

微积分和数学分析引论

第二卷 第三分册

R. 柯朗 F. 约翰 著

科学出版社

微积分和数学分析引论

第二卷 第三分册

R.柯朗 F.约翰 著

刘西垣 张南岳 林源渠 译

丁同仁 校

科学出版社

1989

内 容 简 介

本书内容是原书第二卷的最后三章。第六章从力学的例子出发,运用多元函数微积分,讲述了微分方程的某些理论;第七章讲变分法;第八章给出单复变函数的一个简要的、系统的论述。每章节后附有练习和习题。

读者对象为高等院校理工科师生与工程技术人员。

R. Courant F. John

INTRODUCTION TO CALCULUS AND ANALYSIS

Volume 2

John Wiley and Sons, Inc. 1974

微积分和数学分析引论

第二卷 第三分册

R.柯朗 F.约翰 著

刘西垣 张南岳 林源渠 译

丁同仁 校

责任编辑 刘嘉善

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1989年5月第一版 开本:850×1168 1/32

1989年5月第一次印刷 印张:6 3/8

印数:0001—6 190 字数:168,000

ISBN 7-03-000927-4/O·225

定价:4.30元

目 录

第六章 微分方程	765
6.1 空间质点运动的微分方程.....	765
a. 运动方程(765) b. 能量守恒原理(767) c. 平衡, 稳定性(769)	
d. 在平衡位置附近的小振动(771) e. 行星运动(774) 练习 6.1c	
(780) f. 边值问题, 有载荷的缆与有载荷的梁(781)	
6.2 一般的一阶线性微分方程.....	787
a. 分离变量法(787) b. 一阶线性方程(789) 练习 6.2a(791)	
6.3 高阶线性微分方程.....	792
a. 叠加原理, 解通(792) b. 二阶齐次微分方程(796) 练习 6.3b	
(798) c. 非齐次微分方程, 参数变易法(800) 练习 6.3c(803)	
6.4 一般的一阶微分方程.....	805
a. 几何解释(805) b. 曲线族的微分方程, 奇解, 正交轨线(807)	
c. 解的存在唯一性定理(809) 练习 6.4(813)	
6.5 微分方程组和高阶微分方程.....	816
练习 6.5(817)	
6.6 用待定系数法求积分.....	818
练习 6.6(819)	
6.7 电荷引力的位势和拉普拉斯方程.....	820
a. 质量分布的位势(820) b. 位势的微分方程(824) c. 均匀双层	
位势(825) d. 平均值定理(828) e. 圆的边值问题, 普哇松	
(Poisson)积分(829) 练习 6.7(832)	
6.8 来自数学物理的偏微分方程的其它例子.....	832
a. 一维波动方程(832) b. 三维空间的波动方程(834) c. 自由	
空间中的马克斯韦耳(Maxwell)方程(836) 练习 6.8(839)	
第七章 变分学	842
7.1 函数及其极值.....	842
7.2 泛函极值的必要条件.....	846

a. 第一变分等于零(846) 习题 7.2a(847) b. 欧拉微分方程的推导(847) c. 基本引理的证明(851) d. 一些特殊情形的欧拉微分方程的解. 例子(852) 习题 7.2d(855) e. 欧拉表达式恒等于零的情形(856)	
7.3 推广.....	857
a. 具有多于一个自变函数的积分(857) b. 例子(859) 习题 7.3b(861) c. 哈密尔顿原理. 拉格朗日方程(861) d. 含高阶导数的积分(863) e. 多自变量(864)	
7.4 含附带条件的问题. 拉格朗日乘子.....	866
a. 通常的附带条件(866) 习题 7.4 a(868) b. 其他类型的附带条件(869) 习题 7.4b(870)	
第八章 单复变函数	872
8.1 幂级数表示的复函数.....	872
a. 极限. 复数项的无穷级数(872) b. 幂级数(875) c. 幂级数的微分法和积分法(876) d. 幂级数的例子(879)	
8.2 单复变函数一般理论的基础.....	880
a. 可微性条件(880) b. 微分学的最简单运算(883) c. 保角变换. 反函数(886)	
8.3 解析函数的积分.....	887
a. 积分的定义(887) b. 柯西定理(889) c. 应用. 对数函数, 指数函数及一般幂函数(891)	
8.4 柯西公式及其应用.....	895
a. 柯西公式(895) b. 解析函数的幂级数展式(896) c. 函数论与位势理论(899) d. 柯西定理的逆定理(899) e. 解析函数的零点, 极点和留数(900).....	
8.5 留数定理对复积分(围道积分)的应用.....	902
a. 证明公式(902) b. 证明公式(903) c. 留数定理对于有理函数的积分的应用(904) d. 留数定理与常系数微分方程(907)	
8.6 多值函数与解析开拓.....	908
问题(8.1—8.5)(912)	
解答	921

第六章 微分方程

在第一卷第九章中，我们已经讨论过特殊形状的微分方程。在本书的范围内，虽然我们不可能试图详细地展开它的一般理论，但是，在这一章中，我们从力学中的进一步的例子出发，运用多元函数微积分，至少也能给出微分方程这个课题某些原理的一个梗概。

6.1 空间质点运动的微分方程

a. 运动方程

在第一卷(第四章第421—447页)中，我们讨论了限定在 x, y 平面内移动的质点的运动。现在我们去掉这一限制，考虑一集中于坐标为 (x, y, z) 的点上的质量 m 。从原点到该质点的定位向量具有分量 x, y, z ，我们记之为 \mathbf{R} 。如果能把 (x, y, z) 或 \mathbf{R} 表成时间 t 的函数，那么，质点的运动就在数学上得到了表示。同以前一样，如果用圆点标记关于时间 t 的微商，那么长度为

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (1)$$

的向量 $\dot{\mathbf{R}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 表示速度，向量 $\ddot{\mathbf{R}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ 表示质点的加速度。

确定运动的基本工具是牛顿第二定律¹⁾，即加速度向量 $\ddot{\mathbf{R}}$ 与质量 m 的乘积等于作用在质点上的力 $\mathbf{F} = (X, Y, Z)$ ：

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} \quad (2a)$$

或，用分量式，

1) "Mutationem motuo proportionalem esse vi mofrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur" (即，运动之变化与作用力成比例，且发生在沿力的作用直线的方向上。)

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z. \quad (2b)$$

只要给出关于力 \mathbf{F} 的充分信息, 这些关系式¹⁾ 就能用来决定运动。

一个例子是地球表面附近的表示重力的恒力场。如果取重力作用方向为 z 轴的负方向, 则重力可表为向量

$$\mathbf{F} = (0, 0, -mg) = -mg(\text{grad}z), \quad (3)$$

其中 g 是重力加速度常数(见第一卷第 422 页)。

另一个例子是, 集中于坐标系原点上的质量 μ 按照牛顿万有引力定律产生的吸引力场(见第一卷第 437 页)。如果

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\mathbf{R}|$$

是质量为 m 的质点 (x, y, z) 与原点的距离, 则力场可表示成

$$\mathbf{F} = \mu m \gamma \left(\text{grad} \frac{1}{r} \right), \quad (4a)$$

其中 γ 是万有引力常数。在这种情况下, 牛顿运动定律 (2a) 表为

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mu \gamma \text{grad} \frac{1}{r} \quad (4b)$$

或, 用分量式,

$$\ddot{x} = -\mu \gamma \frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\mu \gamma \frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\mu \gamma \frac{z}{r^3}.$$

一般说来, 如果 \mathbf{F} 是分量为位置的已知函数 $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ 的力场, 则运动方程

$$m\ddot{x} = X(x, y, z), \quad m\ddot{y} = Y(x, y, z), \quad m\ddot{z} = Z(x, y, z) \quad (5)$$

构成关于三个未知函数 $x(t), y(t), z(t)$ 的三个微分方程的系统。质点力学的基本问题是: 当运动开始时(比如说, 在时间 $t = 0$), 已知质点的位置(即坐标 $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, $z_0 = z(0)$)和初速度(即量 $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$, $\dot{y}_0 = \dot{y}(0)$, $\dot{z}_0 = \dot{z}(0)$), 从微分方程去确定质点的轨道。寻求既满足这些初条件, 又对所有 t 值满足三个微分方程的三个函数的问题就是通常所谓的微分方程组的求解

1) 向量 $m\dot{\mathbf{R}}$ 称为动量, 所以牛顿定律说的是“力等于动量的变化率”。

或积分¹⁾问题。

b. 能量守恒原理

速度向量 $\dot{\mathbf{R}}$ 与质点运动方程 (2a) 作数量积

$$m\dot{\mathbf{R}} \cdot \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{R}} = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z} \quad (6a)$$

可得出一个重要结果。上式左端可写成

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} mv^2, \quad (6b)$$

即质点的动能(运动能) $\frac{1}{2}mv^2$ 对时间的导数。关于 t 从 t_0 到 t_1 积分方程(6a), 我们得到在 t_0 到 t_1 时间间隔内质点动能的改变量是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= \int_{t_0}^{t_1} \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt \quad (6c) \\ &= \int (Xdx + Ydy + Zdz), \end{aligned}$$

其中线积分展布于质点从 t_0 到 t_1 经过的路径上。有向弧上的积分

$$\int Xdx + Ydy + Zdz$$

称为沿该弧运动时力 $\mathbf{F} = (X, Y, Z)$ 所作的功²⁾。因此, (6c) 称为能量方程: 动能的增加等于在运动中外力所作的功。

如果力场能表成某函数的梯度, 即

$$\mathbf{F} = \text{grad}\phi, \quad (7a)$$

在这种重要情形下, 微分形式

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\phi$$

的积分不依赖于路径, 仅依赖于路径的起点和终点(见第 96 页)。按照 Helmholtz (海姆霍兹) 的说法, (7a) 类型的力场称为保守

1) 由于解微分方程可认为是通常积分过程的一般化, 因而在这里用积分一词。

2) 见第一卷第 444 页。引入弧长 s 作参数, 线积分有形式

$$\int \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{ds} ds,$$

因而, 它等于力沿运动方向的分量与距离乘积的和的极限。

场⁰。对保守场，用 $U = -\phi$ 引入势能(位能) U ，则运动方程的形状是：

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -\text{grad}U$$

或，用分量式，

$$m\ddot{x} = -U_x, \quad m\ddot{y} = -U_y, \quad m\ddot{z} = -U_z. \quad (7b)$$

势能作为位置 (x, y, z) 的函数，在相差一个任意常数的范围内，是由力场所确定的。我们得到保守力在运动中所作的功为

$$\int Xdx + Ydy + Zdz = -\int dU = U_0 - U_1,$$

其中 U_0 和 U_1 分别是质点在时刻 t_0 和 t_1 的位置上的势能的值。与(6c)比较，得到

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + U_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 + U_0.$$

因此，在运动中量 $\frac{1}{2}mv^2 + U$ 在任何时刻 t_0 和 t_1 有相同的值。无须作这些概念的物理解释，我们已经得到了保守力场中质点的能量守恒定律的一种形式：

总能量——即，动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 与势能 U 之和——在运动中保持常数。

在下节的例题里，我们演示这个定理怎样用于运动方程的实际求解。

由方程(3)和(4 a)定义的两个力场都是保守场。在均匀重力场(3)中，运动方程化简为

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g. \quad (8a)$$

很简单，它们的通解是

$$x = a_1t + a_2, \quad y = b_1t + b_2, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2. \quad (8b)$$

显然，这里常数 (a_1, b_1, c_1) 给出质点在时间 $t = 0$ 的初位置，常数 (a_2, b_2, c_2) 给出初速度。由方程(8b)以时间 t 作为参数给出的质点轨迹，是其轴平行于 z 轴的一条抛物线。由于力场是

1) “保守”一词源出于我们马上将要推出的能量守恒定理。

$-mg \text{ grad } z$, 势能应是 $U = mgz + \text{常数}$. U 的变化与高度 z 的变化成比例. 因而, 能量守恒定律的形式为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 + mgz &= \text{常数} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 & (8c) \\ &= \frac{1}{2}m(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + mgc_1. \end{aligned}$$

所以, 在轨道的最高点处速度 v 最小.

代替质点的自由降落, 我们考虑在重力场 $\mathbf{F} = -mg \text{ grad } z$ 的影响下, 约束于曲面 $z = f(x, y)$ 之上, 且反作用力垂直于该曲面¹⁾的质点的运动. 由于反作用力在运动方向上没有分力, 因而不做功, 在运动中所作的功是保守重力场作的功. 因此, 可得出与自由落体一样的能量方程

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{常数}, \quad (9)$$

区别仅在于现在 $z = f(x, y)$ 是坐标 x, y 的一个给定的函数.

c. 平衡. 稳定性

保守力场中质点的运动方程

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -\text{grad}U \quad (10a)$$

能用于讨论平衡位置附近的运动. 如果质点保持静止, 我们称它在力场的影响下平衡. 为使质点平衡, 在考虑的整个时间间隔里它的速度和加速度必须都是0. 因此, 运动方程 (10a) 引出

$$\text{grad}U = 0 \quad (10b)$$

或

$$U_x = U_y = U_z = 0 \quad (10c)$$

是平衡的必要条件. 从而, 一个平衡位置 (x_0, y_0, z_0) 必是势能 U 的一个临界点. 反之, 因为常数向量

$$\mathbf{R} = (x_0, y_0, z_0)$$

显然满足 (10a), 所以, U 的每一临界点 (x_0, y_0, z_0) 都是静止的一个

1) 球面摆提供了一个例子, 在那里, 一个质点被约束在一球面上运动. 试与第一卷第429页讨论过的曲线上的运动进行比较.

可能的位置。

特别重要的是平衡的稳定性概念。稳定性是指：如果给平衡状态以轻微的扰动，由此产生的整个运动与静止状态仅有微小的区别¹⁾。更确切地说就是，设 r_1 和 v_1 是任意正数，我们能找到与 r_1 和 v_1 对应的如此之小的两个正数 r_0, v_0 ，使得只要质点离开平衡位置移动的距离不大于 r_0 ，且出发时的速度不大于 v_0 ，那么在它整个后继的运动中它与平衡点的距离永远不能大于 r_1 及速度永远不能大于 v_1 。

特别有趣的是，在势能取严格相对最小值²⁾（相对最小值即极小值——译者注）的点上，平衡是稳定的。值得注意的是，我们无须实际解出运动方程就能证明关于稳定性的这个命题。为简单起见，假设考虑的平衡位置是原点（借助变换总是能作到的），此外，因为势能允许加上一个任意常数，故我们可假定 $U(0,0,0) = 0$ 。由于 U 在原点是严格相对最小值，我们能找到正数 $r < r_1$ ，使得关于原点的半径为 r 的球面及其内部除原点外处处有 $U > 0$ 。因此， U 在球面上的最小值是一正数 a 。因为 U 连续，我们可求得 $r_0 < r$ ，使得在关于原点的半径为 r_0 的球体内

$$U(x, y, z) < \frac{a}{2} \text{ 和 } U(x, y, z) < \frac{1}{4}mv_1^2.$$

此外，设正数 v_0 小到使 $\frac{1}{2}mv_0^2 < \frac{a}{2}$ 和 $\frac{1}{2}mv_0^2 < \frac{1}{4}mv_1^2$ 都成立。那么，当质点的初位置与原点距离小于 r_0 ，初速度小于 v_0 时，质点的初始总能量就满足不等式

- 1) 用约束于曲面 $z = f(x, y)$ 上，在重力作用下的质点的类似的二维运动问题能够很好地解释这个概念。因平衡位置是势能 $mgz = mgf(x, y)$ 的临界点，在此，就是曲面 $z = f(x, y)$ 的最高点或最低点或鞍点。在重力作用下，处在向下凸的球形碗的最低点的静止质点的平衡是稳定的。相反，在向上凸的球形碗的最高点静止的质点处于不稳定平衡；即使最轻微的扰动都会引起位置的巨大变化。由于总可以假设质点受到小扰动，所以，不稳定平衡是不能保持的，并且未必能观察得到。
- 2) 在严格(相对)最小点上， U 的值小于它的一个充分小邻域内的所有其余点上的值。定义见第326—7页。

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) \leq \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}a < a, \quad (11a)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) < \frac{1}{4}mv_1^2 + \frac{1}{4}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2. \quad (11b)$$

由于能量在整个运动中是常数,从(11a)看出,在后来的任何时刻

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) < a,$$

从而,

$$U(x, y, z) < a.$$

由于质点最初处于半径为 r 的球的内部,又由于在球面上 $U \geq a$,因此,质点永远不能到达此球的表面。这就证明了质点与原点的距离永远不能超过 $r < r_1$ 。又因在半径为 r 的球内部 $U \geq 0$,从(11b)可得

$$\frac{1}{2}mv^2 < \frac{1}{2}mv_1^2.$$

因此,质点的速度永远不能超过值 v_1 ,证毕。

d. 在平衡位置附近的小振动

在对应于势能最小值的稳定平衡位置附近的质点运动能用简单方法去近似。为简单起见,限于讨论在 x, y 平面上的运动,并假设没有作用于 z 轴方向上的力。我们还假设势能 $U(x, y)$ 在原点取最小值, $U(0, 0) = 0$ 。此外,在这个最小值点上 $U_x = U_y = 0$ 。按 Taylor (泰勒)定理展开 U 得到

$$U = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \dots\dots\dots$$

如果二次型

$$Q(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) \quad (12a)$$

正定¹⁾,也就是

1) 见第349页。 Q 的正定性是严格相对最小值的充分条件,但并非必要的。但是, Q 既非不定又非负定是必要的。

$$a > 0, ac - b^2 > 0, \quad (12b)$$

则函数 U 在原点有严格相对最小值。假设满足条件 (12b), 则在平衡位置原点的充分小的邻域内能够用二次型 Q 足够准确地代替势能 $U^{(1)}$, 在此假设下, 运动方程形为

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -\text{grad}Q$$

或

$$m\ddot{x} = -ax - by, \quad m\ddot{y} = -bx - cy. \quad (12c)^2$$

如果先将 x, y 轴旋转一个适当选择的角度 ϕ , 使新坐标轴与椭圆 $Q = \text{常数}$ 的主轴重合, 那么, 方程 (12c) 能够完全积分。作正交变换

$$x = \xi \cos\phi - \eta \sin\phi, \quad y = \xi \sin\phi + \eta \cos\phi,$$

此处 ϕ 根据下式确定

- 1) 我们不试图在此严格检验这一“似乎有理”的假设是合理的。
- 2) 我们可再来解释这些方程近似于被约束于曲面 $z = f(x, y)$ 之上并在曲面最小值点附近运动的质点在重力作用下的运动方程。考虑到质点受重力 $(0, 0, -mg)$ 和与曲面垂直的反作用力 $(-\lambda f_x, -\lambda f_y, \lambda)$ (λ 是未定乘子) 的作用, 这里确切的运动方程是

$$\ddot{x} = -\lambda f_x, \quad \ddot{y} = -\lambda f_y, \quad \ddot{z} = -g + \lambda.$$

注意到

$$\ddot{z} = \frac{d^2 f}{dx^2} \dot{x}^2 + f_{xx} \dot{x}^2 + 2f_{xy} \dot{x}\dot{y} + f_{yy} \dot{y}^2,$$

我们可消去 λ , 而且得到关于两个未知函数的方程

$$\ddot{x} = -\lambda f_x, \quad \ddot{y} = -\lambda f_y,$$

其中

$$\lambda = \frac{g + f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2}{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

如果 f 在原点取最小值, 并由二次型

$$f = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2) \quad (13a)$$

作近似。则在原点附近, 忽略全部非线性项后, 得到形如 (12c) 的微分方程

$$\ddot{x} = -g(\alpha x + \beta y), \quad \ddot{y} = -g(\beta x + \gamma y). \quad (13b)$$

例如, 如果曲面是球面

$$z = L - \sqrt{L^2 - x^2 - y^2}$$

(“长度为 L 的球面摆”), 我们得出

$$\ddot{x} = -\frac{g}{L}x, \quad \ddot{y} = -\frac{g}{L}y. \quad (13c)$$

$$Q = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = \frac{1}{2}(\alpha\xi^2 + \gamma\eta^2),$$

其中 α, γ 是适当的正数¹⁾。在新的直角坐标系 ξ, η 中, 运动方程 (12c) 变成

$$m\ddot{\xi} = -\alpha\xi, \quad m\ddot{\eta} = -\gamma\eta. \quad (14a)$$

与第一卷(第 428 页)一样, 这两个方程都能完全积分。我们得到

$$\xi = A_1 \sin \sqrt{\frac{\alpha}{m}}(t - c_1), \quad \eta = A_2 \sin \sqrt{\frac{\gamma}{m}}(t - c_2), \quad (14b)$$

此处 c_1, c_2, A_1, A_2 是积分常数, 它们能使运动满足任何指定的初条件²⁾。

解的形式说明, 在稳定平衡位置附近的运动是由 ξ 和 η 两个主方向上的简谐振动迭加而成的, 振动的频率是 $\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$ 和 $\sqrt{\frac{\gamma}{m}}$ 。这类振动的一般讨论证明, 复合运动可以取多种形式, 但在这里我们将不作这样的讨论。

举几个这类复合振动的例子。我们首先考虑由方程

$$\xi = \sin(t + c), \quad \eta = \sin(t - c)$$

表示的运动。消去时间 t , 得到方程

$$(\xi + \eta)^2 \sin^2 c + (\xi - \eta)^2 \cos^2 c = 4 \sin^2 c \cos^2 c,$$

它表示一个椭圆。振动的两个分量有相同的频率 1 和相同的振幅 1, 但是位相差为 $2c$ 。如果位相差连续取 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 间的全体值, 对应的椭圆就从退化直线 $\xi - \eta = 0$ 变到圆 $\xi^2 + \eta^2 = 1$, 而振动从所谓线性振动变到圆振动(参看图 6.1—6.3)。

1) 我们立即看到, ϕ 是由方程

$$\operatorname{tg} 2\phi = \frac{2b}{a-c}$$

决定的。由 Q 的正定性推出 α, γ 为正。

2) 有趣的是, 在不稳定平衡的情况下, 常数 α, γ 至少一个是负的, (14b) 中的三角函数要用双曲函数代替, 坐标 ξ, η 不能同时保持对所有的 t 有界。

3) 在球面摆 (13c) 的情形下, 两频率有相同的值 $\sqrt{\frac{g}{L}}$ 。

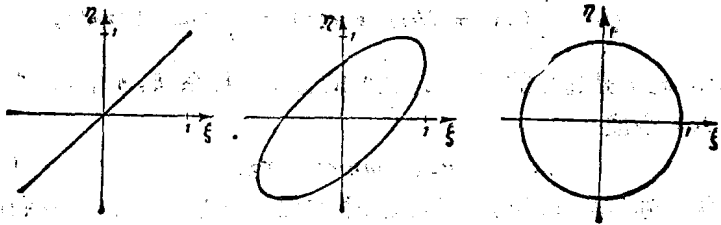


图 6.1—6.3 振动的简图

第二例，如果考虑由方程

$$\xi = \sin t, \quad \eta = \sin 2(t - c)$$

表示的运动，其中频率不再相等，我们得到显然更复杂的振动图象。图 6.4—6.6 分别给出位相差为 $c = 0, c = \frac{\pi}{8}$ 和 $c = \frac{\pi}{4}$ 的曲线。在前两种情况下，质点在一条封闭曲线上连续运动，但在最后一种情况下，它在抛物线 $\eta = 2\xi^2 - 1$ 的弧上往复摆动。两相交成直角的方向上的不同简谐振动迭加得到的曲线通常称为 Lissajous 图形。

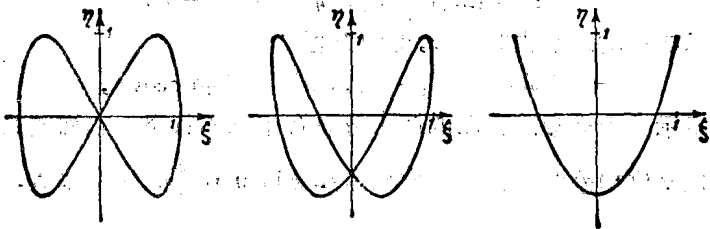


图 6.4—6.6 振动的简图

e. 行星运动¹⁾

在上面讨论的例题中，运动微分方程能够直接(或经简单的变换后)被写成每一坐标仅出现在一个微分方程当中，因而能用初等积分法来定解。现在，我们来考虑一种最重要的运动情况，这时运

1) 圆运动的特殊情形已在第一卷(第 437 页)讨论过。

动方程已不再能够分离成上述简单形式，以至在积分它们时多少包含着更复杂的计算。所讨论的问题是从牛顿引力定律推导开普勒 (Kepler) 行星运动定律。假设在坐标系的原点有一质量为 μ 的物体 (例如, 太阳), 每单位质量受它的万有引力是向量

$$\gamma \mu \operatorname{grad} \frac{1}{r}.$$

质量为 m 的质点 (一个行星) 在这个力场影响下怎样运动呢? 运动方程是 (见第 766 页)

$$\ddot{x} = -\gamma \mu \frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\gamma \mu \frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\gamma \mu \frac{z}{r^3}. \quad (15)$$

为了积分它们, 我们首先把能量守恒定律 (见第 768 页) 写成

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\gamma \mu m}{r} = C,$$

其中 C 在整个运动中是由初条件决定的常数。

从 (15) 能推出仅包含速度分量, 而不包含加速度分量的方程。如果用 y 乘第一个运动方程, 用 x 乘第二个运动方程, 然后相减, 就得到

$$\dot{x}y - y\dot{x} = 0 \text{ 或 } \frac{d}{dt}(xy - yx) = 0,$$

积分得

$$xy - yx = c_1,$$

类似地, 从其余运动方程得到¹⁾

- 1) 应用向量概念也能得到这三个方程。如果用定位向量 \mathbf{R} 对运动方程两端向量叉积, 由于力向量与定位向量同向, 于是右端得 0, 左端的表达式 $\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}}$ 是向量 $\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}$ 关于时间 t 的导数, 所以, 推出向量 $\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{C}$ 对时间有常数值; 这正与上面坐标方程所说明的一样。

正如我们见到的, 这个方程不依赖于我们特殊的问题, 而一般地适用于力与定位向量同向的每一运动。

向量 $\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}$ 称为速度矩, 而向量 $m\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}$ 称为运动的动量矩。从向量叉积的几何意义容易得到刚才给出的关系式的下述直观解释 (参看正文中后面的讨论)。如果把运动质点投影到坐标平面上, 在每一坐标平面上考虑从原点到点的投影的向径在时间 t 内扫过的面积, 那么该面积与时间成比例 (面积定理)。

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_2, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = c_3.$$

这些方程能够用从直觉的观点来看似乎很有道理的方法来极大地简化我们的问题。不失一般性，我们可选坐标系使运动开始时（即 $t = 0$ 时），质点位于 x, y 平面上，它的速度向量同时也在这一平面上，于是 $z(0) = 0, \dot{z}(0) = 0$ ，将它们代入上面方程，注意右端是常数，可得

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c = h, \quad (16a)$$

$$y\dot{z} - z\dot{y} = 0, \quad (16b)$$

$$z\dot{x} - x\dot{z} = 0. \quad (16c)$$

首先，从这些方程可断言整个运动处于平面 $z = 0$ 上。由于，自然要排除太阳和行星最初相碰的可能性，应设三个坐标 (x, y, z) 最初不同时为 0，从而在 $t = 0$ 时，由 $z(0) = 0$ 我们有，比如说， $x(0) \neq 0$ 。现在，从 (16c) 推知

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{z}{x} \right) = -\frac{z\dot{x} - \dot{z}x}{x^2} = 0,$$

因而， $z = ax$ ， a 是常数。如果在此取 $t = 0$ ，则由方程 $z(0) = 0$ 和 $x(0) \neq 0$ 推知 $a = 0$ ，这样一来 z 永远是 0。

因此，问题化简为积分下列两个微分方程

$$\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\gamma \mu m}{r} = C, \quad (17a)$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = h. \quad (17b)$$

用 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 把直角坐标 (x, y) 变到极坐标 (r, θ) ，其中 r, θ 现在都是 t 的待定函数。由

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = r^2 \dot{\theta},$$

得到关于极坐标 r, θ 的两个微分方程

$$\frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{\gamma \mu m}{r} = C, \quad (17c)$$

$$r^2 \dot{\theta} = h. \quad (17d)$$

前一方程是能量守恒定理，而后一方程表示了开普勒面积定律。事