全国180座城市考研辅导班指定用书

文都教育

Maths 2010 考研数学必做主观题500题精析

策划◎文都考研命题研究中心

主编◎蔡子华

★最全面的考研主观题专项训练

★题目紧扣大纲，贴近考研真题

★精析权威到位，体现解题技巧

原子能出版社

文都教育

Maths 2010
考研数学
必做主观题500题精析

策划◎文都考研命题研究中心

主编◎蔡子华

副主编◎曾祥金　汤家凤

原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学必做主观题500题精析/蔡子华主编. —北京:原子能出版社,2009.2
ISBN 978—7—5022—4462—0

Ⅰ.考… Ⅱ.蔡… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ.013—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第020965号

考研数学必做主观题500题精析

出版发行:原子能出版社(北京市海淀区阜成路43号100048)
责任编辑:谭　俊
特约编辑:师　潭
封面设计:刘艳南
印　　刷:北京长阳汇文印刷厂
经　　销:全国新华书店
开　　本:787×1092毫米　1/16
印　　张:18
字　　数:300千字
版　　次:2009年3月第1版　2009年3月第1次印刷
书　　号:ISBN 978—7—5022—4462—0
定　　价:30.00元

前　　言

主观题(计算题、证明题及应用题)在硕士研究生入学统一考试数学试卷中占60%以上的比例,其涵盖的内容广泛,综合性强,且解题要求逻辑清楚、推理严密。

《考研数学必做主观题500题精析》为帮助报考硕士研究生的朋友扩展解题思路,熟悉常用方法技巧,尽快提高求解主观题的能力而编写,它是深得广大考研学子喜爱的《考研数学必做客观题1500题精析》的姊妹篇。全书精选500道考研数学主观题,分为主观题集和主观题解两部分;内容包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计;按计算题、证明题、应用题三个单元编写。适合选考数学一至数学三各卷种的考生备考使用。

“主观题集”中大多数题是近年来统考数学试卷中未出现过的。内容全面,代表性强。遴选该部分题目的原则是:紧扣硕士研究生入学统一考试数学考试大纲,重视基础,摒弃偏题、怪题,难度与历年统考真题中等及以上的题目相当。为方便读者使用,题集中凡考纲仅对数学一考生要求的内容标有“ * ”记号,仅对数学二、数学三考生要求的内容相应标有“○”、“△”记号;公共部分无标记(依据最新考试大纲)。

“主观题解”解题思路清晰,方法独特(不少题),过程详细,步骤规范。难度较大的题前有“分析”后有“评注”,利于读者深刻理解,切实掌握。

读者可先尝试求解本书第一部分的题目,再在第二部分的帮助下找出自己在理解数学基本概念、基本原理及运用基本方法诸方面的差距,在实战中增强自我发现问题、分析问题和解决问题的能力,从而大幅度提高应试水平。

在本书的编写过程中,文都考研命题研究中心全体同志做了大量有益的工作,在此一并表示感谢。

由于时间仓促,错误和疏漏之处难免,欢迎广大读者、数学同仁批评指正。

编　者

2009年3月

目　　录

第一部分　主观题集

第二部分　主观题解

目　录

第 一 部 分

主 观 题 集

第一篇 计算题

A. 高等数学

一、一元函数微分学

(一) 极限

1. 已知 $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+x-2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$, 且 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$, 求 a、b、c.

2. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\right]$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n})](|x|<1)$

3. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\csc^2x-\dfrac{1}{x\sin x}\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1^{1/x}+a_2^{1/x}+\cdots+a_n^{1/x}}{n}\right)^{nx}$

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\tan2x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-x)$

4. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\sin\dfrac{1}{n}}{\left(\arctan\dfrac{1}{n}\right)^2}$

5. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{n^2+1}\sin\dfrac{1}{n^2}\cos n^2$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

6. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+\frac{(n-1)\pi}{n}\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+\frac{n\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}$

7. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \quad (p>0)$

8. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t\,|\cos t|\,\mathrm{d}t}{x^2}$.

9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i+1}\sin\left(\alpha+\frac{i}{n}\beta\right)$.

10. 求 $\lim\limits_{x\to0}\int_{-x}^{x}\frac{1}{x}\left(1-\frac{|t|}{x}\right)\cos(b-t)\mathrm{d}t$. 其中 b 为常数.

11. 设 $F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t$，$f(u)$ 可微，$f(0)=0$，$f'(0)=1$. 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)}{x^4}$.

12. 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$.

13. 设 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f'''(x+\theta h)}{3!}h^3(0<\theta<1)$，$f(x)$ 有四阶连续导数，且 $f^{(4)}(x)\neq0$，求 $\lim\limits_{h\to0}\theta$.

14. 已知 $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}f[f(x)]$.

15. 设 $f(x,y)$ 有一阶连续偏导数，$f(1,1)=1$，$f_x'(1,1)=2$，$f_y'(1,1)=-3$. 设 $\varphi(x)=f\{x,f[x,f(x,x^2)]\}$，求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln[\varphi(x)]}{x-1}$

16. 设 $f(u)$ 在 $u=0$ 点的某个邻域内连续，在 $u=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=3$. 求 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi t^3}$.

17 *△. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}}{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}$.

18 *△. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{3}\right)^k$.

19 *△. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

20. 设 $f(x)$ 可微，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}tf(t)\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

(二)函数的连续性

1. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是连续函数,求 a、b 之值.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$, $g(x)=\sin x$,讨论 $f[g(x)]$ 的连续性.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<0\\ a+x & x\geqslant 0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}b & x<1\\ \sqrt{x^2+1} & x\geqslant 1\end{cases}$.

试求 a、b 的值使 $f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x} & x>0\\ e^x+\beta & x\leqslant 0\end{cases}$, 试根据不同的 α、β,讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性,并指出间断点的类型.

(三)导数与微分

1. *○设函数 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ y=e^y\sin t+1\end{cases}$ 所确定,求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

2. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x>0\\ \ln(1-x)+xe^{-x} & x\leqslant 0\end{cases}$, 求 $f'(x)$.

3. 设函数 $\theta(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, $f(x)=\cos\theta(x)$, $f'(x)=\sin\theta(x)$. 对 $\theta(x_0)\neq n\pi$ 的 x_0,求 $\theta'(x_0)$.

4. 设 $f(x)$ 的定义域为所有非零实数之全体,对任何非零实数 x、y, $f(xy)=f(x)+f(y)$,且 $f'(1)$ 存在.

(1) $f(x)$ 还有哪些点的导数存在? (2) 求 $f(x)$.

5. 设 $f_n(x)=f\{f[\cdots f(x)]\}$(共 n 重 f),若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $\dfrac{df_n(x)}{dx}$.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $x\leqslant x_0$ 有定义,且二阶导数存在.问如何选择 a、b、c,可使下面函数

$$F(x)=\begin{cases}f(x) & \text{当 } x\leqslant x_0 \text{ 时}\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c & \text{当 } x>x_0 \text{ 时}\end{cases}$$ 有二阶导数存在?

7. 设 $y=\arctan x$,求 $y^{(n)}(0)$.

8. 设 $y=\dfrac{e^x}{x}$,求 $y^{(n)}$.

9. 设 $f(x)=\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x$,求 $f^{(n)}(0)$.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y$ 所确定,其中 f 有二阶导数且 $f'\neq 1$,求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

11. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的某个邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+xf(x)}{x^3}=0$. 求 $f(0)$、$f'(0)$、$f''(0)$.

12. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$，其中 $\varphi(x)$ 具有三阶导数，且 $\varphi(0)=1$，$\varphi'(0)=0$，$\varphi''(0)=1$，$\varphi'''(0)=6$.

(1) 确定 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；　(2) 求 $f'(x)$；

(3) 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

13. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-2x^2 & x<-1\\ x^3 & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 12x-16 & x>2\end{cases}$$

(1) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式；

(2) 讨论 $g(x)$ 的连续性、可导性，并求 $g'(x)$.

(四) 中值定理与导数的应用

1. 设对于 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)$ 满足微分方程

$$xf''(x)+\varphi(x)[f'(x)]^2=\mathrm{e}^{ax}-1$$

其中 $a\neq 0$ 为常数，$\varphi(x)$ 为连续函数且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x}$ 存在. 假设 $f'(x_0)=0$，讨论 $f(x)$ 在 x_0 点是否取得极值，若取得极值是极大值还是极小值.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{2x} & x>0\\ x\mathrm{e}^x+1 & x\leqslant 0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的极值.

3. 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$ 其中 a、b、c 都是常数且 $|a|\neq|b|$.

(1) 证明：$f(x)=-f(-x)$；　(2) 求 $f'(x)$，$f''(x)$，$f^{(n)}(x)$；

(3) 若 $c>0$，$|a|>|b|$，则 a、b 满足什么条件 $f(x)$ 才有极大值和极小值？

4 *○. 设曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=t^2+1\\ y=3t+t^3\end{cases}$，其中 $t>0$，求曲线的凹凸区间和拐点.

5. 设 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

(1) 求函数 y 的单调区间及极值；　(2) 求函数图象的凹凸区间及拐点；

(3) 求函数图象的渐近线；　(4) 作出函数的图形.

6. 求曲线 $x=\dfrac{t+2}{t^2-1}$，$y=\dfrac{1}{t(t^2-1)}$ 的渐近线.

7. 若以 $A(k)$ 表示函数 $y=x^2-2kx$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值与最小值之差，试求 $A(k)$ 的

最小值($-\infty < k < +\infty$).

(五) 有关方程的根的问题

1. 在区间 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 上研究方程 $\sin^3 x\cos x = a(a > 0)$ 的实根的个数.

2. 研究方程 $x\ln x + A = 0$ 实根的个数.

3. 设 $f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos nx$,其中 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是实数,且 $a_n > |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$. 讨论方程 $f^{(n)}(x) = 0$ 实根的个数.

4. 设 $f(x)$ 是 n 次多项式:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n (a_n \neq 0)$$

且 $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(m)}(x_0) = 0, f^{(m+1)}(x_0) \neq 0 \quad (m < n-1)$.
试问 $x = x_0$ 是方程 $f(x) = 0$ 的多少重根?

二、一元函数积分学

(一) 不定积分

1. 求下列各不定积分:

(1) $\int \dfrac{\ln 2x}{x\ln 4x}\mathrm{d}x$.

(2) $\int \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2 + (1 + x^2)^{3/2}}}\mathrm{d}x$

(3) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} \quad (a > 0, b > 0)$

(4) $\int \dfrac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1 + x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$

(5) $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\mathrm{d}x$

(6) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^6(1 + x^2)}$

(7) $\int \dfrac{\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(8) $\int \dfrac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2}\mathrm{d}x$

(9) $\int \dfrac{x + 1}{x(1 + x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x$

(10) $\int \mathrm{e}^{2x}(\tan x + 1)^2\mathrm{d}x$

(11) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x\sqrt{1 + \ln^2 x}}$

(12) $\int (x + |x| + 1)^2\mathrm{d}x$

2. 建立 $I_m = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^m x}$ 的递推公式.

3. 设 $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$,当 $0 < x < 1$ 时,求 $f(x)$.

4. 设 $f'(\ln x) = \begin{cases} \mathrm{e} & 1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e} \\ x & \mathrm{e} < x < +\infty \end{cases}$, 且 $f(1) = \mathrm{e}$,求 $f(x)$.

5. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,当 $x \geqslant 0$ 时有 $f(x)F(x) = \sin^2 2x$,且 $F(0) = 1, F(x) \geqslant$

0,求 $f(x)$.

6. 求出两多项式函数 $P(x)$、$Q(x)$,使得下面等式成立:

$$\int[(2x^4-1)\cos x+(8x^3-x^2-1)\sin x]\mathrm{d}x=P(x)\cos x+Q(x)\sin x+C$$

(二) 定积分

1. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$　　(2) $\int_{-2}^{2}\left[\max(1,x^2)+\sin^2 x\ln\frac{4+x}{4-x}\right]\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^9 x-\sin^9 x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$　　(4) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

(5) $\int_{e}^{1}\sin(\ln x)\mathrm{d}x$　　(6) $\int_0^{\pi}\cos^n x\cos nx\,\mathrm{d}x$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$,求 $\int_2^4 f(x-2)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

3. 设函数 $f(x)$ 处处可导,且 $\int_x^{2x}f(t)\mathrm{d}t=\sin x\cos 3x+x$. 试求 $f(0)$,$f'(0)$.

4. 设函数 $g(x)$ 处处连续,且 $g(1)=6$,$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=8$,$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2g(t)\mathrm{d}t$. 试求 $f''(1)$,$f'''(1)$.

5. 不恒等于0的连续函数 $f(x)(x\in(-\pi,\pi))$ 满足 $f^2(x)=\int_0^x f(t)\frac{1+\sin t}{1+\cos t}\mathrm{d}t$,且 $f(0)=1$. 求 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

6 * ○. 设 $f(x)=\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^2+9)}$,试求 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$.

7. 设函数 $f(x)$ 可导且有 $f'(x)+xf'(x-1)=4$,又 $\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t-1)\mathrm{d}t=2x^3+x^2+\frac{2}{x}$,求 $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x$.

8. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^{n\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$　　(2) $\int_0^{n\pi}x\,|\sin x|\cos 2x\cos 4x\,\mathrm{d}x$

9. 设函数 $f(x)$ 是任意的二次多项式,$g(x)$ 是某个二次多项式,且已知 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right]$. 求 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

10. 计算下列反常(广义)积分:

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}(|x|-x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$　　(2) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$

11. 设 $f(x)=\begin{cases} x & 0\leqslant x<1 \\ 2-x & 1\leqslant x<2, \\ 0 & 其他 \end{cases}$ 求 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式.

12. 设 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续偶函数,且 $f(x)>0$. 又 $F(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)\mathrm{d}t\ (a>0)$,求 $F(x)$ 在 $[-a,a]$ 上的最小值.

三、多元函数微分学

1. 设 $z=f(x^2-y^2,\cos(xy))$,$x=r\cos\theta$,$y=r\sin\theta$,求 $\frac{\partial z}{\partial r}$. 其中 f 有一阶连续偏导数.

2. 设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$,其中 f 为可微函数. 求 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 若函数 $f(x,y,z)$ 恒满足关系式 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$ 就称为 k 次齐次函数,验证 k 次齐次函数满足关系式(其中 f 存在一阶连续偏导数)

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z).$$

4. 设函数 $z=F\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x,xy\right)$,其中 F 有二阶连续偏导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

5. 设 $z=x^2 f\left[1+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right]$,$f$、$\varphi$ 为可微函数,求 $\mathrm{d}z$.

6. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数,其中 φ 具有二阶导数且 $\varphi'\neq-1$.

(1) 求 $\mathrm{d}z$; (2) 记 $u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$,求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

7. 设 $z=f(x,y)$,$\varphi(x,y)=0$,其中 f 和 φ 对 x、y 具有二阶连续偏导数且 $\varphi_y'\neq0$,求 z 对 x 的二阶导数.

8. 设函数 $z=z(x,y)$ 的 z_x'、z_y'、z_{xy}'' 均存在且连续,试用变换 $u=x-2\sqrt{y}$,$v=x+2\sqrt{y}$ 把 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}\ (y\geqslant0)$ 化成 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$,并求 $z(x,y)$.

9. 已知 $\begin{cases} xu+yv=1 \\ x+y+u+v=0 \end{cases}$,其中 $u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$,求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

10*. 设 $u=f(r)/r$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,$f(r)$ 二阶可导,$f(1)=0$,$f(2)=1$. 又 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\,u)=0$,求函数值 $u(1,1,1)$.

11. 求由方程 $x^2+y^2+z^2-xz-yz-2x-2y+2z-6=0$ 确定的函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

12. 求函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在区域 D:$|x|+|y|\leqslant1$ 上的最大、最小值.

四、多元函数积分学

1. 计算下列二重积分：

(1)$\iint\limits_{D}|\sin(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为 $0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi$.

(2)$\iint\limits_{D}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D:y\geqslant 0,x^2+y^2\leqslant 1,x^2+y^2\geqslant 2x$.

(3)$\iint\limits_{D}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}$，　其中 D 是由 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$ 与 $y=-x$ 所围平面区域.

(4)$\iint\limits_{D}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,其中 D 是由 $x+y=1,x=0,y=0,y=\sqrt{\dfrac{1}{4}-x^2}$ 所围成的平面区域.

(5)$\iint\limits_{D}(x^2+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 其中 D 为:$0\leqslant x\leqslant 2,-2\leqslant y\leqslant 2,x^2+y^2\geqslant 2x$.

(6)$\iint\limits_{D}(x^2+|xy|+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. $D:(x^2+y^2)^2\leqslant 2xy$.

2. 设 $F(t)=\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,f(x,y)=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$,$D:x+y\leqslant t$,求 $F(t)$.

3*. 计算下列三重积分：

(1)$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

(2)$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,其中 Ω 为由 $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2},y=\sqrt{1-x^2},y=0,z=0$ 所围立体.

(3)$\iiint\limits_{\Omega}|xyz|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为由 $z=\sqrt{4-x^2-y^2},x^2+y^2=1,z=0$ 所围立体.

(4)$\iiint\limits_{\Omega}(x+y)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为由 $z=xy,x=y,x=1,z=0$ 所围立体.

4*. 计算下列曲线积分：

(1)$\oint_{\Gamma}xyz\mathrm{d}z$,其中 Γ 是由平面 $y=z$ 截球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所得截线,从 z 轴正向看去是逆时针方向.

(2)$\oint_{C}\dfrac{(y+x^2y^2+x^4)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 C 为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的正向.

(3)$\oint_{L}\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2-xy+y^2}$,其中 L 为圆周 $x^2+y^2=4$ 的正向.

(4) $\int_L (3xy+\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-ye^y)\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y=x^2-2x$ 上以点 $O(0,0)$ 为起点，以点 $A(4,8)$ 为终点的曲线段.

(5) $\oint_L |y|\mathrm{d}x+|x|\mathrm{d}y$，其中 L 为以点 $A(1,0)$、$B(0,1)$、$C(-1,0)$ 为顶点的三角形正向边界.

5＊. 设积分 $I_1=\int_{\overset{\frown}{AMB}}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y$，$I_2=\int_{\overset{\frown}{ANB}}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y$，其中 $\overset{\frown}{AMB}$ 为连接点 $A(1,1)$、$B(2,6)$ 的直线段，$\overset{\frown}{ANB}$ 为连接 A、B 的抛物线段 $y=2x^2-x$. 试求 I_2-I_1.

6＊. 设曲线积分 $\oint_L 2[x\varphi(y)+\psi(y)]\mathrm{d}x+[x^2\psi(y)+2xy^2-2x\varphi(y)]\mathrm{d}y=0$，其中 L 为任意一条平面曲线. 求：

(1) 可微函数 $\varphi(y)$、$\psi(y)$. 已知 $\varphi(0)=-2$，$\psi(0)=1$.

(2) 求沿 L 从原点 $(0,0)$ 到点 $M\left(\pi,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的曲线积分.

7＊. 确定 λ 的值，使得在不经过直线 $y=0$ 的区域上，曲线积分 $I=\int_L \dfrac{x(x^2+y^2)^\lambda}{y}\mathrm{d}x-\dfrac{x^2(x^2+y^2)^\lambda}{y^2}\mathrm{d}y$ 与路径无关. 并求当 L 从点 $A(1,1)$ 到 $B(0,2)$ 时 I 的值.

8＊. 计算 $\oint_\Gamma 2y\mathrm{d}x-z\mathrm{d}y-x\mathrm{d}z$. 曲线 Γ：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x+z=R\end{cases}$，$\Gamma$ 的方向由 x 轴的正向看是逆时针方向.

9＊. 设函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续导数，且满足

$$\int_0^{x-y-2} f(t)\mathrm{d}t=2x^2+2y^2-4xy+9.$$

(1) 求 $f(t)$；

(2) 计算 $\int_L f(x-y-2)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$，$L$ 是点 $O(0,0)$ 至 $A(1,2)$ 的任意光滑曲线.

10＊. 计算下列曲面积分：

(1) $\iint\limits_\Sigma \dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=R^2$、平面 $z=-H$ 和 $z=H$ 所围立体的表面.

(2) $\iint\limits_\Sigma |xyz|\mathrm{d}S$，其中 Σ 为 $|x|+|y|+|z|=1$.

(3) $\iint\limits_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 限于 $x^2+y^2=x$，$z\geqslant 0$ 部分的外侧.