•YIYUANWEIJIFEN

一元微积分

何春艳　朱　刚　主编

哈尔滨地图出版社

一元微积分

YIYUAN WEIJIFEN

何春艳　朱　刚　主编

哈尔滨地图出版社
哈　尔　滨

图书在版编目(CIP)数据

一元微积分/何春艳,朱刚主编.—哈尔滨:哈尔滨地图出版社,2008.5

ISBN 978-7-80717-907-8

Ⅰ.一… Ⅱ.①何…②朱… Ⅲ.微积分 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 106127 号

哈尔滨地图出版社出版发行

(地址:哈尔滨市南岗区测绘路 2 号 邮政编码:150086)

天兴速达印务有限责任公司印刷

开本:787 mm×1 092 mm 1/16 印张:8.625 字数:208 千字

2008 年 5 月第 1 版 2008 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-80717-907-8

印数:1~100 定价:20.00 元

前　言

微积分是研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支，也是建立在实数、函数和极限的基础上的一门学科。

微积分作为一门学科来说，产生在 17 世纪，但是，微分和积分的思想在古代就已经产生了。尤其是作为微分学基础的极限理论，早在古代就有比较清楚的论述。比如我国的庄周所著的《庄子》一书的“天下篇”中，记有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”。三国时期的刘徽在他的割圆术中提到“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”。这些都是朴素的，也是很典型的极限概念。

到了 17 世纪，为了解决即时速度、曲线的切线等诸多科学问题，许多科学家做了大量的研究工作，其中尤其以牛顿和莱布尼茨为代表，他们在极限理论基础上建立微积分。微积分学的创立，极大地推动了数学的发展，过去很多初等数学束手无策的问题，运用微积分，往往迎刃而解，显示出微积分学的非凡威力。

本书主要介绍了一元微积分，全书共分六章：极限与连续、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分和定积分应用。结合作者多年的教学经验，在本书编写过程中，我们力求做到概念清楚、条理清晰、通俗易懂；力争做到既注重学生基本能力的培养，又加强学生数学思维能力的培养，使学生开阔视野，活跃思维，逐步建立敏锐的数学意识。同时我们也精心地挑选了适量的例题和练习题，希望通过这些比较典型和经典的例题和练习题能够帮助学生加深对基本内容的理解，提高学生用数学知识分析和解决问题的能力，并且书后附有部分习题答案可供学生自我检验。

由于我们水平有限，本书难免会有错误和不妥之处，敬请广大读者批评指正，我们将不胜感激。

编　者

2008 年 5 月

目　　录

第一章　极限和连续

微积分的两个主要部分——微分学和积分学的概念都是用极限来表达的.微分法和积分法也都是借助于极限方法来描述的,所以学好极限这一章是非常重要的.

第一节　极限的直观描述

一、极限思想的形成

极限思想的产生可以追溯到古代,当时为求曲边形面积,古希腊数学家阿基米德(Archimedes)曾用若干矩形面积之和去估算曲边形的面积,其中蕴含了极限的思想.我国古代数学家刘徽(公元前3世纪)在利用圆周内接正多边形的面积推算圆面积的方法——割圆术过程中进一步阐述了这种思想:"……割之弥细,所失弥少,割了又割,以至于不可割,则与圆合体而无所失矣."把极限思想描写得很生动.但是极限概念的形成却经历了漫长的岁月,在17世纪下半叶第一个明确提出极限概念的人是英国数学家牛顿(Newton),他当时给出的定义也是含糊不清的,又经过许多数学家的努力工作,牛顿的极限思想及其微积分学在18世纪有了进一步的应用,但极限概念还比较含糊,微积分中还有许多地方难以自圆其说,到了19世纪20年代柯西(A. L. Cauchy)才提出"无限接近"这一直观性很强的说法,最后到19世纪后半期极限的严格定义由魏尔斯特拉斯(K. Weierstrass)等用"ε—δ"语言把极限定义表达成我们现在采用的样子.

下面我们通过一个具体例题来阐述极限的思想.

例1　求由抛物线 $y=x^2$ 与 x 轴及直线 $x=1$ 所围成的平面区域的面积 A.

在初等数学中没有给我们提供解决这一问题的方法,只能求出 A 的近似值,把区间 $[0,1]$ 分成 n 等份,分点依次为

$$\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{i-1}{n},\frac{i}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}$$

然后过每个分点作底边的垂线,这样原曲边形被分成了 n 个窄条(每个又都是一个小曲边形),每个窄条都用矩形来代替,每个矩形的底宽为 $\frac{1}{n}$,高为 $\left(\frac{i}{n}\right)^2$,$i=0,1,2,\cdots,n-1$,把所有小矩形面积之和记为 A_n,如图1.1,于是

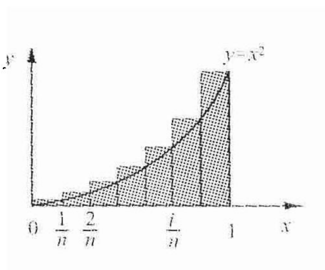

图1.1

$$\begin{aligned}A_n&=0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\&=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\end{aligned}$$

$$=n\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.$$

用 A_n 近似来代替曲边形面积 A，如果

取 $n=10$，算得 $A_{10}=\frac{1}{3}-0.048$，

取 $n=100$，算得 $A_{100}=\frac{1}{3}-0.005$，

取 $n=10\ 000$，算得 $A_{10\ 000}=\frac{1}{3}-0.000\ 05.$

由此可以看出，A_n 会随着 n 不断增加而接近常数$\frac{1}{3}$，用 A_n 来近似代替 A 所产生的误差会越来越小. 但是无论 n 取多么大，你算多少次都是有限次，总不会得到 A 的精确值. 只有无限次计算下去才行，而这在实际上是不可能的. 因此，求曲边形面积的问题是初等数学解决不了的，于是产生了一种新的方法——极限方法. 它是一种独特的方法，实现了从有限到无限的飞跃，对于有限次的运算计算不出来(只有通过无限次运算才能得到)的量，可以通过分析该量在一个无限变化过程中的变化趋势而判断出来.

二、数列极限

定义 1.1 对于数列$\{x_n\}$，如果存在一个常数 a，使得数列的一般项 x_n 与 a 可以任意接近，就称数列$\{x_n\}$以常数 a 为极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

或

$$x_n\to a(n\to\infty).$$

否则称$\{x_n\}$无极限. 当$\{x_n\}$有极限 a 时，也称$\{x_n\}$收敛于 a，$\{x_n\}$无极限时，也称数列$\{x_n\}$发散.

例 1 中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 即为一数列，其一般项为 $A_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$，通过分析我们可以看出，当 n 无限增大时，A_n 会无限接近于常数$\frac{1}{3}$，则$\frac{1}{3}$即为数列$\{A_n\}$的极限. 我们所求曲边形的面积 $A=\frac{1}{3}$.

例 2 用直观定义判断下列各数列是否有极限.

(1) $x_n=\frac{1}{n}$　　(2) $x_n=\frac{n-1}{n+1}$

(3) $x_n=(-1)^n$　　(4) $x_n=\frac{1+\cos n\pi}{2}$

三、函数极限

下面我们讨论函数 $y=f(x)$ 在自变量的某一变化过程中，对应的函数值 $f(x)$ 的变化趋势. 自变量的变化过程显然是各种各样的，但可以分成两类：

(1)自变量 x 趋近于有限值 x_0,记为 $x\to x_0$;

(2)自变量 x 的绝对值无限增大,即 $|x|$ 趋于无穷大,记为 $x\to\infty$.

函数极限的直观定义如下:

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义,如果当 $x\to x_0$ 时,对应的函数值 $f(x)$ 无限趋于常数 A,则称 A 为 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

或

$$f(x)\to A(x\to x_0).$$

定义 1.3　设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|$ 任意增大时,皆有定义,如果当 $x\to\infty$ 时,对应的函数值 $f(x)$ 会趋近于某个常数 A,则称 A 为 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 的极限,记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

或

$$f(x)\to A(x\to\infty).$$

例 3　计算下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)$　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$

解　(1)　列表计算

表 1-1

x	0.9	0.99	0.999	…	1	…	1.001	1.01	1.1
$x+1$	1.9	1.99	1.999	…		…	2.001	2.01	2.1

通过分析看出,当 $x\to 1$ 时,$f(x)=x+1\to 2$.

作函数 $f(x)=x+1$ 的图像.

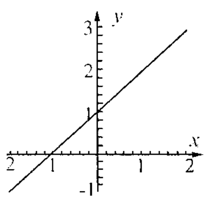

图 1.2

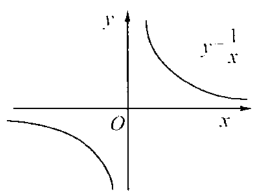

图 1.3

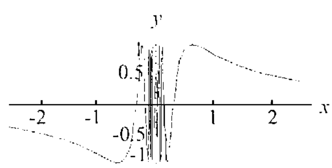

图 1.4

由图 1.2 可以看出,当 x 无限接近于 1 时,相应函数值 $(x+1)$ 趋于常数 2,故

$$\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

(2)由图 1.3 可以得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

不存在.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

(3)由图 1.4 可以判断

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

不存在.

四、单侧极限

当 $x\to x_0$ 时,表示 x 是从 x_0 的左右两侧向 x_0 趋近,而有时我们只需研究从 x_0 的某一单侧趋近于 x_0 时函数值的变化趋势. 下面给出单侧极限的定义.

当 x 仅从 x_0 的左侧趋近于 x_0 时,相应函数 $f(x)$ 趋近于某常数 A,则称 A 是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限,记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A$$

或

$$f(x_0-0)=A$$

或

$$f(x_0^-)=A.$$

同样,可定义 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

或

$$f(x_0+0)=A$$

或

$$f(x_0^+)=A.$$

左右极限统称为单侧极限,显然,单侧极限是极限的特殊情况.

容易看出,当 $x\to x_0$,$f(x)$ 存在极限 A 时,它的左右极限都存在且也为 A;反之,结论也成立. 得到下面定理:

定理 1.1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

对于 $x\to\infty$ 的情形,可同样定义单侧极限;

$x\to+\infty$ 表示自变量沿 x 轴向右可以无限远;

$x\to-\infty$ 表示自变量沿 x 轴向左可以无限远.

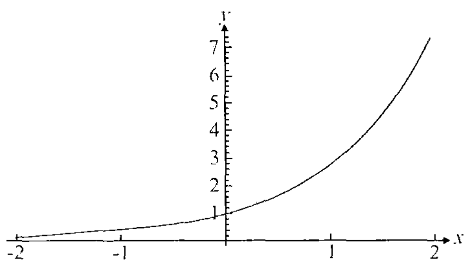

图 1.5

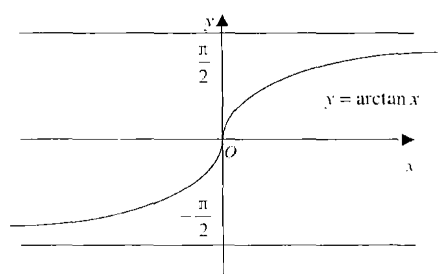

图 1.6

如:

由图 1.5 和图 1.6 知: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$.

习　题　一

1. 分析当 n 无限增加时的下列各数列 $\{x_n\}$ 变化趋势.

(1) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$　　(2) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$

(3) $\left\{\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n+1}\right\}$　　(4) $\left\{\dfrac{n^2+3}{n(n+1)}\right\}$

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,

(1)若去掉极限中前 100 项后,余下的数列还会是极限吗? 若有极限还会有 A 吗?

(2)若去掉极限中的所有偶数项,只剩下奇数项的新数列会有极限吗? 若有极限应是多少?

3. 思考后回答:

(1)单调数列必有极限吗?

(2)有界数列必有极限吗?

(3)无界函数必有极限吗?

4. 下列函数极限是否存在?

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$

5. 从大气(或水)中清除污染的费用 $C(x)$ 与清除污染成分的 $x\%$ 之间函数关系为

$$C(x)=\frac{7\ 300x}{100-x}$$

(1)清除全部污染成分 45% 的费用 $C(45)$;

(2)清除全部污染成分 90% 的费用 $C(90)$;

(3)求 $\lim\limits_{x\to 80} C(x)$;

(4)能否百分之百地清除污染?

第二节　极限的精确定义及性质

一、极限的精确定义

上节我们对极限的概念只给出了直观的描述,极限是从有限到无限,在无限中许多问题用直观是解决不了的,单凭直观有时易产生错误. 下面我们对极限给以定量的严格刻画.

以数列极限为例,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 是说当 n 无限增大时,x_n 可以无限接近于某常数 a,从距离的角度来看,就是充分靠后的点(n 足够大到一定程度,不妨设 $n>N$)$x_{N+1}, x_{N+2}\cdots$ 与常数 a 的距离 $|x_n-a|$ 可充分小,就是要多小,有多小.

我们还是以一个具体例子来说明.

例 1　数列

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\cdots$$

通过分析有：

$$x_n=1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$

即
$$x_n-1=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

显而易见，当 n 无限增大时（$n\to\infty$），

$$|x_n-1|=\frac{1}{n}$$

就会越来越小，只要 n 足够大，就可使

$$|x_n-1|$$

小于任意给定的小正数.

如给定的正数为$\frac{1}{100}$，要使

$$|x_n-1|<\frac{1}{100},$$

即

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{100},$$

只须 $n>100$ 就可以了. 就是说从第 101 项起 x_{101}，$x_{102}\cdots$都可以使不等式

$$|x_n-1|<\frac{1}{100}$$

成立，再写清楚些，从 101 项起的各项为$\frac{102}{101},\frac{101}{102},\frac{104}{103},\frac{103}{105},\cdots$，它们每项与 1 的差的绝对值都小于$\frac{1}{100}$.

若给定的正数为$\frac{1}{10\,000}$，要使

$$|x_n-1|<\frac{1}{10\,000},$$

只须从 10 001 项起，后面的所有项 $x_{10\,001}$，$x_{10\,002}$，$\cdots$，都能满足不等式

$$|x_n-1|<\frac{1}{10\,000},$$

我们还可以给出更小的正数，要使

$$|x_n-1|$$

小于给出的更小正数，只须 n 取得更大些.

但这并不能说明$|x_n-1|$可以任意小，只能说明$|x_n-1|$小到了什么程度，毕竟我们给出的这些较小的正数是有限的.

我们用希腊字母 ε 表示任意小的一个正数，用它来刻画 x_n 与 1 接近的程度，即$|x_n-1|$小的程度. 这里的 ε 是任意给定的，其小的程度不受任何限制，这才叫任意小.

对于这个预先给定的要多么小就可以多么小的正数 ε，数列$\{x_n\}$可以使某项开始（不妨

设 N)后面的所有项都满足不等式 $|x_n-1|<\varepsilon$,这时我们就可以说 $|x_n-1|$ 是可以任意小的.

对于预先给定的任意小的正数,这样的 N 是否存在呢？要使 $|x_n-1|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ 成立,只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 即可,这样的 N 有许多吧,我们通常取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,这样,对任给的 $\varepsilon>0$,从第 $N+1$ 项起后面所有的项与常数 1 的距离 $|x_n-1|$ 就可以任意小了.于是数列是以 1 为极限的,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n}=1$$

下面给出数列极限的精确定义:

如果存在常数 a,使得对任意给定的正数 ε(无论有多小),总存在正整数 N,当 $n>N$ 时不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立,那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

或

$$x_n\to a(n\to\infty).$$

如果不存在这样的常数,就称数列 $\{x_n\}$ 没有极限.

为表述方便引入记号,"$\forall$"表示"任意给定的","$\exists$"表示"存在",这样数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义就可简述为

$$\forall\varepsilon>0,$$

总

$$\exists N\in N_+,$$

使得

$$n>N$$

时,恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

类似的,对函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 定义如下:

对

$$\forall\varepsilon>0,$$

若

$$\exists M>0,$$

当

$$|x|>M$$

时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义为

对

$$\forall\varepsilon>0,$$

若

$$\exists\delta>0,$$

当

$$0<|x-x_0|<\delta$$

时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

仿照前面的定义,请同学们自己导出单侧极限的精确定义(只须注意 $x\to x_0$ 时,x 与 x_0 的大小就可以了).

二、极限的性质

定理 1.2 (唯一性) 如果数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,那么它的极限是唯一的.

证明 用反证法. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,又 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B$ 且 $A\neq B$,

$$|A-B|=|A-x_n+x_n-B|\leqslant|x_n-A|+|x_n-B|.$$

不等式的左端是一个正数,$(A\neq B)$ 而不等式的右端 $|x_n-A|$ 与 $|x_n-B|$ 都可以任意小,其和怎么能大于一个正数呢? 产生矛盾,故必有 $A=B$.

定理 1.3 (有界性) 如果数列 $\{x_n\}$ 极限存在,那么数列 $\{x_n\}$ 必有界.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,由极限定义,对给定 $\varepsilon=1$,$\exists N\in N_+$,当 $n>N$ 时,不等式 $|x_n-a|<1$,于是当 $n>N$ 时,

$$|x_n|=|x_n-a+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|$$

即 $x_{N+1}+x_{N+2}\cdots$ 均满足不等式 $|x_n|<1+a$,而前面只有 N 项:$x_1,x_2,\cdots,x_N$,未必全满足 $|x_n|<1+a$,这样我们令

$$M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\},$$

数列 $\{x_n\}$ 中的所有项 x_n,都满足不等式 $|x_n|\leqslant M$,这就证明了数列 $\{x_n\}$ 的有界性.

定理 1.4 (保号性) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 且 $a>0$(或 <0),那么存在正整数 N,当 $n>N$ 时,都有 $x_n>0$(或 <0).

证明 不妨设 $a>0$,由定义 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对给定 $\varepsilon=\dfrac{a}{2}>0$,$\exists N\in N_+$,当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\dfrac{a}{2}$,即 $a-\dfrac{a}{2}<x_n<a+\dfrac{a}{2}$,从而得到 $x_n>\dfrac{a}{2}>0$.

对于函数极限也有类似的性质:

1. 函数极限的唯一性

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,那么极限唯一.

2. 函数极限的局部有界性

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,那么在 x_0 的某个去心邻域内,函数 $f(x)$ 有界.

3. 函数极限的局部保号性

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且 $A>0$(或 $A<0$),那么在 x_0 某个去心邻域内 $f(x)>0$(或 <0).

在上述性质中,把 $x\to x_0$ 改为 $x\to\infty$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$ 时,也有相应的结论成立.

这三个结论对单侧极限也适用.

习 题 二

1. 如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,能否推出 $a>0$?

2. 数列极限定义中的 ε 是任意给定的，请问定义中的 N 也是任意取的吗？如果不是，N 与 ε 有什么关系呢？

3. 将数列 $\{x_n\}$ 的各项 x_n 及数 a 用数轴上的点来表示，再在数轴上画出点 a 的 ε 邻域 $U(a,\varepsilon)$，即开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，那么是否所有的 x_n 都落入 $U(a,\varepsilon)$ 中呢？哪些点有可能落入 $U(a,\varepsilon)$ 中呢？

4. 试证：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$　　(2) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$

5. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$，

问：(1) $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |a|$，对否？

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |a|$，必有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ 吗？

6. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 时，

(1) $f(x_0)$ 一定存在吗？(2) 定义中为什么要求 $0 < |x - x_0|$？

第三节　无穷小　极限运算法则

前面介绍了极限概念，那么怎么计算极限呢？这一节介绍在理论和实践中都很重要的量——无穷小量，然后学习极限的运算法则，并利用这些法则求函数极限.

一、无穷小

1. 无穷小的定义

定义 1.4　如果函数 $\alpha(x)$，当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，那么把 $\alpha(x)$ 叫做 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小.

精确定义：对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|\alpha(x)|<\varepsilon$.

例 1　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，所以 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 为 $n\to\infty$ 时的无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，所以 $\sin x$ 为 $x\to 0$ 时的无穷小.

根据极限定义，可看出下面两个极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-A]=0$ 是等价的，即可互相推出.

令 $\alpha(x)=f(x)-A$，即 $f(x)=A+\alpha(x)$.

我们不难推出无穷小与函数极限的关系：

定理 1.5　在自变量的同一变化过程中，函数 $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是无穷小.

2. 无穷小的性质

定理 1.6

(1) 两个无穷小的和是无穷小；

(2) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

根据无穷小的定义是容易证明的.

证明(1)对给定 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当

$$0<|x-x_0|<\delta$$

时，有

$$|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2},|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$|\alpha(x)+\beta(x)|\leqslant|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即

$$\alpha(x)+\beta(x)$$

是无穷小.

(2)设 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta_1)$ 内有界，$\exists M>0$，$\exists\delta_1>0$，当

$$x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)$$

即

$$0<|x-x_0|<\delta_1$$

时，有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

由

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0,$$

对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，当

$$0<|x-x_0|<\delta_2$$

时，

$$|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

取

$$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\},$$

对给的 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当

$$0<|x-x_0|<\delta$$

时，

$$|f(x)\alpha(x)|=|f(x)||\alpha(x)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

故有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

由上面定理可以推出：

推论 1 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2 有限个无穷小的代数和是无穷小.

推论 3 有限个无穷小的乘积是无穷小.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，$x\in\mathring{U}(0)$，由定理 1.6(2)可得

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$$

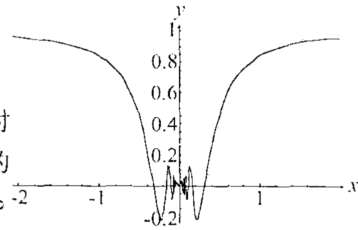

图 1.7

3. 无穷大

定义 1.5　如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，对应的函数的绝对值 $|f(x)|$ 可无限增大，就称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大. 有时也称函数 $f(x)$ 的极限是无穷大. 记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）.

精确定义：对 $\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$. 要注意 ∞ 是符号，并不是数，尽管我们说"函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限是无穷大"，这并不意味着函数存在极限.

例 3　看几个无穷大的例子.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$，如图 1.8.

$\lim\limits_{x\to\infty}x^3=\infty$，如图 1.9.

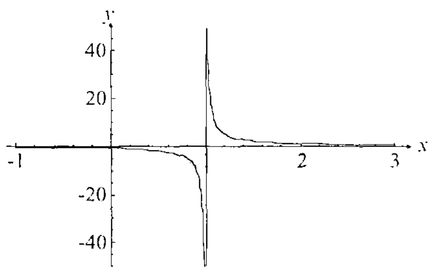

图 1.8

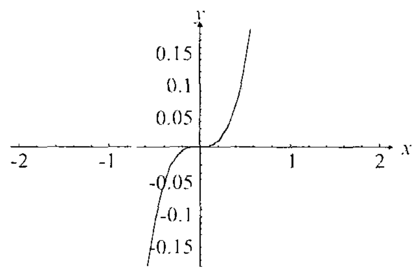

图 1.9

4. 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中，若函数 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，若 $f(x)$ 为无穷小（且 $f(x)\neq 0$），则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

该性质的直观意义很明显，我们就不加证明了.

例 4　当 $x\to 0$ 时，x 是无穷小量；当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷大量.

二、极限的四则运算法则

今后遇到记号"lim"下面没有标明自变量的变化过程时，是指对 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 都适用.

定理 1.7　如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)=AB$；

(3) 若 $B\neq 0$ 时，$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

这几个法则中学介绍过了，同学们并不陌生，用起来也不难，可要注意，条件不满足时，

法则是不可乱用的.

法则(1)和(2)都可以推广到有限个函数情形.

法则(2)可推出

$$\lim[cf(x)]=c\lim f(x)=cA,$$

其中 c 为常数,

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n.$$

简证法则2:

设$\lim f(x)=A$,$f(x)=A+\alpha$,这里 α 是无穷小,$\lim g(x)=B$,$g(x)=B+\beta$,这里 β 是无穷小,$f(x)g(x)=AB+A\beta+B\alpha+\alpha\beta$,这里 $A\beta+B\alpha+\alpha\beta$ 为无穷小,故$\lim f(x)g(x)=AB$.

例5　求$\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+5)$.

解　$\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+5)=\lim\limits_{x\to1}x^2-\lim\limits_{x\to1}(3x)+\lim\limits_{x\to1}5$

$=(\lim\limits_{x\to1}x)^2-3(\lim\limits_{x\to1}x)+5=1-3+5=3.$

一般的,对 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,有

$$\lim_{x\to x_0}P_n(x)=a_0(\lim_{x\to x_0}x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0}x)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(\lim_{x\to x_0}x)+a_n$$

$$=a_0x_0{}^n+a_1x_0{}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x_0+a_n=P_n(x_0).$$

例6　计算下列函数极限.

(1)$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-1}{2x+1}$　　(2)$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{3x+1}$

(3)$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x+1}{x^2-4}$　　(4)$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-4}$

解　(1)因为$\lim\limits_{x\to2}(2x+1)=5\neq0$,$\lim\limits_{x\to2}(x^2-x-1)=1$,故由法则(3)

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-1}{2x+1}=\frac{1}{5}.$$

(2)因为$\lim\limits_{x\to2}(3x+1)\neq0$,可用法则(3),得

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{3x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to2}(3x+1)}=\frac{0}{7}=0.$$

(3)因为$\lim\limits_{x\to2}(x^2-4)=0$,故不能用法则(3),但

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{3x+1}=0,$$

由无穷大与无穷小的关系,得

$$\lim_{x\to2}\frac{3x+1}{x^2-4}=\infty.$$

(4)$\lim\limits_{x\to2}(x^2-4)=0$,商的运算法则不可用,又因为

$$\lim_{x\to2}(x^2-5x-6)=0,$$

所以 x^5-5x-6 的倒数的极限也不存在.这时需要对极限进行恒等变换.因为当 $x\to2$ 时,$x\neq2$.

$$\frac{x^2-5x-6}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-3}{x+2}$$