$\therefore B=C$,

故$\triangle ABC$为等腰三角形.

导析:判断三角形形状问题一般有两种思路:

(1)利用正弦定理将角转化为边的关系;

(2)利用正弦定理将边转化为角的关系.

例4:$\triangle ABC$中,已知$B=30°$,$c=12$,$b=2m$.

(1)当$m=3,4,6,8$时,分别求角C;

(2)当$m=3$或6时,求a.

解答:$\because\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

$\therefore\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{12\sin 30°}{2m}=\frac{3}{m}$.

(1)当$m=3$时,$\sin C=1$,$\therefore C=90°$;

当$m=4$时,$\sin C=\frac{3}{4}$,

$\because c\sin B<2m<c$,

$\therefore C=\arcsin\frac{3}{4}$或$C=\pi-\arcsin\frac{3}{4}$;

当$m=6$时,$b=c$,$\sin C=\frac{1}{2}$,$\therefore C=30°$;

当$m=8$时,$b>c$,$\sin C=\frac{3}{8}$,$\therefore C=\arcsin\frac{3}{8}$.

(2)当$m=3$时,$C=90°$,

$\therefore a=\sqrt{c^2-b^2}=6\sqrt{3}$;

当$m=6$时,$C=30°$,则$A=180°-30°=120°$.

$\because\frac{a}{\sin 120°}=\frac{c}{\sin C}=\frac{12}{\sin 30°}$

$\therefore a=24\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$.

导析:已知三角形两边与一边的对角,解三角形宜用正弦定理,特别应注意根据题设条件,结合图形进行分类讨论.

学能导航

[要点剖析]

本主题研究了正弦定理及其应用,要掌握正弦定理的公式的结构特征.利用正弦定理可以解决已知两角及一边和已知两边及一边的对角的三角形问题,注意后者的多解性.

重点是利用正弦定理解三角形,难点是对已知两边及其一边的对角的解三角形的讨论.

[方法点评]

1. 正弦定理给出了任意三角形的边角关系,该公式具备简谐美和对称美;
2. 利用正弦定理解决已知两边及一边的对角的三角形问题,要注意其多解性;
3. 利用正弦定理可以将边的关系转化为角的关系,也可以将角的关系转化为边的关系.

知能导练

一.选择题

1. 根据下列条件,确定$\triangle ABC$有两解的是　(　　)

A. $a=18$　$b=20$　$A=120°$

B. $a=60$　$c=48$　$b=60°$

C. $a=3$　$b=6$　$A=30°$

D. $a=14$　$b=16$　$A=45°$

2. 在$\triangle ABC$中,若$b=2a\sin B$,则A等于　(　　)

A. 30°或60°　B. 45°或60°

C. 120°或60°　D. 30°或150°

3. 在$\triangle ABC$中,若$a\cos A=b\cos B$,则此三角形一定是　(　　)

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

二.填空题

4. 在$\triangle ABC$中,满足$A=45°$,$c=\sqrt{6}$,$a=2$的$\triangle ABC$的个数记为m,则a^m的值为______.

5. 在$\triangle ABC$中,$\lg(\sin A+\sin C)=2\lg\sin B-\lg(\sin C-\sin A)$,则$\triangle ABC$的形状是__________.

6. 在$\triangle ABC$中,$\angle A$满足$\sqrt{3}\sin A+\cos A=1$,$AB=2$ cm,$BC=2\sqrt{3}$ cm,则$\angle A=$______,$\triangle ABC$的面积等于______cm^2.

三.解答题

7. 在$\triangle ABC$中,已知$a=2\sqrt{2}$,$b=2\sqrt{3}$,$A=45°$,求c,B,C.

8. 在$\triangle ABC$中,$\tan A=\dfrac{1}{4}$,$\tan B=\dfrac{3}{5}$.

(1)求C的大小;

(2)若$\triangle ABC$最大边的边长为$\sqrt{17}$,求最小边的边长.

拓展导思

[问题探究 1]在△ABC中，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$C=30°$.求 $a+b$ 的最大值.

[问题探究 2]在△ABC中，$\angle A=60°$，$\angle B=45°$，且三角形一边的长为 m，解此三角形.

主题二 余弦定理

主题探究

[主题情景]

如果已知一个三角形的两边及其所夹的角，由三角形全等的判定方法，这个三角形是大小、形状完全确定的三角形.你能根据直角三角形中已知两条直角边求斜边的方法，探究任意三角形中已知两边及其夹角，求出第三边的方法吗?

[知识填空]

1. 余弦定理的内容：三角形任意一边的＿＿＿＿＿＿等于其他两边的＿＿＿＿＿＿和，减去这两边与它们夹角的＿＿＿＿＿＿的两倍；

2. 余弦定理公式的表达：

第一种形式：$a^2=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿；

$b^2=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿；

$c^2=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

第二种形式：$\cos A=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿；

$\cos B=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿；

$\cos C=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

3. 余弦定理的用途：

解决两类三角形问题：

(1)已知＿＿＿＿＿＿＿＿求＿＿＿＿＿＿＿＿；

(2)已知＿＿＿＿＿＿＿＿求＿＿＿＿＿＿＿＿.

[问题导探]

问题 1：在$\triangle ABC$中，已知$a=2\sqrt{6}$，$b=6+2\sqrt{3}$，$c=4\sqrt{3}$，求A，B，C.

[我的探究]

专家导言

(1)已知三边，解三角形可用余弦定理；

(2)使用余弦定理，求角时，一般在判断三边大小后，先求最大角(或最小角)，再求其他角.

问题 2：在$\triangle ABC$中，$A=120°$，$b=3$，$c=5$，求(1)$\sin B\sin C$；(2)$\sin B+\sin C$.

[我的探究]

专家导言

(1)已知两边及夹角的三角形解的问题可应用余弦定理；

(2)注意正余弦定理的综合应用.

范例导析

根据数学高考的方向,利用余弦定理解斜三角形问题将会与三角函数、数列、方程、向量等知识结合起来,特别是与生产生活实际相结合,考查我们综合运用数学知识的能力.

例 1:在$\triangle ABC$中,若$\angle A=120°$,$AB=5$,$BC=7$.则$AC=$______.

例 1 图

解答:由余弦定理得

$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos120°$,

即$49=AC^2+25+5AC$,

解得$AC=3$或$AC=-8$(舍去),

故$AC=3$.

导析:本题考查利用余弦定理解决已知两边及其一边的对角的三角形问题,注意要将增根舍去.

例 2:$\triangle ABC$中,a,b,c分别为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边,如果a,b,c成等差数列,$\angle B=30°$,$\triangle ABC$的面积为$\frac{3}{2}$,那么b等于 ( )

A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ B. $1+\sqrt{3}$

C. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ D. $2+\sqrt{3}$

解答:在$\triangle ABC$中,

$\because a,b,c$成等差数列,

$\therefore 2b=a+c$,平方得$a^2+c^2=4b^2-2ac$.

又由于$\angle B=30°$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B=\frac{1}{2}ac\cdot\sin30°=\frac{3}{2}$,

$\therefore ac=6$,

$\therefore a^2+c^2=4b^2-12$,

由$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{b^2-4}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore b=1+\sqrt{3}$.

答案:B.

导析:要注意三角形知识的综合应用.

例 3:在$\triangle ABC$中,若$\sin A:\sin B:\sin C=3:2:4$,则$\cos C$的值为 ( )

A. $-\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}$

C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

解答:由正弦定理知

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:2:4$.

设$a=3k,b=2k,c=4k$,k是不为零的常数.

据余弦定理得

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{9k^2+4k^2-16k^2}{2\times3k\times2k}=-\frac{1}{4}$,故选 A.

导析:要注意正、余弦定理的综合应用.

例 4:若$\triangle ABC$的三个内角成等差数列,同时三边成等比数列,确定$\triangle ABC$的形状.

解答:法一:设A、B、C三个内角成等差数列,且$A\leqslant B\leqslant C$,则

$2B=A+C$,又$A+B+C=180°$,$\therefore B=60°$.

又$\because A\leqslant B\leqslant C$,$\therefore a\leqslant b\leqslant c$,

又已知a,b,c成等比数列,$\therefore b^2=ac$,

由余弦定理,得

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,即$\frac{1}{2}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}$

$\therefore (a-c)^2=0$,$\therefore a=c$,

因此$\triangle ABC$为等边三角形.

法二:由解法一的结论$B=60°$,$b^2=ac$.

由正弦定理$a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$代入到$b^2=ac$中,得

$\sin^2B=\sin A\cdot\sin C$,

$\therefore \sin A\sin C=\frac{3}{4}$.

又$A+C=180°-B=120°$,

$\therefore \cos(A+C)=\cos120°=-\frac{1}{2}$,

$\therefore \cos A\cos C-\sin A\sin C=-\frac{1}{2}$,

$\therefore \cos A\cos C=\frac{1}{4}$,

$\therefore \cos(A-C)=\cos A\cos C+\sin A\sin C=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$,

$\therefore A-C=0$,$\therefore A=C$,

$\therefore A=B=C$,

故$\triangle ABC$为等边三角形.

导析:应用正、余弦定理时,灵活将边和角相互转化.

学能导航

[要点剖析]

本主题研究了余弦定理及其应用，要掌握余弦定理的公式特征，熟练运用余弦定理解决已知两边及其夹角和已知三边，求三角形其他的边和角，同时还要将余弦定理与正弦定理结合起来进行综合应用.

重点是利用余弦定理解三角形，难点是正、余弦定理的综合应用.

[方法点评]

在三角形中，已知三边，先用余弦定理求出两个角后，再由三角形内角和定理求第三个角；已知两边和它们的夹角，先求出第三边，然后再用余弦定理求另一个角，继而得到第三个角.

知能导练

一.选择题

1. 在$\triangle ABC$中，已知$b=a\sin C$，$c=a\cos B$，则$\triangle ABC$一定是（　　）

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等边三角形　　D. 等腰直角三角形

2. 在$\triangle ABC$中，如果$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，那么$\angle A$等于（　　）

A. 30°　　B. 60°

C. 120°　　D. 150°

3. $\triangle ABC$的对边分别为a,b,c，且$a=1,B=45^\circ,S_{\triangle ABC}=2$，则$\triangle ABC$外接圆直径为（　　）

A. $4\sqrt{3}$　　B. 5

C. $5\sqrt{2}$　　D. $6\sqrt{2}$

二.填空题

4. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=60^\circ,b=1,S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，则$\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$=________.

5. 在$\triangle ABC$中，已知$a-b=4,a+c=2b$，且最大角为120°，则这个三角形的最长边等于________.

6. 等腰三角形的底边为a，腰长为$2a$，则腰上的中线长等于________.

三.解答题

7. 在$\triangle ABC$中，$\angle A,\angle B,\angle C$所对的边长分别为$a,b,c$，设$a,b,c$满足条件$b^2+c^2-bc=a^2$和$\dfrac{c}{b}=\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}$，求$\angle A$和$\tan B$.

8. 在$\triangle ABC$中，a,b,c分别是A,B,C的对边，且$\dfrac{\cos B}{\cos C}=-\dfrac{b}{2a+c}$.

(1)求角B的大小；

(2)若$b=\sqrt{13}$，$a+c=4$，求a的值.

拓展导思

[问题探究 1]在△ABC中,A,B,C的对边分别为a,b,c,$\tan C=3\sqrt{7}$.

(1)求$\cos C$;

(2)若$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{5}{2}$,且$a+b=9$,求$c$.

[问题探究 2]设△ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,且$A=60°$,$c=3b$.

求:(1)$\frac{a}{c}$的值;

(2)$\cot B+\cot C$的值.

主题三 解三角形

主题探究

[主题情景]

我们学习了正弦定理和余弦定理,你能根据给出的条件灵活运用正、余弦定理解三角形吗?

[知识填空]

1. 解三角形的几种类型

已知元素	求解步骤
一边和两角（设为 b,A,B）	(1) $C=$______； (2) $a=$______； (3) $c=$______．
两边及其夹角（设为 a,b,C）	(1) $c=$______； (2)由正弦定理或余弦定理，求 a,b 中较小边所对的锐角； (3)利用内角和定理求第三个角．
两边及其一边的对角（设为 a,b,A）	(1)先判定解的情况； (2)用正弦定理求 $\sin B=$______，即求 B； (3)由内角和定理 $C=$______，求 C； (4)由正弦定理或余弦定理求边 c．
三边 a,b,c	(1)根据余弦定理求最大边所对的角； (2)由正弦定理求其余两个锐角．

2. 已知两边及其一边的对角（设为 a,b,A）时，三角形解的情况

$A\geqslant 90°$	$A<90°$
$a>b$　B 是______	B 是锐角，有______解（解的个数）
$a=b$　______	B 是______有______解
$a<b$　______	$b>a>b\sin A$ 时，B 是______有______解 $a=b\sin A$ 时，B 是______有______解 $a<b\sin A$ 时，______解

3. 在解三角形中，正弦定理、余弦定理十分重要，但是还要注意三角形的其他知识的综合运用，例如：三角形内角和定理，大边对______，等边对______；两边之和大于______，两边之差______，三角形的面积公式等．

[问题导探]

问题 1：已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边，S 是 $\triangle ABC$ 的面积，$a=4$，$b=5$，$S=5\sqrt{3}$，求 c 的长度．

[我的探究]

专家导言

已知三角形面积和两边长求第三边长，主要考查：三角形面积公式，余弦定理．在解题时要注意角的范围，注重思维的全面性与严谨性．

问题 2：在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c．已知 $a^2+b^2-c^2=ab$，且 $\dfrac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}=\dfrac{c-b}{c}$．试判断 $\triangle ABC$ 的形状．

[我的探究]

专家导言

对于含边与三角函数的混合关系式，要统一形式，将边化为三角函数或将三角函数化为边，此时正、余弦定理起桥梁作用．

范例导析

正弦定理和余弦定理的每一个等式中都包含三角形的四个元素,如果其中三个元素是已知的(其中至少有一个元素是边),那么这个三角形一定可解;

正弦定理和余弦定理的特殊功能是边角互化,即利用它们可以把边的关系转化为角的关系,也可以把角的关系转化为边的关系,从而使许多问题得以解决;

判断三角形的形状,一般从两个方向进行变形,一个方向是边,走代数变形之路,通常正、余弦定理结合使用;另一个方向是角,走三角变形之路,通常运用正弦定理.

例1:在$\triangle ABC$中,$\angle A=45°$,$a=2$,$c=\sqrt{6}$,解此三角形.

解答:法一:由正弦定理得:$\sin C=\frac{\sqrt{6}}{2}\sin 45°$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because c\sin A=\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}$,

$a=2$,$c=\sqrt{6}$,$\sqrt{3}<2<\sqrt{6}$,

$\therefore$ 有两解,即$\angle C=60°$或$\angle C=120°$.

$\angle B=180°-60°-45°=75°$或$\angle B=180°-120°-45°=15°$.

由$b=\frac{a}{\sin A}\sin B$,得$b=\sqrt{3}+1$或$b=\sqrt{3}-1$.

故$b=\sqrt{3}+1$,$\angle C=60°$,$\angle B=75°$;

或$b=\sqrt{3}-1$,$\angle C=120°$,$\angle B=15°$.

法二:由余弦定理得

$b^2+\sqrt{6}^2-2\sqrt{6}\,b\cos 45°=4$,

$\therefore b^2-2\sqrt{3}\,b+2=0$.

解得$b=\sqrt{3}\pm 1$.

又$\sqrt{6}^2=b^2+2^2-2\cdot 2b\cos C$得

$\cos C=\pm\frac{1}{2}$,$\angle C=60°$或$\angle C=120°$.

所以$\angle B=75°$或$\angle B=15°$.

故$b=\sqrt{3}+1$,$\angle C=60°$,$\angle B=75°$;

或$b=\sqrt{3}-1$,$\angle C=120°$,$\angle B=15°$.

导析:本题解法说明能用正弦定理解的三角形,也可以用余弦定理去解;能用余弦定理解的三角形,也可以用正弦定理去解.

例2:在$\triangle ABC$中,$BC=a$,$AC=b$,且a,b是方程$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$的两根,$2\cos(A+B)=1$,求AB的长.

解答:$\because \cos(A+B)=\frac{1}{2}$,

$\therefore \cos C=\cos[\pi-(A+B)]$

$=-\cos(A+B)=-\frac{1}{2}$,又由题意知:

$a+b=2\sqrt{3}$,$ab=2$,

所以,由余弦定理得

$AB^2=b^2+a^2-2ab\cos C$

$=(a+b)^2-ab=10$,

$\therefore AB=\sqrt{10}$.

导析:注意整体思想在解题中的应用.

例3:设四边形$ABCD$中,$BC=a$,$DC=2a$,四个角A,B,C,D度数的比为3:7:4:10,求AB的长.

解答:设四个角A,B,C,D度数为$3x$,$7x$,$4x$,$10x$,则有$3x+7x+4x+10x=360°$,解得$x=15°$,

$\therefore A=45°$,$B=105°$,$C=60°$,$D=150°$.

连结BD,在$\triangle BCD$中,由余弦定理得:

$BD^2=BC^2+DC^2-2BC\cdot DC\cos C$

$=a^2+4a^2-2a\cdot 2a\cdot\frac{1}{2}=3a^2$,

$\therefore BD=\sqrt{3}\,a$.

这时$DC^2=BD^2+BC^2$,则$\triangle BCD$是以DC为斜边的直角三角形,

$\therefore \angle CDB=30°$,于是$\angle ADB=120°$.

在$\triangle ABD$中,由正弦定理有:

$AB=\frac{BD\cdot\sin\angle ADB}{\sin A}$

$=\frac{\sqrt{3}\,a\cdot\sin 120°}{\sin 45°}$

$=\frac{\sqrt{3}\,a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$,

$\therefore AB$的长为$\frac{3\sqrt{2}}{2}a$.

导析:正、余弦定理结合使用,更能发挥出两定理在解三角形中的作用.

例4:在任何两边都不相等的锐角$\triangle ABC$中,已知$2\sin^2 A-\cos 2A=2$.

(1)求$\angle A$的大小;

(2)设a,b,c为角A,B,C的对边,求证:$b+c<2a$.

解答:(1)$\because 2\sin^2 A-\cos 2A=2$,

$\therefore 2\sin^2 A-(1-2\sin^2 A)=2$,

$\therefore 4\sin^2 A=3$,即$\sin A=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为 A 为锐角三角形的内角，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即 $A=60°$.

(2)因为 $\triangle ABC$ 任何两边都不相等，所以 $b\neq c$.由余弦定理有

$\frac{1}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$，

$\therefore a^2=b^2+c^2-bc$.

又 $\because 4a^2-(b+c)^2$

$=4(b^2+c^2-bc)-b^2-c^2-2bc$

$=3(b-c)^2$，

$\because a,b,c$ 都不相等，

$\therefore (b-c)^2>0$，

$\therefore 2a>b+c$，即 $b+c<2a$.

导析：正、余弦定理经常和三角函数、不等式联合起来进行综合应用，要注重它们的联系.

学能导航

[要点剖析]

本主题研究了正弦定理、余弦定理及其应用，要掌握正、余弦定理的公式的结构特征，利用正、余弦定理可以解决已知两角及一边、已知两边及一边的对角、已知两边及夹角、已知三边的三角形问题，注意已知两边及一边的对角的多解性.

重点是综合利用正、余弦定理解三角形，难点是利用正弦定理对已知两边及其一边的对角的解三角形的讨论，此类型也可以用余弦定理解决.

[方法点评]

1. 正弦定理和余弦定理的每一个等式都包含三角形的四个元素，如果其中三个元素是已知的(其中至少有一个元素是边)，那么这个三角形一定可解；

2. 正弦定理和余弦定理的特殊功能是边角互化，即利用它们可以把边的关系转化为角的关系，也可以把角的关系转化为边的关系，从而使许多问题得以解决；

3. 判断三角形的形状，一般考虑从两个方向进行变形，一个方向是边，走代数变形之路，通常正、余弦定理结合使用；另一个方向是角，走三角变形之路，通常是运用正弦定理.正、余弦定理是边角转化的桥梁.

知能导练

一.选择题

1. 已知方程 $x^2\sin A+2x\sin B+\sin C=0$ 有重根，则 $\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 满足关系式　(　　)

A. $b=ac$　　B. $b^2=ac$

C. $a=b=c$　　D. $c=ab$

2. 锐角 $\triangle ABC$ 中，$b=1$，$c=2$，则 a 的取值范围是　(　　)

A. $1<a<3$　　B. $1<a<\sqrt{5}$

C. $\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$　　D. 不确定

3. 已知 $\triangle ABC$ 的面积 $S=6$，外接圆半径 $R=3$，内切圆的半径 $r=1$，则 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的值是　(　　)

A. 2　　B. 4

C. 6　　D. 不能确定

二.填空题

4. 已知 $\triangle ABC$ 中 $\angle A=60°$，且最大边与最小边是方程 $3x^2-27x+32=0$ 的两实根，那么 BC 边的长是________.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，三边 a,b,c 与面积 S 的关系式为 $a^2+4S=b^2+c^2$，则角 A 为________.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，三个角 A、B、C 的对边边长分别为 $a=3$，$b=4$，$c=6$，则 $bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C$ 的值为________.

三.解答题

7. 在 $\triangle ABC$ 中，若已知三边为连续正整数，最大角是钝角.

(1)求最大角的余弦；

(2)求以此最大角为内角，夹此角的两边之和为 4 的平行四边形的最大面积.