



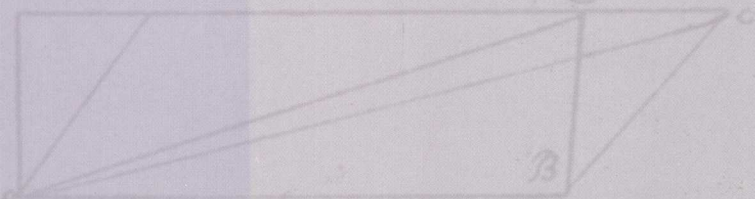
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数及其应用

第二版

同济大学数学系 编

*Compleantur utraq Δ in $\square$. Bafis
utraq communis, & altitudo equalis, ergo
triangula, cum sint fuoru. parallel. dim.
erunt inter fe quoz equalia. vid. de h.
in hiftonu
Lema*



高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数及其应用

第二版

同济大学数学系 编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用/同济大学数学系编.—2版.—北京:高等教育出版社,2008.12
ISBN 978-7-04-024856-2

I. 线… II. 同… III. 线性代数—高等学校—教材
IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 176382 号

策划编辑	于丽娜	责任编辑	胡乃同	封面设计	张 志
责任绘图	黄建英	版式设计	陆瑞红	责任校对	杨凤玲
责任印制	朱学忠				

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	煤炭工业出版社印刷厂		http://www.landaco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2004 年 7 月第 1 版
印 张	13.75		2008 年 12 月第 2 版
字 数	250 000	印 次	2008 年 12 月第 1 次印刷
		定 价	16.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24856-00

第二版前言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。针对应用型人才培养的特点及当前应用型本科教学的实际情况,本书保持了第一版教材的宗旨:以工科类本科线性代数课程的教学基本要求为本,在重要概念引进时尽可能做到简明、自然和浅显。第二版在内容的处理上,除保持线性代数本身的完整性和结构的合理性之外,考虑到学生学习线性代数课程的实际情况,主要作了如下三方面的修订:

(1) 在每一章开始增加介绍性实例,提高学生学习线性代数的兴趣,培养学生解决实际问题的意识和能力。

(2) 在每一章结束增加学习要点,以此帮助学生梳理所学内容。

(3) 重新整理了每章的例题,将较难的例题放在每章的补充例题中,方便教师和学生进行取舍。

本书更加注重概念的实际背景,强调数学的思想和方法,强化线性代数知识的应用;贯穿“线性相关性”这一线性代数的灵魂,突出“矩阵方法”,强调矩阵行初等变换的作用。为使难点分散,增强教材的可读性,方便教师教学,本书在修订时采取了下列一些措施:

(1) 通过大量的例题来阐明线性代数的思想;

(2) 从熟悉思想的自然扩展来泛化重要的概念;

(3) 通过一些实际例子的介绍,增强学生学习线性代数的兴趣;

(4) 淡化定理的推导,强调方法的训练。

这次修订工作由陈素琴主持。胡志庠修订第一章,陈素琴修订第二章,靳全勤修订第三章,范麟馨修订第四、五章。最后由陈素琴统一定稿。

在此,对高等教育出版社和同济大学有关部门表示衷心的感谢,他们对本书给予了很多的关心和支持。

由于编者水平有限,错误和不妥之处在所难免,恳请广大读者和各位同行批评指正。

编者

2008年7月4日

第一版总序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要,满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求,探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系,全国高等学校教学研究中心(以下简称“教研中心”)在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上,组织全国100余所以培养应用型人才为主的高等院校,进行其子项目课题——“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索,在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果,并在高等教育出版社的支持和配合下,推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材,冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

2002年11月,教研中心在南京工程学院组织召开了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项,为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台,整体设计立项研究计划,明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式,分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现,组建了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题领导小组(亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组)。会后,教研中心组织了首批课题立项申报,有63所高校申报了近450项课题。2003年1月,在黑龙江工程学院进行了项目评审,经过课题领导小组严格的把关,确定了首批9项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。2003年3月至4月,各子课题相继召开了工作会议,交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题,确定了项目分工,并全面开始研究工作。计划先集中力量,用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和 In 研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是,“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上,紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实

际需要,努力实践,大胆创新,采取边研究、边探索、边实践的方式,推进高校应用型人才培养工作,突出重点目标,并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础,作为体现教学内容和教学方法的知识载体,在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。因此,在课题研究过程中,各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果,并和教学实际结合起来,认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革,组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师,编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案,以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信,随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入,特别是随着教育部“高等学校教学质量和教学改革工程”的启动和实施,具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

2003年4月

第一版前言

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展的需要,满足我国高校从精英教育向大众教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的要求,编者编写了这本适合应用型本科的线性代数教材。本书是在同济大学数学教研室编《线性代数》(第四版)的基础上,参照工科类本科线性代数教学基本要求编写而成。本书可作为高等职业教育、成人高等教育工程类线性代数课程的教材,也可供工程技术人员自学阅读。

线性代数是高等院校一门重要的基础数学课程,具有较强的逻辑性、抽象性。针对本书面向的应用型本科学生,确定编写本书的宗旨:以工科类本科线性代数课程的教学基本要求为本,在重要概念引进时尽可能做到简明、自然和浅显。本书在内容的处理上,既注意保持线性代数本身的完整性和结构的合理性,又考虑到应用型本科学生学习线性代数课程的实际情况。本书中除特别说明外,所有矩阵均指实矩阵。二次型也是实二次型。由于线性变换的概念理科色彩较浓,未编入本教材。为增强本书的可读性,方便教师教学,本书在编写时采取了下列一些措施:

(1) 通过大量例题来阐明线性代数的思想;(2) 通过一些实际例子的介绍,增强学生学习线性代数的兴趣;(3) 淡化定理的推导,强调方法的训练。

本书的编写工作由陈素琴主持。胡志庠编写第一章,陈素琴编写第二章,靳全勤编写第三章,范麟馨编写第四、第五章。最后由范麟馨统一定稿。

教育部高教司、高等教育出版社以及同济大学应用数学系对本书的编写和出版给予了热忱的关心和支持,谨在此表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,错误和不妥之处在所难免,恳请广大读者和各位同行批评指正。

编 者

2004年3月24日

目 录

第一章 矩阵和行列式	1
§ 1 矩阵	2
§ 2 矩阵的运算及应用举例	5
§ 3 矩阵的初等变换与矩阵的等价	22
§ 4 行列式	27
§ 5 可逆矩阵及应用举例	41
§ 6 分块矩阵	52
学习要点	59
补充例题	59
习题一	63
第二章 矩阵的秩与线性方程组	69
§ 1 初等矩阵	70
§ 2 矩阵的秩	78
§ 3 线性方程组的求解	81
§ 4 应用举例	89
学习要点	95
补充例题	95
习题二	100
第三章 向量组的线性相关性	104
§ 1 向量与向量组	106
§ 2 向量组的线性相关性	111
§ 3 向量组的秩	118
§ 4 线性方程组解的结构	122
§ 5 向量空间	129
学习要点	131
补充例题	132
习题三	136

第四章 矩阵的对角化	140
§ 1 向量内积与正交矩阵	142
§ 2 方阵的特征值与特征向量	149
§ 3 相似矩阵	155
§ 4 对称矩阵必可对角化	161
§ 5 应用举例	165
学习要点	171
补充例题	172
习题四	173
第五章 二次型	177
§ 1 二次型及标准形	178
§ 2 用配方法化二次型为标准形	183
§ 3 正定二次型	185
§ 4 应用举例	189
学习要点	192
补充例题	193
习题五	195
习题答案	197

第一章

矩阵和行列式

介绍性实例 飞机设计中的计算机模型

为了设计下一代的商业和军用飞机,波音幻影工作室的工程师们使用了三维建模和计算流体力学。他们在建造实际的模型之前,研究一个虚拟的模型周围的空气流动,这样做可以很大程度地缩短设计周期,降低成本,而线性代数在这个过程中起了关键的作用。

虚拟的飞机模型的设计从数学的线形轮廓模型开始。它存储在计算机内存中,并可显示在图形显示终端。这个数学模型影响着设计和制造飞机外部和内部的每一个过程。计算流体力学分析主要考虑的是飞机外部表层的设计。



虽然飞机精巧的外表看上去是光滑的,但其表面的几何

曲面是十分复杂的.除了机翼和机身,飞机上还有引擎机舱、水平尾翼、狭板、襟翼、副翼.空气在这些结构上的流动决定了飞机在天空中如何运动.描述气流的方程很复杂,它们必须考虑到引擎的吸气量、引擎的排气量和机翼留下的尾迹.为了研究气流,工程师们需要飞机表面的精确描述.

用计算机建立飞机外表的模型,首先在原来的线形轮廓模型上添加三维的立方体格子.这些立方体有的处于飞机的内部,有的在外部,有的和飞机的表面相交.计算机选出这些相交的立方体,并进一步细分,保留仍然和飞机表面相交的立方体.这种细分过程一直进行下去,直到立方体非常精细.一个典型的网格可以含有超过400 000个的立方体.

研究飞机表面的气流的过程包含反复求解大型的线性方程组 $Ax=b$,涉及的方程和变量个数达到2百万个.向量 b 随来自网格的数据和前面的方程的解而改变.利用现在商业上买得到的最快的计算机,幻影工作组求解一个气流问题要用数小时至数天的时间.工作组分析方程组的解之后,会对飞机的外表进行稍微的修改,整个过程又再重新开始,计算流体动力学的分析有可能要进行数千遍.

本章给出协助求解这样大规模方程组的两个重要概念:

- 矩阵:线性方程组的系数可以写成一个矩阵.矩阵是求解线性方程组的一个重要工具.本章在 §1 节, §2 节中引入矩阵的概念及运算.
- 分块矩阵:一个典型的计算流体动力学的方程组会有“稀疏”的系数矩阵,上面有许多零元素.将变量正确地分组会产生有许多零方块的分块矩阵. §6 节中介绍了这种矩阵.

§1 矩阵

一、矩阵的概念

在工程技术和经济工作中有大量与矩形数表有关的问题.

例 1.1 力达公司生产甲、乙、丙三种产品,它们的生产成本由原材料费用、人工费用和杂项费用三项构成.表 1.1 给出了每种产品的每项费用的预算(单

位:百元).

表 1.1

产品 生产成本	甲	乙	丙
1. 原材料	10	30	20
2. 人工	3	4	5
3. 杂项费用	1	2	2

如果我们将上表中主要关心的对象——数据,按原来次序排列成矩形数表,并加上括号以表示这些数据是一个整体,就得到矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 20 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

如果该公司 2004 年各季度产品的计划生产数如表 1.2 所示:

表 1.2

季度 产品	1	2	3	4
甲	400	450	450	400
乙	200	260	240	220
丙	580	620	600	600

同样,由此矩形数表可得到矩阵:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 400 & 450 & 450 & 400 \\ 200 & 260 & 240 & 220 \\ 580 & 620 & 600 & 600 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

一般地,有

定义 1.1 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$) 排成 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

称为 $m \times n$ 矩阵. 这 $m \times n$ 个数称为矩阵 (1.3) 的元素. 位于第 i 行、第 j 列的元素 a_{ij} 称为此矩阵的 (i, j) 元.

元素是实数的矩阵称为实矩阵, 本书中的矩阵除特别说明者外, 都指实矩阵.

通常用黑体大写字母来表示矩阵, 有时为了强调矩阵的行数和列数, $m \times n$ 矩阵 A 也可记作 $A_{m \times n}$ 或 $(a_{ij})_{m \times n}$ 或 (a_{ij}) , 这里 a_{ij} 是 A 的 (i, j) 元.

二、一些特殊的矩阵

行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶方阵, n 阶方阵 A 也可记作 A_n . 一阶方阵就看作一个数.

当 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵时, 从左上角到右下角的直线称为对角线. 对角线左下侧所有元素都为零的方阵称为上三角阵; 对角线右上侧所有元素都为零的方阵称为下三角阵, 例如矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 2 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 0 & & 3 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 4 \end{pmatrix} \quad \text{与} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 2 & 4 & 0 \\ & & \ddots & \\ 3 & \cdots & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

分别是上三角阵和下三角阵.

对角线以外的元素全为零的方阵

$$A_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

称为对角矩阵, 简称对角阵, 因它完全由对角线元素所决定, 故也可记作

$$A_n = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n).$$

特别, 对角线元素都为 1 的对角阵

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为单位阵.

只有一列的矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**,也称作**列向量**,因为它与三维几何空间中的列向量

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

在形式上是一致的.

只有一行的矩阵

$$\mathbf{A} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \quad (1.4)$$

称为**行矩阵**,也称为**行向量**.为避免元素与元素之间的混淆,行矩阵(1.4)一般写成

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

行矩阵和列矩阵一般也用小写黑体字母如 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 等表示.

元素都是零的矩阵称为**零矩阵**,记作 $\mathbf{O}_{m \times n}$ 或 $\mathbf{O}$.特别,如果列矩阵为零矩阵时,也可记作 $\mathbf{0}$.

三、同型矩阵与矩阵的相等

如果两个矩阵的行数相同、列数也相同,就称它们是**同型矩阵**.

如果两矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 和 $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$ 是同型矩阵,且它们对应的元素相等,即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n),$$

就称矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相等,记为

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

§ 2 矩阵的运算及应用举例

本节介绍矩阵的加法、减法、数乘、乘法和转置等基本运算.正是有了这些运算,矩阵之间就有了一些最基本的关系.

一、矩阵的加法、减法和数与矩阵的乘法

定义 1.2 设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$.

(1) A 与 B 相加的和, 记作 $A+B$, 规定为

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

(2) 数 λ 与矩阵 A 相乘的积, 记作 λA , 规定为

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(3) A 与 B 的差, 记作 $A-B$, 规定为

$$A-B = A + (-1)B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}.$$

上述定义表明: 只有当两个矩阵是同型矩阵时, 才能进行加、减运算; 矩阵的加、减、数与矩阵的相乘运算归结为它们对应元素的加、减、数与数相乘的运算; 且运算结果仍是与原矩阵同型的矩阵.

设 A, B, C 为同型矩阵, λ, μ 为数. 由定义 1.2, 容易验证矩阵的加法、数乘矩阵满足以下运算规律:

- (i) 交换律: $A+B=B+A$;
- (ii) 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$;
- (iii) 分配律: $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B, (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;
- (iv) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)$.

另外, 把 $(-1)A$ 称为 A 的负矩阵, 记为 $-A$. 显然有

$$A+(-A)=O;$$

$$A+O=A,$$

可见, 零矩阵 O 在矩阵的加法中与数 0 在数的加法中起着类似的作用.

例 1.2 设矩阵 A, B, C 满足等式 $5(A+C)=2(2B-C)$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

求矩阵 C .

解 由 $5(A+C)=2(2B-C)$ 得

$$\begin{aligned} 5A+5C &= 4B-2C, \\ 7C &= 4B-5A, \end{aligned}$$

于是

$$C = \frac{1}{7}(4B-5A);$$

又

$$\begin{aligned} 4B-5A &= \begin{pmatrix} 20 & 12 & 4 \\ -12 & 4 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 5 & -10 \\ -5 & 25 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -7 & -21 & 7 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以

$$C = \frac{1}{7}(4B-5A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

二、矩阵的乘法

1. 定义和性质

先看一个例子.

例 1.3 (例 1.1 之续). 设力达公司三种产品的生产成本如表 1.1 所示, 该公司 2004 年各季度产品计划生产数如表 1.2 所示. 求此公司 2004 年各季度的生产成本的各项费用, 即原材料费用, 人工费用和杂项费用分别是多少?

解 根据表 1.1 和表 1.2, 力达公司 2004 年

$$\begin{aligned} \text{第一季度原材料费用} &= \text{甲产品每件原材料费用} \times \text{此季度甲产品生产数} + \\ &\quad \text{乙产品每件原材料费用} \times \text{此季度乙产品生产数} + \\ &\quad \text{丙产品每件原材料费用} \times \text{此季度丙产品生产数} \\ &= 10 \times 400 + 30 \times 200 + 20 \times 580 = 21\,600 (\text{百元}). \end{aligned}$$

类似地,

$$\text{第一季度人工费用} = 3 \times 400 + 4 \times 200 + 5 \times 580 = 4\,900 (\text{百元}),$$

$$\text{第一季度杂项费用} = 1 \times 400 + 2 \times 200 + 2 \times 580 = 1\,960 (\text{百元}).$$

对其他各季度作相似的计算, 可得到表 1.3.

表 1.3

季度 生产成本	1	2	3	4
1. 原材料	21 600	24 700	23 700	22 600
2. 人工	4 900	5 490	5 310	5 080
3. 杂项费用	1 960	2 210	2 130	2 040

与例 1.1 相同,把上表中数据写成 3×4 矩阵 C ,

$$C = \begin{bmatrix} 21\,600 & 24\,700 & 23\,700 & 22\,600 \\ 4\,900 & 5\,490 & 5\,310 & 5\,080 \\ 1\,960 & 2\,210 & 2\,130 & 2\,040 \end{bmatrix}.$$

于是,矩阵 C 的第 i 行、第 j 列元素 c_{ij} ($i=1,2,3; j=1,2,3,4$) 表示的是力达公司 2004 年第 j 季度、第 i 项费用支出,它恰好是例 1.1 中(1.1)式矩阵 A

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 30 & 20 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

的第 i 行的元素与(1.2)式矩阵 B

$$B = \begin{bmatrix} 400 & 450 & 450 & 400 \\ 200 & 260 & 240 & 220 \\ 580 & 620 & 600 & 600 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

的第 j 列的对应元素乘积之和.我们把矩阵 C 称为矩阵 A 与 B 的乘积,记为 $C = AB$.一般地,有以下定义.

定义 1.3 设矩阵 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times p$ 矩阵, $B = (b_{ij})$ 是 $p \times n$ 矩阵,那么规定矩阵 A 与 B 的乘积是一个 $m \times n$ 矩阵,记为 $C = AB$,且它的 (i, j) 元 c_{ij} 为

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n).$$

上述定义表明:只有当矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数时, A 与 B 才能相乘,且乘积矩阵 $C = AB$ 的行数即是 A 的行数, C 的列数即是 B 的列数; C 的 (i, j) 元 c_{ij} 为 A 的第 i 行元素与 B 的第 j 列对应元素的乘积之和.

例 1.4 (1) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, 求 AB ;