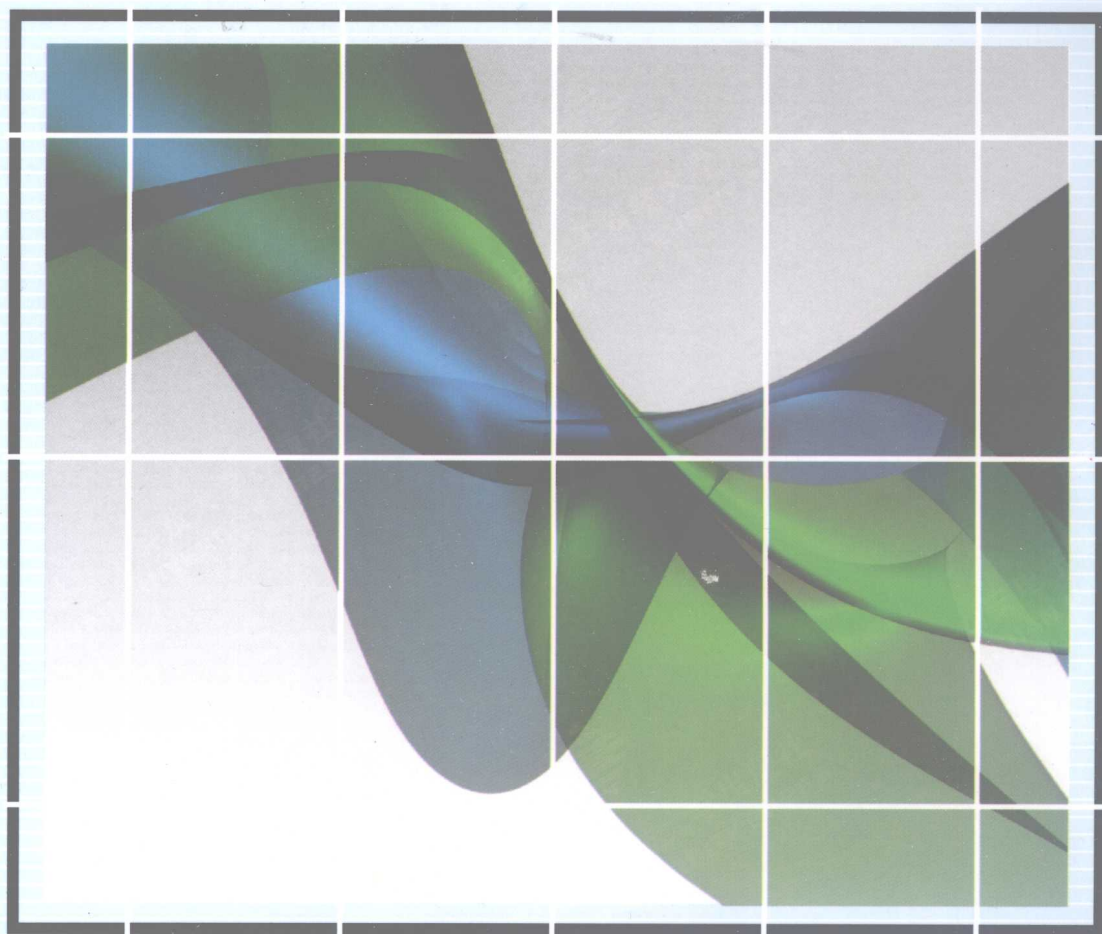


高等学校工科电子类规划教材

离散数学 (第三版)

方世昌 编著



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

高等学校工科电子类规划教材

离散数学

(第三版)

方世昌 编著

西安电子科技大学出版社

2009

内 容 简 介

本书介绍计算机专业最需要的离散数学基础知识,共8章,内容包括数理逻辑、集合、二元关系、函数、无限集合、代数、格与布尔代数、图论等,并含有较多的与计算机科学和工程有关的例题和习题。本书适合作为高等理工院校计算机科学、计算机工程和计算机应用专业本科学生的教材,也可供相关工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/方世昌编著. —3版. —西安:西安电子科技大学出版社,2009.1

高等学校工科电子类规划教材

ISBN 978 - 7 - 5606 - 2157 - 9

I. 离… II. 方… III. 离散数学—高等学校—教材 IV. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 179567 号

责任编辑 毛红兵 孟秋黎

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 西安文化彩印厂

版 次 2009年1月第3版 2009年1月第32次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 21.375

字 数 499千字

印 数 245 001~249 000册

定 价 30.00元

ISBN 978 - 7 - 5606 - 2157 - 9/TP · 1100

XDUP 2449003—32

* * * 如有印装问题可调换 * * *

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

第三版前言

教育部规定离散数学为精选基础课程，本书的取材、结构和表达形式均符合这一精神。自出版以来已发行 20 多万册，实践证明它能满足工科大学计算机等信息专业的需要，也符合现代科学的发展趋势，所以这次修订和第二版一样，仅作局部的修改和完善，主要体现在以下三点：

1. 图论内容略有增加，使图论知识更完整。这是为适应图论在其它学科中应用日益广泛的发展趋势。

2. 更换了参考文献。原列的图书在市场上已不存在，为了方便读者参阅现重新提供一些同类书籍，它们的基本内容和本书基本一致，只是叙述方式、深浅略有不同。

3. 对原书中读者反映较难理解或容易疏忽之处，增加了一些说明和例题，并对上一版少数印刷错误作了改正。

当然，第三版教材仍可能出现错误或不妥之处，欢迎读者提出批评和建议。

编 者

2008 年 11 月 20 日

第二版前言

本书出版已 13 年了, 经过全国众多院校的应用, 证明本书的内容基本上符合工科大学计算机专业的需要, 文字组织形式亦适合于教学和自学。所以这次修订仅作局部的变动。

1. 为适应计算机向高速、并行、多功能、网络化方向发展, 内容有少量调整, 增强了有利于这一方向的一些基础知识, 删去了某些重要性有所下降的内容, 如原 3.6 节相容关系。但总份量仍维持原水平, 以免增加课时。

2. 部分内容的阐述(包括定理证明)作了改进, 大多是为了更易读易懂, 少数是由于时易境迁情况有所改变。

3. 原书存在一些缺点和错误, 一一作了改正, 希望不再出现。

当然, 由于主客观原因, 修订后的版本也会出现新的缺点和错误, 仍希广大读者批评指正。

本修订稿承蒙西安电子科技大学武波老师审阅, 提供了许多改进意见, 在此表示感谢。

编者

1996 年 9 月

初 版 前 言

本教材系由电子工业部计算机与自动控制教材编审委员会工科电子类计算机教材编审小组评选审定，并推荐出版。由中国人民解放军通信工程学院方世昌编写，上海交通大学左孝凌担任主审。

教材介绍计算机专业最需要的离散数学基础知识，主要内容有数理逻辑、集合论、二元关系、函数、无限集合、代数系统、格与布尔代数、图论等。教材均按工科电子类计算机教材编审小组审定的大纲进行编写和审阅，故适合于工科大学计算机专业作为教材。

鉴于离散数学在现代科学中的重要性日益增加，它不仅是计算机专业的必修课程，也为其它某些专业和工程技术人员所必需。所以，书中内容的阐述较为详尽，力求深入浅出，适于自学。

教完全书约需 110 学时，毋需特殊先修知识，但在大学二、三年级开设较好。书中习题数量较多，可选做二分之一，但勿少于三分之一。

打 * 的节和小节大多是为了扩展知识的深广度而列入的，或为了某些专业特殊需要而列入。在课时不充裕的情况下，宜略去，不会影响后继内容的学习。

打 * 的习题是较难的题，供优秀学生选做，可不作要求。

本书在编写过程中得到南京工学院王能斌、杨祥金老师的指导和帮助，他们审阅了全部稿件，提出许多宝贵意见，在此表示诚挚的感谢。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编者

1983 年 12 月 24 日

符 号 表

逻 辑

- | | |
|--------------------------|--------------|
| 1. $\neg P$ | 非 P |
| 2. $P \vee Q$ | P 或 Q |
| 3. $P \wedge Q$ | P 并且 Q |
| 4. $P \rightarrow Q$ | P 蕴含 Q |
| 5. $P \leftrightarrow Q$ | P 等值于 Q |
| 6. $P \Rightarrow Q$ | P 永真蕴含 Q |
| 7. $P \Leftrightarrow Q$ | P 恒等于 Q |
| 8. $\forall$ | 全称量词 |
| 9. $\exists$ | 存在量词 |
| 10. $\exists !$ | 存在唯一的…… |

集 合

- | | |
|--|--|
| 1. $a \in A$ | a 是集合 A 的元素 (a 属于 A) |
| 2. $a \notin A$ | a 不属于 A |
| 3. $A \subseteq B$ | 集合 A 包含于集合 B 中 |
| 4. $A \subset B$ | 集合 A 真包含于集合 B 中 |
| 5. $\emptyset$ | 空集合 |
| 6. U | 全集合 (论述域) |
| 7. $A \cup B$ | 集合 A 和集合 B 的并 |
| 8. $A \cap B$ | 集合 A 和集合 B 的交 |
| 9. $A - B$ | 集合 B 关于集合 A 的相对补 |
| 10. $\overline{A}$ | 集合 A 的绝对补 |
| 11. $\rho(A)$ | A 的幂集合 |
| 12. $\bigcup_{i \in S} A_i$ | $\{x \mid \exists i (i \in S \wedge x \in A_i)\}$ |
| 13. $\bigcap_{i \in S} A_i$ | $\{x \mid \forall i (i \in S \rightarrow x \in A_i)\}$ |
| 14. $A \times B$ | A 和 B 的笛卡尔乘积 |
| 15. $\prod_{i=1}^n A_i$ | $A_1, \dots, A_n$ 的笛卡尔乘积 |
| 16. $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ | 有序 n 重组 |

字 符 串 集 合

- | | |
|---------------|------------------------------|
| 1. Σ | 字母表 |
| 2. Λ | 空串 |
| 3. $\ x\ $ | 串 x 的长度 |
| 4. Σ^+ | 字母表 Σ 上的所有非零有限长度的串的集合 |

- | | |
|---------------|--|
| 5. Σ^* | $\{\wedge\} \cup \Sigma^+$ |
| 6. AB | 连结积 $\{xy \mid x \in A \wedge y \in B\}$ |
| 7. A^n | $\{x_1 x_2 \cdots x_n \mid x_i \in A\}$ |
| 8. A^+ | $\bigcup_{i \in I_+} A^i$ |
| 9. A^* | $\bigcup_{i \in N} A^i$ |

数

- | | |
|------------------------|---|
| 1. $\lceil x \rceil$ | x 的顶函数, 即数 n , $x \leq n < x+1$ |
| 2. $\lfloor x \rfloor$ | x 的底函数, 即数 n , $x-1 < n \leq x$ |
| 3. N | 自然数集合 $\{0, 1, 2, \dots\}$ |
| 4. I | 整数集合 |
| 5. I_+ | 正整数集合 |
| 6. Q | 有理数集合 |
| 7. Q_+ | 正有理数集合 |
| 8. R | 实数集合 |
| 9. R_+ | 正实数集合 |
| 10. (a, b) | $\{x \mid x \in R \wedge a < x < b\}$ |
| 11. $[a, b]$ | $\{x \mid x \in R \wedge a \leq x \leq b\}$ |
| 12. $(a, b]$ | $\{x \mid x \in R \wedge a < x \leq b\}$ |
| 13. $[a, b)$ | $\{x \mid x \in R \wedge a \leq x < b\}$ |
| 14. (a, ∞) | $\{x \mid x \in R \wedge x > a\}$ |
| 15. $[a, \infty)$ | $\{x \mid x \in R \wedge x \geq a\}$ |
| 16. N_k | $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ |

关系和划分

- | | |
|---------------------------|---------------------|
| 1. aRb | a 对 b 有关系 R |
| 2. $a \overline{R} b$ | a 对 b 没有关系 R |
| 3. I_A 或 E_A | 集合 A 上的相等关系 |
| 4. $\langle A, R \rangle$ | 集合 A 上关系 R 的有向图 |
| 5. $R_1 \cdot R_2$ | R_1 和 R_2 的合成关系 |
| 6. R^n | 关系 R 自身 n 次合成 |
| 7. $r(R)$ | 关系 R 的自反闭包 |
| 8. $s(R)$ | 关系 R 的对称闭包 |
| 9. $t(R)$ | 关系 R 的传递闭包 |
| 10. $\tilde{R}$ | 关系 R 的逆关系 |
| 11. R^+ | $t(R)$ |
| 12. R^* | $rt(R)$ |
| 13. $\leq$ | 偏序 |
| 14. $<$ | 拟序 |

15. $a \equiv b \pmod k$ a 与 b 模 k 等价
16. $[a]_R$ 在等价关系 R 下, a 的等价类
17. π 划分
18. A/R 等价关系 R 诱导的 A 的划分
19. $\pi_1 + \pi_2$ 划分 π_1 与 π_2 的和
20. $\pi_1 \cdot \pi_2$ 划分 π_1 与 π_2 的积

函 数

1. $f(a)$ 函数 f 对于自变元 a 的值
2. $f: A \rightarrow B$ 具有前域 A 陪域 B 的函数 f
3. $f(A)$ 在映射 f 下, 集合 A 的象
4. $f \cdot g$ 函数 g 和 f 的合成
5. A^B 从集合 B 到集合 A 的所有函数的集合
6. 1_A 或 I_A A 上的恒等函数
7. f^{-1} 函数 f 的逆函数
8. $f^{-1}(A)$ 在函数 f 下 A 的原象
9. $f|_A$ 函数 f 到集合 A 的限制
10. Ψ_A 集合 A 的特征函数
11. $P_1 \diamond P_2$ 置换 P_1 和 P_2 右合成

基 数

1. $|A|$ 集合 A 的基数
2. $\aleph_0$ $\mathbf{N}$ 的基数(读做阿列夫零)
3. c $[0, 1]$ 的基数

代数和布尔代数

1. $\langle A, \circ, \Delta, k \rangle$ 具有载体 A , 二元运算 $\circ$, 一元运算 Δ , 常数 k 的代数
2. $+_k$ 模 k 加法
3. $\times_k$ 模 k 乘法
4. $A \times A'$ 代数 A 和 A' 的积代数
5. $A/\sim$ 代数 A 在同余关系 $\sim$ 下的商代数
6. $\text{lub}(A)$ 集合 A 的最小上界
7. $\text{glb}(A)$ 集合 A 的最大下界

图 论

1. $\langle V, E \rangle$ 具有顶点集合 V 和边集 E 的图
2. $\langle a, b \rangle$ 从结点 a 到结点 b 的有向边
3. (a, b) 从结点 a 到结点 b 的无向边
4. $[a, b]$ 结点 a 和 b 之间的边
5. $\deg(v)$ 顶点 v 的度数(次数)

6. $\delta(G)$	无向图 G 的顶点的最小度数
7. $\Delta(G)$	无向图 G 的顶点的最大度数
8. $W(i, j)$	边 $[i, j]$ 的权
9. $\omega(G)$	无向图 G 的连通分图个数
10. $\gamma_0(G)$	无向图 G 的支配数
11. $\alpha_0(G)$	无向图 G 的点覆盖数
12. $\alpha_1(G)$	无向图 G 的边覆盖数
13. $\beta_0(G)$	无向图 G 的独立数
14. $\beta_1(G)$	无向图 G 的匹配数
15. $\kappa_0(G)$	无向图 G 的点连通度
16. $\kappa_1(G)$	无向图 G 的边连通度
17. $\chi_0(G)$	无向图 G 的(点)色数
18. $\chi_1(G)$	无向图 G 的边色数
19. Φ	流
20. $(P, \bar{P})$	割

目 录

第 1 章 数理逻辑	1
1.1 命题	1
1.2 重言式	8
1.3 范式	16
1.4 联结词的扩充与归约	21
1.5 推理规则和证明方法	24
1.6 谓词和量词	34
1.7 谓词演算的永真公式	42
1.8 谓词演算的推理规则	49
第 2 章 集合	55
2.1 集合论的基本概念	55
2.2 集合上的运算	61
2.3 归纳法和自然数	72
* 2.4 语言上的运算	81
2.5 集合的笛卡尔乘积	86
第 3 章 二元关系	90
3.1 基本概念	90
3.2 关系的合成	99
3.3 关系上的闭包运算	105
3.4 次序关系	111
3.5 等价关系和划分	121
第 4 章 函数	132
4.1 函数的基本概念	132
4.2 特殊函数类	139
4.3 逆函数	145
第 5 章 无限集合	151
5.1 可数和不可数集合	151
5.2 基数的比较	158
* 5.3 基数算术	165
第 6 章 代数	170
6.1 代数结构	170
6.2 子代数	175
6.3 同态	177
6.4 同余关系	183
6.5 商代数和积代数	187

6.6	半群和独异点	192
6.7	群	198
6.8	环和域	217
第 7 章	格与布尔代数	225
7.1	格	225
7.2	格是代数系统	229
7.3	特殊的格	234
7.4	布尔代数	239
第 8 章	图论	254
8.1	图的基本概念	254
8.2	路径和回路	261
8.3	图的矩阵表示	278
8.4	图的支配集、独立集和覆盖	285
8.5	二部图	289
8.6	平面图和图的着色	295
8.7	树	304
8.8	有向树	310
* 8.9	运输网络	321
参考文献		328

第 1 章 数理逻辑

逻辑是研究推理的科学，分为形式逻辑和辩证逻辑。数理逻辑是用数学方法研究形式逻辑的一门科学，也就是用数学方法研究推理的科学。所谓数学方法，主要是指引进一套符号体系的方法，因此数理逻辑又叫符号逻辑。现代数理逻辑有 4 大分支：证明论、模型论、递归论和公理化集合论。我们介绍它们的共同基础——命题演算和谓词演算，即一般所谓的古典数理逻辑。

1.1 命题

1.1.1 基本概念

断言是一陈述语句。一个**命题**是一个或真或假而不能两者都是的断言^①。如果命题是真，我们说它的**真值为真**；如果命题是假，我们说它的**真值是假**。

例 1.1 - 1 下述都是命题：

- (1) 今天下雪；
- (2) $3+3=6$ ；
- (3) 2 是偶数而 3 是奇数；
- (4) 陈涉起义那天，杭州下雨；
- (5) 较大的偶数都可表为两个质数之和。

以上命题中，(1)的真值取决于今天的天气；(2)和(3)是真；(4)已无法查明它的真值，但它是或真或假的，故将它归属于命题；(5)目前尚未确定其真假，但它是有真值的，应归属于命题。

例 1.1 - 2 下述都不是命题：

- (1) $x+y>4$ 。
- (2) $x=3$ 。
- (3) 真好啊！
- (4) 你到哪里？

(1)和(2)是断言，但不是命题，因为它的真值取决于 x 和 y 的值。(3)和(4)都不是断言，所以不是命题。下边我们再看一个例子。

例 1.1 - 3 一个人说：“我正在说谎”。

^① 在一个系统中，命题的真值必须是真或假，则称系统的逻辑是二值的。它的特征“一个命题非真即假，反之亦然”，即是所知的排中律。我们所讨论的是二值逻辑，但亦有多于两个真值的逻辑系统。

他是在说谎还是在说真话呢？如果他讲真话，那么他所说的是真，也就是他在说谎。我们得出结论如果他讲真话，那么他是在说谎。另一方面，如果他是说谎，那么他说的是假；因为他承认他是说谎，所以他实际上是在说真话，我们得出结论如果他是说谎，那么他是讲真话。

从以上分析，我们得出他必须既非说谎也不是讲真话。这样，断言“我正在说谎”事实上不能指定它的真假，所以不是命题。这种断言叫**悖论**。

若一个命题已不能分解成更简单的命题，则这个命题叫**原子命题**或**本原命题**。例 1.1-1 中(1)、(2)、(4)、(5)都是本原命题，但(3)不是，因为它可写成“2 是偶数”和“3 是奇数”两个命题。

命题和本原命题常用大写字母 P 、 Q 、 R …表示。如用 P 表示“4 是质数”，则记为

P : 4 是质数

1.1.2 命题联结词

命题和原子命题常可通过一些联结词构成新命题，这种新命题叫**复合命题**。例如

P : 明天下雪

Q : 明天下雨

是两个命题，利用联结词“不”、“并且”、“或(者)”等可分别构成新命题：

“明天不下雪”；

“明天下雪并且明天下雨”；

“明天下雪或者明天下雨”等。

即

“非 P ”；

“ P 并且 Q ”；

“ P 或 Q ”等。

在代数式 $x+3$ 中， x 、3 叫运算对象， $+$ 叫运算符， $x+3$ 表示运算结果。在命题演算中，也用同样的术语。联结词就是命题演算中的运算符，叫**逻辑运算符**或叫**逻辑联结词**。常用的联结词有以下 5 个。

1. 否定词 $\neg$

设 P 表示命题，那么“ P 不真”是另一命题，表示为 $\neg P$ ，叫做 P 的**否定**，读做“非 P ”。由排中律知：如果 P 是假，则 $\neg P$ 是真，反之亦然。所以否定词 $\neg$ 可以如表 1.1-1 所示定义。

这张表叫**真值表**。定义运算符的真值表，可指明如何用运算对象的真值来决定一个应用运算符的命题的真值。真值表的左边列出运算对象的真值的所有可能组合，结果命题的真值列在最右边的一列。为了便于阅读，我们通常用符号 T (true)或 1 代表真，符号 F (false)或 0 代表假。一般在公式中采用 T 和 F ，在真值表中采用 1 和 0。这样，以上真值表可写成表 1.1-2 所示的形式。

表 1.1-1

P	$\neg P$
假	真
真	假

表 1.1-2

P	$\neg P$
0	1
1	0

例 1.1 - 4

(1) P : 4 是质数。

$\neg P$: 4 不是质数。或 4 是质数, 不是这样。

(2) Q : 这些都是男同学。

$\neg Q$: 这些不都是男同学。(翻译成“这些都不是男同学”是错的。)

2. 合取词 $\wedge$

如果 P 和 Q 是命题, 那么“ P 并且 Q ”也是一命题, 记为 $P \wedge Q$, 称为 P 和 Q 的合取, 读做“ P 与 Q ”或“ P 并且 Q ”。运算符 $\wedge$ 定义如表 1.1 - 3 所示。从真值表可知 $P \wedge Q$ 为真, 当且仅当 P 和 Q 俱真。

例 1.1 - 5 P : 王华的成绩很好, Q : 王华的品德很好。
 $P \wedge Q$: 王华的成绩很好并且品德很好。

表 1.1 - 3

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. 析取词 $\vee$

如果 P 和 Q 是命题, 则“ P 或 Q ”也是一命题, 记作 $P \vee Q$, 称为 P 和 Q 的析取, 读做“ P 或 Q ”。运算符 $\vee$ 定义如表 1.1 - 4 所示。从真值表可知 $P \vee Q$ 为真, 当且仅当 P 或 Q 至少有一个为真。

例 1.1 - 6

(1) P : 今晚我写字, Q : 今晚我看书。

$P \vee Q$: 今晚我写字或看书。

“或”字常见的含义有两种: 一种是“可兼或”, 如例 1.1 - 6 中的或, 它不排除今晚既看书又写字这种情况; 一种是“排斥或”, 例如“人固有一死, 或重于泰山, 或轻于鸿毛”中的“或”, 它表示非此即彼, 不可兼得。运算符 $\vee$ 表示可兼或, 排斥或以后用另一符号表达。

(2) P : 今年是闰年; Q : 今年她生孩子。

$P \vee Q$: 今年是闰年或者今年她生孩子。

逻辑运算符可以把两个无关的命题联结成一新命题, 作如此规定是因为有关和无关的界线难以划分, 而如此规定不会妨碍应用。

4. 蕴含词 $\rightarrow$

如果 P 和 Q 是命题, 那么“ P 蕴含 Q ”也是命题, 记为 $P \rightarrow Q$, 称为蕴含式, 读做“ P 蕴含 Q ”或“如果 P , 那么 Q ”。运算对象 P 叫做前提、假设或前件, 而 Q 叫做结论或后件。运算符定义如表 1.1 - 5 所示。

命题 $P \rightarrow Q$ 是假, 当且仅当 P 是真而 Q 是假。

例 1.1 - 7

(1) P : 天不下雨, Q : 草木枯黄。

$P \rightarrow Q$: 如果天不下雨, 那么草木枯黄。

(2) R : G 是正方形, S : G 的四边相等。

$R \rightarrow S$: 如果 G 是正方形, 那么 G 的四边相等。

表 1.1 - 5

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

(3) W : 桔子是紫色的, V : 大地是不平的。

$W \rightarrow V$: 如果桔子是紫色的, 那么大地是不平的。

在日常生活中用蕴含式来断言前提和结论之间的因果或实质关系, 如例 1.1-7 中的 (1) 和 (2), 这样的蕴含式叫**形式蕴含**。在命题演算中, 一个蕴含式的前提和结论并不需要有因果和实质联系, 这样的蕴含式叫**实质蕴含**, 如例 1.1-7 中的 (3), 桔子的颜色和大地的外形之间没有因果和实质关系存在, 但蕴含式 $W \rightarrow V$ 是真, 因为前提是假而结论是真。采用实质蕴含作定义, 是因为在讨论逻辑和数学问题中, 这不仅是正确的, 而且应用方便。

蕴含式 $P \rightarrow Q$ 可以用多种方式陈述:

“若 P , 则 Q ”;

“ P 是 Q 的充分条件”;

“ Q 是 P 的必要条件”;

“ Q 每当 P ”;

“ P 仅当 Q ”等。

如例 1.1-7(2) 中的 $R \rightarrow S$ 可陈述为“ G 是正方形的必要条件是它的四边相等”。

给定命题 $P \rightarrow Q$, 我们把 $Q \rightarrow P$, $\neg P \rightarrow \neg Q$, $\neg Q \rightarrow \neg P$ 分别叫做命题 $P \rightarrow Q$ 的**逆命题**、**反命题**和**逆反命题**。

5. 等值词 $\leftrightarrow$

如果 P 和 Q 是命题, 那么“ P 等值于 Q ”也是命题, 记为 $P \leftrightarrow Q$, 称为**等值式**, 读做“ P 等值于 Q ”。运算符 $\leftrightarrow$ 定义如表 1.1-6 所示。

比较表 1.1-5 和表 1.1-6 易知, 如果 $P \leftrightarrow Q$ 是真, 那么 $P \rightarrow Q$ 和 $Q \rightarrow P$ 俱真; 反之如果 $P \rightarrow Q$ 和 $Q \rightarrow P$ 俱真, 那么 $P \leftrightarrow Q$ 是真。由于这些理由, $P \leftrightarrow Q$ 也读做“ P 是 Q 的充要条件”或“ P 当且仅当 Q ”。

表 1.1-6

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

从以上 5 个定义可看出, 联结词之意义由其真值表唯一确定, 而不由命题的含义确定。

使用以上 5 个联结词, 可将一些语句翻译成逻辑式。翻译时为了减少圆括号(一般不用其它括号)的使用, 我们作以下约定:

- 运算符结合力的强弱顺序为 $\neg$ 、 $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 、 $\leftrightarrow$, 凡符合此顺序的, 括号均可省去。
- 相同的运算符, 按从左至右次序计算时, 括号可省去。
- 最外层的圆括号可以省去。

例如:

$$(\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \rightarrow ((R \vee P) \vee Q))$$

可写成

$$\neg(P \wedge \neg Q \vee R) \rightarrow R \vee P \vee Q$$

但有时为了看起来清楚醒目, 也可以保留某些原可省去的括号。

例 1.1-8

(1) 设 P 表示“他有理论知识”, Q 表示“他有实践经验”, 则“他既有理论知识又有实践经验”可译为: $P \wedge Q$ 。

(2) 设 P : 明天下雨, Q : 明天下雪, R : 我去学校, 则

① “如果明天不是雨夹雪则我去学校”可写成

$$\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$$

② “如果明天不下雨并且不下雪则我去学校”可写成

$$\neg P \wedge \neg Q \rightarrow R$$

③ “如果明天下雨或下雪则我不去学校”可写成

$$P \vee Q \rightarrow \neg R$$

④ “明天, 我将雨雪无阻一定去学校”可写成

$$P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R$$

⑤ “当且仅当明天不下雪并且不下雨时我才去学校”可写成

$$\neg P \wedge \neg Q \leftrightarrow R$$

(3) 用逻辑符表达“说小学生编不了程序, 或说小学生用不了个人计算机, 那是不对的”。

设 P : 小学生会编程序, Q : 小学生会用个人计算机, 则上句可译为

$$\neg(\neg P \vee \neg Q)$$

(4) 用逻辑符表达“若不是他生病或出差了, 我是不会同意他不参加学习的”。

设 P : 他生病了, Q : 他出差了, R : 我同意他不参加学习, 则上句可译为

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg R$$

或

$$P \vee Q \leftrightarrow R$$

翻译时要按逻辑关系翻译, 而不能凭字面翻。例如, 设 P : 林芬做作业, Q : 林芳做作业, 则“林芬和林芳同在做作业”可译为 $P \wedge Q$, 但“林芬和林芳是姐妹”就不能翻释成两个命题的合取, 它是一个原子命题。

1.1.3 命题变元和命题公式

通常, 如果 P 代表真值未指定的任意命题, 我们就称 P 为命题变元; 如果 P 代表一个真值已指定的命题, 我们就称 P 为命题常元。但由于在命题演算中并不关心具体命题的涵义, 只关心其真假值, 因此, 我们可以形式地定义它们。

以“真”、“假”为其变域的变元, 称为命题变元; T 和 F 称为命题常元。

习惯上把含有命题变元的断言称为命题公式。但这样描述过于表面, 它没能指出命题公式的结构。因为不是由命题变元、联结词和一些括号组成的字符串都能成为命题公式, 因此在计算机科学中常用以下定义。

单个命题变元和命题常元叫原子公式。由以下形成规则生成的公式叫命题公式(简称公式):

① 单个原子公式是命题公式。

② 如果 A 和 B 是命题公式, 则 $(\neg A)$ 、 $(A \wedge B)$ 、 $(A \vee B)$ 、 $(A \rightarrow B)$ 、 $(A \leftrightarrow B)$ 是命题公式。

③ 只有有限步地应用规则①和②生成的公式, 才是命题公式。

这种定义叫归纳定义, 也叫递归定义。由这种定义产生的公式叫合式公式。如何构成这种定义, 以后将专门叙述。