数学分析习题解答

上　册

新乡师院数学系

前　　言

为了满足教学上的需要，我们将吉林大学数学系所编《数学分析》（上、中、下三册，1978年版）中的习题给了解答。现作为本院内部教学资料，整理出版。

在解题过程中，我们严格按照原书的体系，并对原书习题及其答案上的某些刊印错误作了改正与说明。但是，由于水平所限，加上时间仓促，分头编写（其中第一章至第九章　齐建华；第十章至第十八章　张献英；第十九章至第二十六章　黄祖瑞、高宗升），所以在解题方法或解答本身都会有这样或那样的问题。虽然出《题解》的原意在于供本院学生参考，但既然刊印成册，就难免杂陈于珠玑之间。每感于此，至为不安，切盼读者多加批评指正。

《题解》在编印过程中受到了院系领导的热情关怀和鼓励；许多老师和同学提出了宝贵意见；定稿期间得到了原书作者吴智泉、严子谦两位先生的帮助；王万森同志利用假期为本书绘图；付印前又得到了《河南教育》社庞金泽、刘和玉等同志的热情帮助；山东曹县印刷厂的同志们为使《题解》早日出版也尽了极大的努力，编者在此谨向他们致以诚恳的感谢。

编　者

1980年7月

目　　录

第Ⅴ篇　无穷级数论

第Ⅰ篇　函数与极限论初步

第一章　从初等数学向微积分的过渡

第二章　变量与函数

§1．绝对值

1．证明三角不等式 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$．

证：$\because -|a|\leqslant a\leqslant|a|$，　$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$，

$\therefore -(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$．

即　$|a+b|\leqslant|a|+|b|$．

2．设常数 $A>0$，证明 $|x|\leqslant A$ 当且仅当 $-A\leqslant x\leqslant A$ 时成立．

证：当 $|x|\leqslant A$，即 $x\leqslant A$　或　$-x\leqslant A$，则有　$-A\leqslant x\leqslant A$；

当 $-A\leqslant x\leqslant A$，即 $x\leqslant A$，　$-x\leqslant A$，　则 $|x|\leqslant A$．

3．证明 $|x|\geqslant B$ 当且仅当 $x\geqslant B$ 或 $x\leqslant -B$ 时成立，B 为常数．

证：当 $|x|\geqslant B$，　则 $x\geqslant B$　或　$-x\geqslant B$，

即　$x\geqslant B$ 或 $x\leqslant -B$；　当 $x\geqslant B$　或 $x\leqslant -B$，有 $x\geqslant B$，$-x\geqslant B$．则 $|x|\geqslant B$．

4．指明满足下列不等式的 x 所在的区间：

(1) $|x|\leqslant 2$；

解：$-2\leqslant x\leqslant 2$；

(2) $|x-1|<1$；

解：$-1<x-1<1$，　即　$0<x<2$；

(3) $|x|\geqslant 5$；

解：$x\geqslant 5$　或　$x\leqslant -5$；

(4) $\left|x+\frac{1}{2}\right|\geqslant\frac{1}{2}$；

解：$x+\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2}$　或　$x+\frac{1}{2}\leqslant-\frac{1}{2}$，即　$x\geqslant 0$　或　$x\leqslant -1$.

5．应用三角不等式证明，当 $|x+1|<\frac{1}{2}$时，$|x-2|<\frac{7}{2}$.

证：$|x-2|=|(x+1)+(-3)|\leqslant|x+1|+|-3|<\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}$.

6．应用三角不等式证明，当　$|x-1|\leqslant 1$时，　$|x^2-1|\leqslant 3|x-1|$.

证：$\because$　$|x+1|=|(x-1)+2|\leqslant|x-1|+2\leqslant 1+2=3$，

$\therefore$ $|x^2-1|=|x+1|\,|x-1|\leqslant 3|x-1|$.

7．解下列不等式：

(1) $|x-5|<8$；

解：$-8<x-5<8$，即 $-3<x<13$；

(2) $|2x+4|\geqslant 10$；

解：$2(x+2)\geqslant 10$　或　$2(x+2)\leqslant -10$，

即　$x\geqslant 3$　或　$x\leqslant -7$；

(3) $|x|>|x+1|$；

解：$x^2>(x+1)^2$，　$0>2x+1$，　即　$x<-\frac{1}{2}$；

(4) $|x+1|+|x-1|\leqslant 4$；

解：若$(x+1)(x-1)\geqslant 0$，则

$|x+1|+|x-1|=|(x+1)+(x-1)|=2|x|\leqslant 4$，

$\therefore\ |x|\leqslant 2$；

若 $\begin{cases} x+1>0, \\ x-1<0, \end{cases}$ 则 $-1<x<1$；

$\because\ \begin{cases} x+1<0, \\ x-1>0. \end{cases}$ 无解，

$\therefore$ 解为 $|x|\leqslant 2$.

§ 2．变量与函数

1．圆柱形油罐的底半经为R，油面的高度为 h，试将油之体积V表为 h 的函数。

解：$V=\pi R^2 h$.

2．一稳压电源回路，电动势为 E，内阻为 r，负载电阻为R，将输出功率P表为R的函数。

解：$\because\ I=\dfrac{E}{R+r}$，$\therefore\ P=I^2R=\left(\dfrac{E}{R+r}\right)^2R$.

3．求下列函数在 $x=1$，$x=-\dfrac{1}{2}$，$x=0$ 点处的函数值，并画出函数图形。

(1) $f(x)=x^2+3$；

解：$f(1)=1^2+3=4$，$f(-\dfrac{1}{2})=(-\dfrac{1}{2})^2+3=\dfrac{13}{4}$，$f(0)=0+3=3$；

(2) $f(x)=|x|$；

解：$f(1)=1$，$f(-\frac{1}{2})=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$，$f(0)=|0|=0$；

(3) $f(x)=[x]$；

解：$f(1)=[1]=1$，$f(-\frac{1}{2})=[-\frac{1}{2}]=-1$，

$f(0)=[0]=0$；

(4) $f(x)=x-[x]$；

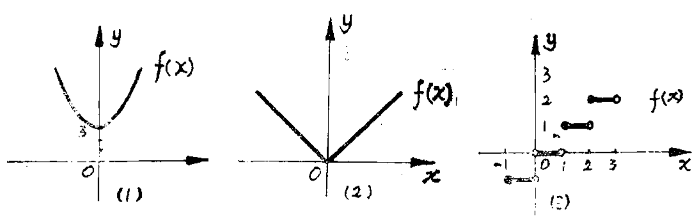
解：$f(1)=1-[1]=0$，$f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}-[-\frac{1}{2}]$

$=\frac{1}{2}$，$f(0)=0-[0]=0$；

(5) $f(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$

解：$f(1)=1$，$f(-\frac{1}{2})=-1$，$f(0)=0$。

作图如下：



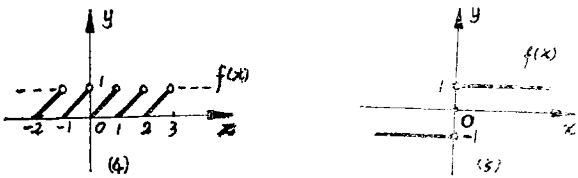


图2·2·1

4．确定下列函数关系的定义域：

（1）$y=x+\dfrac{1}{x}$；

解：$x\neq 0$， 即 $(-\infty,\ 0)$和$(0,\ +\infty)$；

（2）$y=\sqrt{a^2-x^2}$；

解：$a^2-x^2\geqslant 0$， $a^2\geqslant x^2$， 即 $|x|\leqslant|a|$；

（3）$y=lg(\sin x)$；

解：$\sin x>0$，$2n\pi<x<(2n+1)\pi$，$n=0$，± 1，± 2，…；

（4）$y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$．

解：$\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant 0$， 即 $\begin{cases}1+x\geqslant 0,\\ 1-x>0.\end{cases}$

或 $\begin{cases}1+x\leqslant 0,\\ 1-x<0.\end{cases}$

$\therefore\quad -1\leqslant x<1$．

5．试举出偶函数和奇函数的例子，并画出图形。

例：$f(x)=x^2$是偶函数；

$f(x)=x$是奇函数。 （作图略）

§3. 反函数

求下列函数的反函数

1．$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，　　$(bc-ad\neq 0)$

解：$(cx+d)y=ax+b$，

$cxy-ax=b-dy$，　$\therefore\quad x=-\dfrac{dy-b}{cy-a}$.

2．$y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$.

解：$\because\quad y=\begin{cases}1+x^2, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -(1+x^2), & x<0.\end{cases}$

$$\therefore\quad x=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & y>1,\\ 0, & y=0,\\ -\sqrt{-(1+y)}, & y<-1.\end{cases}$$

§5. 复合函数

1、选取适当的函数 $y=f(x)$及$u=\varphi(x)$，将下列函数表成复合函数$y=f[\varphi(x)]$：

(1) $y=\sqrt{3x^2+4}$；

解：$y=\sqrt{u}$，　　$u=3x^2+4$；

(2) $y=\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}$；

解：$y=\sqrt{u}$，　　$u=\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}$；

(3) $y=lg(2+\sin x)$；

解：$y=lgu$，　　$u=2+\sin x$；

(4) $y=2^{x}lgx$.

解：$y=2^{u}$，　　$u=xlgx$，

2. 设 $y=f(x)$， $x=\varphi(t)$， 求 $y=f[\varphi(t)]$：

(1) $f(x)=\sin x$， $\varphi(t)=2\operatorname{arc\,tg} t$， $-\infty<t<+\infty$；

解：$y=\sin(2\operatorname{arc\,tg} t)=2\sin(\operatorname{arc\,tg} t)\cos(\operatorname{arc\,tg} t)$

$$=2\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2t}{1+t^2},\qquad -\infty<t<+\infty;$$

(2) $f(x)=\cos x$ $\varphi(t)=2\operatorname{arcctg} t$ $-\infty<t<+\infty$

解：$y=\cos(2\operatorname{arcctg} t)=\cos^2(\operatorname{arcctg} t)-\sin^2(\operatorname{arcctg} t)$

$$=\frac{t^2}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}=\frac{t^2-1}{t^2+1}\qquad -\infty<t<+\infty.$$

(3) $f(x)=\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$， $\varphi(t)=\sin t$，

$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$；

解：$y=\arcsin(2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t})=\arcsin(2\sin t\cos t)$

$$=\arcsin(\sin 2t)=\begin{cases}2t, & 0\leqslant 2t\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \pi-2t, & \frac{\pi}{2}<2t\leqslant\pi.\end{cases}$$

$$\therefore\quad y=\begin{cases}2t, & 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4},\\ \pi-2t, & \frac{\pi}{4}<t\leqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

(4) $f(x)=\operatorname{sgn} x$， $\varphi(t)=\sin\frac{\pi}{t}$， $0<t\leqslant 1$.

$$解：y=\operatorname{sgn}\sin\frac{\pi}{t}=\begin{cases}1, & \sin\frac{\pi}{t}>0,\\ 0, & \sin\frac{\pi}{t}=0,\\ 1, & \sin\frac{\pi}{t}<0.\end{cases}$$

即 $$y=\begin{cases} 1, & \dfrac{1}{2n+1}<t<\dfrac{1}{2n}, \\ 0, & t=\dfrac{1}{n}, \qquad (n=1,2,\cdots). \\ -1, & \dfrac{1}{2n}<t<\dfrac{1}{2n-1}. \end{cases}$$

3. 已知函数$y=f(x)$的图形，作下列函数的图形：

(1) $y=f(x+a)$；　　　　(2) $y=|f(x)|$；

(3) $y=f(x)+b$；　　　　(4) $y=\operatorname{sgn}f(x)$；

(5) $y=\dfrac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$；

(6) $y=\dfrac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$.

解：设$f(x)$的图形如右.

则相应y的图形如下.

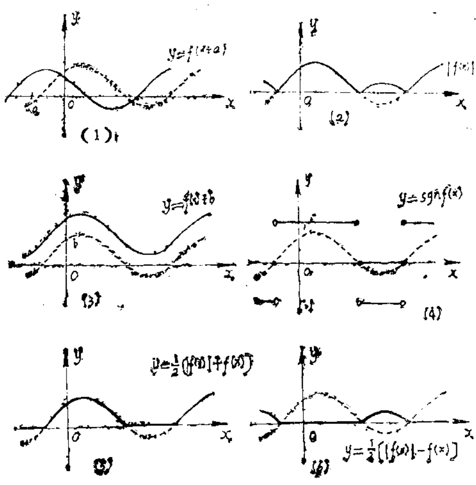


图2・5・1

第三章　极　　限

§3．极限的一些基本性质

1．下列数列哪些是有极限的？如有极限，试指出其极限值：

(1) $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$；　　(2) $x_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$；

(3) $x_n=\dfrac{n}{2n+1}$；　　(4) $x_n=\dfrac{1}{n!}$．

解：(1)、(3)、(4)有极限，极限值分别为0，$\dfrac{1}{2}$，0．

2．对上题有极限($\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$)的数列填下表：

x_n	$\|x_n-l\|<$	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$	$n>$	100	10,000	1,000,000	100,000,000
$\dfrac{n}{2n+1}$	$n>$	2	25	250	2,500
$\dfrac{1}{n!}$	$n>$	3	5	7	9

3．求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2}{2n^3+1}$；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2}{2n^3+1}=\dfrac{1}{2}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+10\sqrt{n}}{5n-100\sqrt{n}}$;

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{10}{\sqrt{n}}}{5-\dfrac{100}{\sqrt{n}}}=\dfrac{1}{5}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^2+(-1)^n n}{5n^2+n}$;

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6+(-1)^n\dfrac{1}{n}}{5+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{6}{5}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})$;

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} 2\cos\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty} 2\cos\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$=0$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\sqrt{n}$;

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{2}$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$;

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot1}{2^2}\cdot\dfrac{4\cdot2}{3^2}\cdot\dfrac{5\cdot3}{4^2}\cdots\dfrac{(n+1)(n-1)}{n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.$$

4. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$；

证： ∵ $0<\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{1}{n}$， 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$， 由定理6，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$；　　$(|q|<1)$

证：设 $|q|=\dfrac{1}{1+r}$　$(r>0)$，则

$0<|q|^n=\dfrac{1}{(1+r)^n}<\dfrac{1}{nr}$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{nr}=0$.

由定理6，$\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0$　　∴ $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$；　　$(|q|<1)$

证：设 $|q|=\dfrac{1}{1+r}$　$(r>0)$，则

$$0<n|q|^n=\frac{n}{(1+r)^n}=\frac{n}{1+nr+\frac{n(n-1)}{2}r^2+\cdots}$$

$$<\frac{2}{(n-1)r^2},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)r^2}=0.$$

由定理6， $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$；

证：∵ $0<\frac{n!}{n^n}=\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{n}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$。

由定理6，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+q+\cdots+q^n}{1+p+\cdots+p^n}=\frac{1-p}{1-q}$，$|p|<1$，$|q|<1$；

证：∵ $\frac{1+q+\cdots+q^n}{1+p+\cdots+p^n}=\frac{\frac{1-q^n}{1-q}}{\frac{1-p^n}{1-p}}=\frac{1-p}{1-q}\cdot\frac{1-q^n}{1-p^n}$，

由题(2)和定理4易知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-p}{1-q}\cdot\frac{1-q^n}{1-p^n}=\frac{1-p}{1-q}$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})=2$.

证： $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}$

$=\frac{2}{\sqrt[2^n]{2}}$。 由例8及定理6， $1<2^{\frac{1}{2^n}}<2^{\frac{1}{n}}$，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{2}=1$. 又由定理4知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt[2^n]{2}}=2$.

5. 设 $|x_n|\leqslant M$ ($n=1, 2, \cdots$), 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$.

证: $\because$ $0\leqslant|x_n y_n|\leqslant M|y_n|$,

由定理3, $\lim\limits_{n\to\infty} M|y_n|=0$, 又由定理6, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$.

6. 讨论下列问题:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 不存在, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 是否存在?

答: 不存在。因为假若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 存在, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n)$ 存在, 根据定理2 $\lim\limits_{n\to\infty}[(x_n+y_n)+(-x_n)]$ 存在。但 $[(x_n+y_n)+(-x_n)]=y_n$ 其极限不存在, 产生矛盾;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 也不存在, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 是否不存在?

答: 不一定。例 $x_n=(-1)^n$, $y_n=(-1)^{n+1}$, x_n、y_n 极限均不存在, 但 $\{x_n+y_n\}=\{0\}$, 极限存在。又例 $x_n=n$, $y_n=(-1)^n$, 极限均不存在, $x_n+y_n=n+(-1)^n$, 极限也不存在。

(3) 若 $\{x_n\}$ 是任意数列, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$, 是否 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$?