

第 1 辑

SHIUXUE SIXIANG GAILUN
SHULIANG YU SHULIANG GUANXI DE CHOUXIANG

数学思想概论

数量与数量关系的抽象

※史宁中/著※



NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS
WWW.NENUP.COM

东北师范大学出版社

史宁中/著

第 1 辑

SHUXUE SIXIANG GAILUN
SHULIANG YU SHULIANG GUANXI DE CHOUXIANG

《数学思想概论》



NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS
WWW.NEUP.COM

东北师范大学出版社 长春

图书在版编目 (CIP) 数据

数学思想概论 (第1辑) ——数量与数量关系的抽象/史宁中著. —长春: 东北师范大学出版社, 2008. 4
ISBN 978 - 7 - 5602 - 5371 - 8

I. 数… II. 史… III. ①数学—思想方法—高等学校
教学参考资料 ②数学—思想方法—专业学校—教学
参考资料 IV. G. 01 - 0.

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 040439 号

责任编辑: 杨述春 刘晓军 封面设计: 宋 超
责任校对: 余 天 责任印制: 张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号 (130024)

销售热线: 0431 - 85687213

传真: 0431 - 85691969

网址: <http://www.nenup.com>

电子函件: sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

农安县金鼎印刷有限公司

农安县农安镇古城街 131 号 (130200)

2008 年 6 月第 1 版 2008 年 12 月第 2 次印刷

幅面尺寸: 170mm × 227mm 印张: 11.75 字数: 130 千

定价: 18.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 可直接与承印厂联系调换

前 言

这本书是为大学生写的,包括数学专业的大学生也包括非数学专业的大学生,我希望他们都能够读懂,都能有所收获.这本书强调的不是呈现清晰的数学知识,而是强调借助数学知识呈现清晰的数学思想,因为这不是一本数学的教科书而是一本数学思想的教科书.为了做到这一点,我按照自己的理解编排了以数学思想为核心的数学知识体系.

在这本书中,我们所说的数学思想不是指学习数学时所涉及的思想,比如,等量替换、数形结合、递归、转换等,也不是解数学题时所涉及的具体的思想方法,比如,合并同类项、配方法、换元法等,这本书中所说的数学思想是指数学发展所依赖、所依靠的思想.我认为,至今为止,数学发展所依赖的思想在本质上有三个:抽象、推理、模型,其中抽象是最核心的.通过抽象,在现实生活中得到数学的概念和运算法则,通过推理得到数学的发展,然后通过模型建立数学与外部世界的联系.我计划对每一个思想都进行较为详细的讨论,各自形成一个专题,最后再讨论数学的本质.作为写书的顺序,似乎应当先阐述数学的本质,然后再讨论数学的思想,但是我想,对于大学生来说,还是先了解数学的思

想然后再体会数学的本质可能会更好一些,因为这本书的教学目的是使大学生:

增长一些与数学有关的知识;

学会一些思考问题的方法;

提高一点撰写论文的能力.

至今为止,我刚写完数学第一个基本思想“抽象”中的第一部分,即数量与数量关系的抽象,可是许多读过草稿的同事就劝我先出版这一部分.之所以提出这样的建议,大概是嫌我写书太慢,等把计划的内容全部写完至少需要几年的时间,而现在写出这些内容还有些意义,对于了解数学能够有所帮助.我写书慢固然是因为工作忙,但更主要的原因是我对所要写的内容不够熟悉,必须要查阅大量的资料,经过认真思考后才敢落笔.不管怎么说,能够先出版一部分对于我也是一件好事情,我可以在写书的途中稍稍地休息一下.

我还特别希望,这本书对于工作在基础教育第一线的数学教师能够有所补益.最近修订的义务教育阶段数学课程标准,在传统的“双基”的基础上,又加上了数学的基本思想和基本活动经验,成为“四基”,这是为了体现在义务教育阶段要培养学生的创新思维和实践能力.很显然,从思维方法考虑,我们提到的抽象、推理和模型都是培养创新思维和实践能力的关键,因而也是从数学角度实施素质教育的关键.同时,对于工作在基础教育第一线的数学教师来说,了解一些数学思想,有利于在教学过程中理清思想脉络,把握问题本质.

由此可见,这本书所要讨论的问题本身是重要的,但我个人的理解有限,写出来仅供参考而已。

我要特别感谢下面几位同仁:孔凡哲教授、刘万国教授帮我查找了数学史的有关资料;韩东育教授帮我查找了中国古代的有关资料;吴宇虹教授帮我查找了古巴比伦的有关资料;张强教授帮我查找了古希腊语和古英语的有关资料。我还要感谢东北师范大学出版社的杨述春女士,是她的强烈建议才使我下决心先出版一部分。

目录

CONTENTS

绪论 数学的抽象 /1

一、抽象的含义与数学抽象的特点 /1

二、抽象的层次性 /3

第一讲 数的表示 /4

一、数量的本质 /4

二、十进制记数系统的抽象过程分析 /5

第二讲 数的性质 /13

一、各种进位记数法及其分析 /13

二、数的性质及其研究历程 /18

第三讲 数的运算与扩张 /25

一、加法法则的抽象过程分析 /25

二、乘法、减法和除法法则的抽象过程分析 /29

三、算术与代数 /32

第四讲 无理数的认识 /37

一、无理数的发现历程回顾 /37

二、对无理数发现历程的反思 /43

数学思想概论

第五讲 数轴与直角坐标 /48

- 一、直观与数形结合的意义 /48
- 二、平面直角坐标下的直线 /51
- 三、距离与圆、椭圆、双曲线 /53
- 四、证明的几何直观 /57
- 五、利用直角坐标系的几何直观进行现实数据分析 /59

第六讲 微积分的产生 /63

- 一、微积分产生的背景 /63
- 二、微积分的思想分析 /66

第七讲 极限理论的建立 /76

- 一、从无穷问题到极限的表示 /76
- 二、极限的严谨理论形成历程中的两个困惑 /79
- 三、严谨的极限理论的抽象过程 /85

第八讲 实数理论的建立 /95

- 一、有理数的新定义 /96
- 二、基本序列方法 /100
- 三、戴德金分割方法 /102

第九讲 对应与集合大小的度量 /106

- 一、集合之间对应关系的历史考察 /106
- 二、自然数与有理数一样多 /108
- 三、连续统假设与反证法 /111

第十讲 复数的意义 /115

一、复数产生历史概述 /115

二、复数的运算 /117

三、代数基本定理 /119

四、数学归纳法 /121

五、复数的几何表示 /122

六、四元数 /125

第十一讲 随机变量与数据分析 /128

一、随机事件及古代的处理方式 /128

二、随机变量与概率 /132

三、数据分析 /138

四、统计学与数学的区别 /141

第十二讲 统计学的发展 /147

一、统计学的历史回顾 /147

二、整理数据的常见方法 /154

三、统计学的思想和方法 /162

人名索引 /174

绪论 数学的抽象

阅读提示

数学在本质上研究的是抽象了的东西,而这些抽象了的东西来源于现实世界,是被人抽象出来的.因此,真正的知识是来源于感性经验的,是通过直观和抽象而得到的,这种抽象是不能独立于人的思维而存在的.按照抽象的深度的不同,抽象可以区分为简约阶段、符号阶段、普适阶段.

一、抽象的含义与数学抽象的特点

关于“数学在本质上研究的是抽象的东西”这个命题,从古至今,无论是数学家还是哲学家几乎都没有异议.所谓抽象的东西是指脱离了具体内容的形式和关系,也正因为如此,数学才可能具有广泛的应用性,如《周易·系辞传》所说,“是故形而上者谓之道,形而下者谓之器”.

但是,关于“数学所要研究的那些抽象的东西是如何存在的”这个问题却一直是争论的焦点.许多伟大的哲

柏拉图及其以后的许多学者认为经验是不可靠的,因此真正的知识应当建立在概念的基础上,而不是通过感官得来的。

人,包括柏拉图^①和康德^②,认为那些抽象的东西是脱离人的经验的,是在这个世界上已经“存在”的,因此,数学的任务是去感知,去发现。柏拉图的依据是他的回忆理论,康德则说得更为明确,“纯粹数学是先天既定的,……是独立于经验的”。

事实上,正如现代的大多数数学家和哲学家所理解的那样,数学所要研究的那些“抽象的东西”是来源于现实世界,是来源于人的经验的,是人抽象出来的。也正如恩格斯^③在《反杜林论》中所阐述的:

纯数学是以现实世界的空间形式和数量关系,也就是说,以非常现实的材料为对象的。这些材料以极度抽象的形式出现,这只能在表面上掩盖它起源于外部世界。

现在,在这本书中我们将要讨论的问题是:数学所要研究的那些“抽象的东西”是如何从非常现实的材料得到的。显然,这个讨论涉及的是数学最为基本的东西,因而是数学最为本质的东西。希望通过讨论能够达成一个共识:真正的知识是来源于感性的经验、通过直观和抽象而得到的,并且,这种抽象是不能独立于人的思维而存在的。

① 柏拉图(英译:Plato, 希腊语:Πλάτων,公元前427~前347),古希腊哲学家。他的有关数学的论述可参见罗素的《西方哲学史》。

② 康德(Immanuel Kant,1724~1804),德国哲学家,他那段论述参见他的著作《未来形而上学导论》。

③ 恩格斯(Friedrich Engels,1820.11.28~1895.8.5),德国社会主义理论家及作家,马克思主义的创始人之一,马克思的亲密战友,国际无产阶级运动的领袖。

这个专题的重点是讨论数量和数量关系的抽象. 对于数学来说, 空间形式的抽象、论证形式的抽象和模型模式的抽象也是非常重要的, 我们将在以后的专题中仔细讨论.

二、抽象的层次性

在这里, 我想特别强调的是, 对于非数学专业的学生, 了解数学的抽象、培养抽象能力也是十分重要的. 抽象是思维的基础, 只有具备了一定的抽象能力, 才可能从感性认识中获得事物(事件或实物)的本质特征, 从而上升到理性认识. 这是一个获取知识的过程, 这也是一个研究的过程, 这个过程对于所有学科的学习都是非常重要的. 我想, 就抽象的深度而言, 大体上分为三个层次:

1. 把握事物的本质, 把繁杂问题简单化、条理化, 能够清晰地表达, 我们称其为简约阶段.

◀第一个层次的抽象是极为重要的, 但是在我们的教学过程中往往被忽略.

2. 去掉具体的内容, 利用概念、图形、符号、关系表述包括已经简约化了的事物在内的一类事物, 我们称其为符号阶段.

3. 通过假设和推理建立法则、模式或者模型, 并能够在一般的意义上解释具体事物, 我们称其为普适阶段.

第一讲 数的表示

阅读提示

数来源于对数量本质的抽象,数量的本质是多与少,因此,数字就是那些能够由小到大进行排列的符号.这个抽象过程经历了计数和符号两个阶段.能够形成十进制记数系统是人类的重大进步,其核心是十个符号加上位数准则.

为了讨论数的表示,就必须先讨论数量的本质,因为数是对数量的抽象,而抽象的核心工作是对本质的提炼和刻画.

一、数量的本质

我想,数量的本质应当是多与少,因为动物也能够分辨出多与少:一只狗对一只狼与一群狼的反应是不一样的.一本名为“数:科学的语言”^①的书中描述了一个故事,这个故事表明动物对于数量的多少具有相当强的分辨能力.

^① 丹齐克(Dantzing)著.数:科学的语言.苏仲湘译.上海:上海教育出版社,2001.

在欧洲某地庄园的望楼上有一个乌鸦巢,里面住着一只乌鸦。主人打算杀死这只乌鸦,可是几次都没有成功,因为他一走进这个望楼乌鸦就飞走,栖在远远的树上,直到他离开望楼才飞回来。后来他想了一个聪明的办法:两个人一起走进望楼,一个人出来,一个人留在里面。可是乌鸦不上当,直到第二人离开望楼才飞回来。主人不死心,连续试验了几天:三个人,四个人都没有成功。最后用了五个人,四个人走出来,一个人留在里面,现在乌鸦分辨不清了,飞了回来。

对于数量多少的感知,人应当强于乌鸦,不论乌鸦有多么聪明。由此可以推断,人类对于数量多少的感知可能比语言的形成还要早,但是,人类能够从数量的多少中抽象出数的概念却是非常不容易的。一些书中对此都有记载,比如《天空中的圆周率》^①中提到,至今为止,一些原始部落依然没有系统的数字概念,那里的人们只能区分一、二和许多。究其原因,就是没有创造出计数系统。

◀ 据心理学的实验结果,如果不计数,人对多少的分辨也是在5左右。

二、十进制记数系统的抽象过程分析

从人类的发展历程来分析,十进制记数系统的抽象过程,经历了计数、符号两个层次的抽象。

第一步抽象:计数。

大多数的文明很早就会计数了(参见图 1.1,摘自

① 巴罗(Barrow)著. 天空中的圆周率. 苗华建译. 北京:中国对外翻译出版公司,2000.

《数学史概论》^①),但是,数字符号的发明可能要比文字符号的发明更晚一些.

古埃及的象形数字(公元前3400年左右):

									∩
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
∩∩	∩∩∩	∩∩∩∩	∩∩∩∩	∩∩∩∩∩	∩∩∩∩∩∩	9	99	∩	∩
11	12	20	40	70	100	200	1000	10000	

巴比伦楔形数字(公元前2400年左右):

∟	∟∟	∟∟∟	∟∟∟	∟∟∟	∟∟∟	∟∟∟	∟∟∟	∟∟∟	∟∟∟	∟
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
∟∟	∟∟∟	∟∟∟∟	∟∟∟∟	∟∟∟∟	∟∟∟∟	∟∟∟∟	∟∟∟∟	∟∟∟∟	∟∟∟∟	∟∟∟∟
11	12	20	30	40	50	60	70	80	120	130

中国甲骨文数字(公元前1600年左右):

—	=	≡	≡	⊗	⊕	+	×	×	1	△	⊗
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000

希腊阿提卡数字(公元前500年左右):

				∏	∏∏	∏∏∏	∏∏∏∏	∏∏∏∏∏	∏
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
△	△	△∏	△∏∏	△△	△△△	△△△△	∏	∏△	∏△△
11	12	15	16	20	30	50	60	70	

中国筹算数码(公元前500年左右):

纵式						∏	∏∏	∏∏∏	∏∏∏∏
横式	—	=	≡	≡	≡	∏	∏	∏	∏
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

图 1.1 几种古代的记数系统

① 李文林著. 数学史概论. 北京: 高等教育出版社, 2003.

有些人可能不同意这个意见,因为可以在甲骨文中发现许多数字.我想说的是,那些不是数字符号,也就是说,那些并不意味着已经把关于数量的感知抽象到数字符号.仔细看一下甲骨文就会发现,所有数字的背后都有着具体的背景:或者是田亩,或者是牛羊,这说明那些是关于与数量有关的事件的文字记载,或者说,是一种语言符号.在现代汉语中,有一些关于数量及其后缀名词的形式已经被根深蒂固地保留下来了,比如,一粒米、一条鱼、一只鸡、一个蛋、一匹马、一头牛、一支笔、一顶帽子、一件衣服、一条裤子等等.其中的“一”并不是数字符号,我们只能把这些理解为与数量有关的事件的记载.一粒米与一头牛是不可同日而语的,虽然都是数量“一”的具体例子.这里需要一个更为深刻的抽象,或者说是关于数量的第二步抽象.

第二步抽象:符号.

符号的表达必须摆脱具体内容,否则这种表达将不具有一般性,在这种表述基础上的计算和推理也将不具有普适性.因此,数字符号后面不能缀有名数,需要完全脱离具体的背景,否则,不可能一般地建立起关于“多少”的概念.2比1多,可是很难想象两粒米要比一头牛多.另一方面,从“多少”这一基本概念出发,可以自然而然地推导出这样一个事实:在一些东西上再加一些东西要比原来的“多”,如果数字符号后面缀有名数,则很难表现出这

数字“2”表示的是▶
两个单位,可以是
两粒米,也可以是
两头牛.

一事实.一粒米加上一头牛是什么呢?因此,数字符号只能是一些表示数量多少的符号,除了多少以外没有任何具体的含义,而每一个具体的事件都是这种表示的特例.

把那些所有表示数量的符号放在一起,则得到了一个集合,我们称这个集合为“数集”.从上面的推断可以知道,这个数集中的符号之间至少要满足一种关系,那便是“多少”,或者称之为“大小”.为了做到这一点,就必须在这个数集中定义一个“序”的关系,我们可以称之为“大于”.那么,数集中的任何两个符号之间都必须满足这种序关系.比如 a 和 b 是数集中的两个符号,则不是 a 大于 b 就是 b 大于 a ;如果 a 大于 b 同时 b 也大于 a ,则表示同一个符号,即 a 和 b 相等.显然,十进制的数字的集合满足这种序关系.容易验证,二进制的数字的集合也满足这种序关系.这样,我们便完成了对于数字符号的抽象:数字是那些能够由小到大进行排列的符号.

关键点一:进位.

因为数量可以无限制的多,于是数字符号也应当是无穷无尽的,我们将遇到一个天大的难题:必须用无穷多个符号来表示所有的数字.聪明的人类发明了进位,有些符号可以重复使用了.如果计数规则是十进制,那么,除了一到九的符号外,再创造出十进位基数的符号:在中国是十、百、千;在古罗马相应的是 X、C、M 等等.请注意,在这个符号系统中,五十并不是指 50,而是指五个十;三万也不是指 30000,而是指三个一万.因此,这是一个由语言符号系统向完全数字符号系统的过渡的符号系统,可以称为准数字符号系统.这个准数字符号系统能够相当广泛地适用于人类