经纶学典

总主编◎李朝东

教材解析

JIAOCAIJIEXI

人教A版

高中数学

选修4-2

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

JIAOCAIJIEXI

教材解析

赶快行动吧!

读者热线: 0555-2109163

ISBN 978-7-5007-8591-0

9 787500 785910 >

18.80 定价：115.20元（共九册）

经典绝学 总主编◎李朝东

教材解析

JIAOCAIJIEXI

本册主编：陆骄

人教A版

高中数学

选修4-2

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

经纶学典.教材解析.数学.4-2:选修/李朝东主编;陆骄编写.—北京:中国少年儿童出版社,2007.5

ISBN 978-7-5007-8591-0

Ⅰ.经… Ⅱ.①李…②陆… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第055726号

经纶学典·教材解析

数 学 选修4-2

(人教A版)

出版发行:中国少年儿童新闻出版总社

中国少年兒童出版社

出 版 人:李学谦

执行出版人:赵恒峰

总 主 编:李朝东　　封面设计:杭永鸿

责任编辑:赵海力 梁丽贤　　责任印务:栾永生

地 址:北京东四十二条21号　　邮政编码:100708

电 话:010-62006940　　传 真:010-62006941

E-mail:dakaiming@sina.com

印刷:蚌埠市皖沪精印有限公司　　经销:新华书店

开本:880×1230 1/16　印张:82.5　本次印数:10000册

2007年7月第1版　　2007年7月安徽第1次印刷

ISBN 978-7-5007-8591-0/G·6378　　定价:115.20元(共九册)

前言

当一道道疑似难题摆在你面前时，是胸有成竹，还是找不着头绪？如果是前者，那恭喜你，你已经跨越了教材与考试之间的差距；如果是后者，那你也别急，《经纶学典·教材解析》在教材与考试间为你搭建一个沟通平台。

不少同学有这样的感觉：教材都熟悉了，课堂上也听懂了，但考试却取不到好成绩。原因在于教材内容与考试要求有差距，课堂教学与选拔性考试有差别。这就需要在教材之上、课堂之外能够得到补充、提升，直至达到高考的选拔要求。本书就是从以下两个方面填补这种差距。

首先是对教材的深度挖掘。教材内容通俗易懂，但里面包含着丰富的信息，我们把教材所包含的信息挖掘出来，并进行系统整理，让知识内涵和外延、知识间的联系充分展现。

第二是对课堂教学的补充和拓展。本书不是对课堂教学的重复，而是在课堂教学基础上，对课堂教学进行补充、提高，挖掘那些学生难以理解、难以掌握的内容，进行归纳和总结，为学生穿起一条规律性的“线”。数学侧重解题方法、解题技巧、解题思路的整理，注重方法的拓展，找出最优的解题方法，对本节内容与其他小专题内容进行归纳总结。这些由于课堂教学时间限制或教师水平发挥的问题，在课堂上并没有全部传授给学生，而这些恰恰就是考试中要考查的，学生拉开差距的所在。

正是本着上述编写理念，本丛书以学生为中心，用最易理解的表现形式呈现学习中难以理解的部分。希望本书为你的成长助力，有更好的想法和意见请登录：www.jing-lun.cn。

编者

读者反馈表

尊敬的读者：

您好！感谢您使用《经纶学典·教材解析》！

为了不断提高图书质量，恳请您写下使用本书的体会与感受，我们将真诚地吸纳。在修订时将刊登您的意见，并予以一定的奖励，以表达我们诚挚的谢意。

<table>
<tr><td rowspan="3">读者简介</td><td>姓　名</td><td></td><td>性　别</td><td></td><td>出生年月</td><td></td></tr>
<tr><td>所在学校</td><td colspan="2"></td><td>通讯地址</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>联系方式</td><td colspan="5">(H)：　　　　　　(O)：
手机：　　　　　　E－mail：</td></tr>
<tr><td colspan="2">本书情况</td><td>学科</td><td></td><td>版本</td><td></td><td>年级</td></tr>
</table>

您对本书栏目的评价：

1. 教材梳理：
   全面□　一般□　不全面□
2. 教材拓展：
   难□　合理□　易□
3. 典型题解：
   全面□　不全面□
4. 针对性练习：
   难□　合理□　易□
5. 拓展阅读：
   需要□　不需要□
6. 五年高考回放：
   需要□　不需要□

您对本书体例形式的评价：

1. 栏目设置：
   过多□　适中□　过　少□
2. 题空：
   过大□　正好□　过　小□
3. 版式：
   美观□　一般□　不美观□
4. 封面：
   美观□　一般□　不美观□

您的购买行为：

1. 您购买本书的途径：
   广　告□　教师推荐□
   家长购买□　学校统一购买□
   自己购买□　同学推荐□
2. 您购买本书的主要原因（可多选）：
   广告宣传□　包装形式□
   内　容□　图书价格□
   封面设计□　书　名□

您对本书的其他意见：

欢迎登录：www.jing-lun.cn

通信地址：南京红狐教育传播研究所（南京市租用16－02#信箱）　　邮编：210016

目录

MULU

目录

MULU

第3章 空间向量与立体几何

第1章 常用逻辑用语

1.1 命题及其关系

1.1.1 四种命题

A 教材梳理

知识点一　命题

1. 命题的定义

能够判断真假的语句叫做命题.

注意:理解此概念的关键是:

(1)并不是任何语句都是命题,只有能判断真假的语句才是命题.例如:"这是一棵大树."就不是命题.

(2)一般来说,疑问句、祈使句、感叹句都不是命题.

(3)科学猜想也是命题.因为随着科学技术的发展与时间的推移,总能确定它的真假.例如:"在2020年前,将有人类登上火星."等.

2. 命题的分类

命题一定可以分为真命题和假命题.

3. 命题的表示

一个命题,一般可以用一个小写英文字母表示.如:p,q,r,⋯.

4. 命题的结构

命题的一般形式为:"若p,则q".有一些命题虽然表面上不是这种形式,但经过适当的改写,可以写成"若p,则q"的形式.p叫做命题的条件,q叫做命题的结论.

知识点二　四种命题的概念

1. 互逆命题:一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件,我们称这两个命题为互逆命题.

2. 互否命题:一个命题的条件和结论分别是另一个命题的条件的否定和结论的否定,这样的两个命题称为互否命题.

3. 互为逆否命题:一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论的否定和条件的否定,这样的两个命题称为互为逆否命题.

知识点三　四种命题之间的关系

1. 四种命题关系的叙述

(1)原命题:若p,则q.

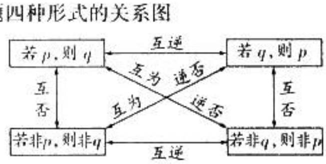
(2)逆命题:条件和结论"换位"得:若q,则p,称为原命题的逆命题.

(3)否命题:条件和结论"换质"得:若非p,则非q,称为原命题的否命题.

(4)逆否命题:条件和结论"换位"又"换质"得:若非q,则非p,称为原命题的逆否命题.

说明:把命题称为逆命题、否命题、逆否命题都是以原命题为基础.当然,我们也可以把任何一个命题看作原命题.例如:我们把"若非p,则非q"看成是原命题,那么它的逆命题为"若非q,则非p";否命题为"若p,则q";逆否命题为"若q,则p".

2. 命题四种形式的关系图



3. 写命题四种形式时应注意的问题

(1)一定要分清命题的条件与结论.注意大前提不能作为条件来对待,它在四种形式里是不变的.

(2)一定要注意条件与结论的否定形式.

B 教材拓展

拓展点一　四种命题的真假关系

四种命题的真假性,有且仅有下面4种情况.

原命题	逆命题	否命题	逆否命题
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	真	假
假	假	假	假

由于逆命题和否命题也是互为逆否命题，因此四种命题的真假性之间的关系如下：

(1)两个命题互为逆否命题，它们有相同的真假性.

(2)两个命题为互逆命题或互否命题，它们的真假性没有关系.

(3)互为逆否命题可以认为是等价命题，它们同真同假，同一个命题的逆命题和否命题是一对互为逆否的命题，因此它们同真同假.

拓展点二　否命题与命题的否定之间的不同

1. 否命题是指对原命题的条件与结论"换质"(分别否定). 命题"若 p，则 q"的否命题为"若非 p，则非 q"；而命题的否定只是结论，命题"若 p，则 q"的否定形式为"若 p，则非 q".

2. 命题与命题的否定形式是一真一假，不能相同. 而命题与否命题之间没有真假关联.

拓展点三　反证法与逆否证法的不同

1. 反证法是利用命题与它的否定形式的真假不同，通过否定命题的否定形式，对命题做出肯定判断.

2. 逆否证法是利用原命题与它的逆否命题真假相同，通过证明它的逆否命题这种间接形式来对原命题做出肯定.

C 典型题解

▶问题一　命题的概念与判断

例题 1　下列语句哪些是命题？是真命题还是假命题？

(1)空集是任何集合的子集；

(2)若整数 a 是质数，则 a 是奇数；

(3)指数函数是增函数吗？

(4)若平面上两条直线不相交，则这两条直线平行；

(5) $\sqrt{(-2)^2}=-2$；

(6) $x>15$.

[解析]　判断一个语句是不是命题，就是要看它是否符合"是陈述句"和"可以判断真假"这两个条件.

[答案]　(3)是疑问句，没有对指数函数是否是增函数作出判断，所以不是命题.

(6)虽是陈述句，但不能判断真假，所以也不是命题.

(1)(4)是真命题，(2)(5)是假命题.

[点评]　判定命题及其真假，一定要紧扣定义. (1)一个命题，要么真，要么假，二者只有其一. (2)一般来说，疑问句、祈使句、感叹句都不是命题.

例题 2　判断下列语句是否是命题，若是，判断其真假，并说明理由.

(1)垂直于同一条直线的两条直线必平行吗？

(2)一个整数不是合数就是质数；

(3)大角所对的边大于小角所对的边；

(4) $x+y$ 是有理数，则 x,y 也都是有理数.

[解析]　解决此类问题一是要紧扣定义，二是要分析命题是什么样的命题，不同的命题真假判定方法也是不同的.

[答案]　(1)是疑问句，没有对垂直于同一条直线的两条直线是否平行作出判断，不是命题.

(2)是假命题，整数 1 既不是合数也不是质数.

(3)是假命题，必须在同一个三角形或全等三角形中.

(4)是假命题，如 $x=\sqrt{2}, y=-\sqrt{2}$.

例题 3　把下列命题改写成"若 p，则 q"的形式，并判断命题的真假.

(1) $ac>bc \Rightarrow a>b$；

(2)已知 x,y 为正整数，当 $y=x+1$ 时，$y=3, x=2$；

(3)当 $m>\frac{1}{4}$ 时，$mx^2-x+1=0$ 无实根；

(4)当 $abc=0$ 时，$a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$；

(5)当 $x^2-2x-3=0$ 时，$x=3$ 或 $x=-1$.

[解析]　找准命题的条件和结论是解决这类题目的关键.

[答案]　(1)若 $ac>bc$，则 $a>b$，假命题.

(2)已知 x,y 为正整数，若 $y=x+1$，则 $y=3$ 且 $x=2$，假命题.

(3)若 $m>\frac{1}{4}$，则 $mx^2-x+1=0$ 无实根，真命题.

(4)若 $abc=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$，真命题.

(5)若 $x^2-2x-3=0$，则 $x=3$ 或 $x=-1$，真命题.

[点评]　解决此类题目，首先要分清命题的条件和结论，尤其是(2)中大前提不能作为条件来处理.

▶问题二　写出命题的四种形式

例题 4　把下列命题写成"如果 p，则 q"的形式，并写出它们的逆命题、否命题与逆否命题.

(1)当 $x=2$ 时，$x^2-3x+2=0$；

(2)对顶角相等.

[解析]　写出命题的四种形式关键是如何"换位"与"换质".

[答案] (1)原命题:如果 $x=2$,则 $x^2-3x+2=0$.

逆命题:如果 $x^2-3x+2=0$,则 $x=2$.

否命题:如果 $x\neq2$,则 $x^2-3x+2\neq0$.

逆否命题:如果 $x^2-3x+2\neq0$,则 $x\neq2$.

(2)原命题:如果两个角是对顶角,则它们相等.

逆命题:如果两个角相等,则它们是对顶角.

否命题:如果两个角不是对顶角,则它们不相等.

逆否命题:如果两个角不相等,则它们不是对顶角.

[点评] 该题主要是练习命题的四种形式的写法,注意一定要紧扣定义,实现"换位"与"换质".

例题 5 "菱形的对角线互相垂直",将此命题写成"若 p,则 q"的形式,写出它的逆命题、否命题、逆否命题,并指出其真假.

[解析] 写出命题的四种形式主要是分清命题的条件与结论.

[答案] 原命题:若一个四边形是菱形,则它的对角线互相垂直. 真命题.

逆命题:若一个四边形的对角线互相垂直,则它是菱形. 假命题.

否命题:若一个四边形不是菱形,则它的对角线不垂直. 假命题.

逆否命题:若一个四边形的对角线不垂直,则它不是菱形. 真命题.

[点评] 判定命题四种形式的真假,方法有二:一是写出命题直接判定. 二是利用命题真假之间的关系,互为逆否的两个命题同真同假. 从而只判定两个命题即可.

▶问题三 逆否命题的等价性

例题 6 写出下列命题的等价命题:

(1)圆内接四边形的对角互补;

(2)若 $x=1$ 或 $x=-3$,则 $x^2+2x-3=0$;

(3)奇数不能被 2 整除.

[解析] 因为命题与它的逆否命题等价. 所以写出它的逆否命题即可.

[答案] (1)对角不互补的四边形,不是圆内接四边形.

(2)若 $x^2+2x-3\neq0$,则 $x\neq1$ 且 $x\neq-3$.

(3)能被 2 整除的数不是奇数.

[点评] 写逆否命题要注意以下几点:①分清命题的条件与结论;②既"换质"又"换位";③在"换质"时要注意写命题的非时应注意的问题,"且""或"以及量词的变换.

例题 7 判断命题"如果 $m>0$,则 $x^2+x-m=0$ 有实数根"的逆否命题的真假.

[解析] 因为命题与它的逆否命题的等价性,使我们在判定命题真假时,可以采取多种方法.

[答案] 解法一:$\because m>0$,$\therefore 4m>0$. $\therefore 4m+1>0$.

$\therefore$ 方程 $x^2+x-m=0$ 的判别式 $\Delta=4m+1>0$.

$\therefore$ 方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根.

$\therefore$ 原命题"如果 $m>0$,则 $x^2+x-m=0$ 有实数根"为真.

又$\because$ 原命题与它的逆否命题等价,$\therefore$ "如果 $m>0$,则 $x^2+x-m=0$ 有实数根"的逆否命题也为真.

解法二:原命题"如果 $m>0$,则 $x^2+x-m=0$ 有实数根"的逆否命题为"如果 $x^2+x-m=0$ 无实数根,则 $m\leqslant0$".

$\because x^2+x-m=0$ 无实数根,

$\therefore \Delta=4m+1<0$. $\therefore m<-\dfrac{1}{4}\leqslant0$.

$\therefore$ 命题"如果 $x^2+x-m=0$ 无实数根,则 $m\leqslant0$"为真.

解法三:p:$m>0$,q:$x^2+x-m=0$ 有实数根. 非 p:$m\leqslant0$,非 q:$x^2+x-m=0$ 无实数根. $\therefore$ 非 p:$A=\{m|m\leqslant0\}$,

非 q:$B=\{m|$ 方程 $x^2+x-m=0$ 无实数根$\}=\left\{m\,\middle|\,m<-\dfrac{1}{4}\right\}$

$\because B\subseteq A$,$\therefore$ "若非 q,则非 p"为真,即"如果方程 $x^2+x-m=0$ 无实数根,则 $m\leqslant0$"为真.

[点评] 解法一是说对命题可以直接判定真假;解法二是利用命题与它的逆否命题的等价性,通过判定其逆否命题的真假来判定命题的真假;解法三是通过集合的子集与推出的关系先得到"若非 q,则非 p"为真,而后得到"若 p,则 q"为真.

例题 8 主人邀请张三、李四、王五三人吃饭聊天,时间到了,只有张三、李四准时赴约,王五打电话说:"临时有急事,不能来了",主人听了随口说了句:"你看看,该来的没有来",张三听了,脸色一沉,起来一声不吭地走了,主人愣了片刻,又道了句:"哎哟,不该走的又走了". 李四听了大怒,拂袖而去.

请你用逻辑与命题的原理解释二人离去原因.

[解析] 充分利用命题与逆否命题的等价性来说明原因.

[答案] 张三走的原因:"该来的没有来"的逆否命题是"来了不该来的",张三觉得自己是不该来的. 李四走的原因:"不该走的又走了"的逆否命题是"该走的没有走",李四觉得自己是应该走的.

[点评] 这是一个老笑话,是说主人不会说话,不过在这个故事中却蕴含着逻辑思想,通过这样的题目,可以激发同学们学习数学的兴趣.

▶问题四 命题的逆否证法

例题 9 证明:如果 $p^2+q^2=2$,则 $p+q\leqslant2$.

[解析] 将"如果 $p^2+q^2=2$,则 $p+q\leqslant2$"视为原命题,要证明原命题为真命题,可以考虑证明它的逆否命题:"如果 $p+q$

>2，则 $p^2+q^2\neq 2$”为真命题．从而达到证明原命题为真命题的目的．

［答案］ 该命题的逆否命题为：若 $p+q>2$，则 $p^2+q^2\neq 2$．

$p^2+q^2=\frac{1}{2}[(p+q)^2+(p-q)^2]\geqslant\frac{1}{2}(p+q)^2$．

$\because p+q>2$，$\therefore (p+q)^2>4$，$\therefore p^2+q^2>2$．

即 $p+q>2$ 时，$p^2+q^2\neq 2$ 成立．

$\therefore$ 如果 $p^2+q^2=2$，则 $p+q\leqslant 2$．

［点评］ 逆否证法与反证法不同，逆否证法是利用了命题的等价性，而反证法是通过否定命题的否定形式来肯定命题．

D 针对性练习

1．下列语句为命题的是 （ ）

A．对角线相等的四边形

B．同位角相等

C．$x\geqslant 2$

D．$x^2-2x+1<0$

2．下列命题中，是真命题的是 （ ）

A．$\{\varnothing\}$是空集

B．$\{x\mid |x-1|<3,x\in\mathbf{N}\}$是无限集

C．π是有理数

D．$x^2-5x=0$的根是自然数

3．当命题“若 p，则 q”为真时，下列命题中一定正确的是 （ ）

A．若 q，则 p　　B．若非 p，则非 q

C．若非 q，则非 p　　D．若非 p，则 q

4．命题“两条对角线相等的四边形是矩形”是命题“矩形是两条对角线相等的四边形”的 （ ）

A．逆命题　　B．否命题

C．逆否命题　　D．以上都不对

5．下列说法中，不正确的是 （ ）

A．“若 p，则 q”与“若 q，则 p”是互逆的命题

B．“若非 p，则非 q”与“若 q，则 p”是互否的命题

C．“若非 p，则非 q”与“若 p，则 q”是互否的命题

D．“若非 p，则非 q”与“若 q，则 p”是互为逆否的命题

6．命题“若 $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$”的逆否命题是 （ ）

A．若 $A\cup B=A$，则 $A\supseteq B$

B．若 $A\cap B\neq A$，则 $A\not\subseteq B$

C．若 $A\not\subseteq B$，则 $A\cap B\neq A$

D．若 $A\supseteq B$，则 $A\cap B\neq A$

7．与命题“能被 6 整除的整数，一定能被 3 整除”等价的命题是 （ ）

A．能被 3 整除的整数，一定能被 6 整除

B．不能被 3 整除的整数，一定不能被 6 整除

C．不能被 6 整除的整数，一定不能被 3 整除

D．不能被 6 整除的整数，不一定能被 3 整除

8．有下列四个命题：

①“若 $xy=1$，则 x,y 互为倒数”的逆命题；

②“相似三角形的周长相等”的否命题；

③“若 $b\leqslant -1$，则方程 $x^2-2bx+b^2+b=0$ 有实根”的逆否命题；

④“若 $A\cup B=B$，则 $A\supseteq B$”的逆否命题．

其中真命题是 （ ）

A．①②　　B．②③

C．①③　　D．③④

9．设 α,β 为两个不同的平面，l,m 为两条不同的直线，且 $l\subset\alpha$，$m\subset\beta$，有如下的两个命题：①若 $\alpha/\!/\beta$，则 $l/\!/m$；②若 $l\perp m$，则 $\alpha\perp\beta$，那么它们的逆否命题 （ ）

A．①真②假　　B．①假②真

C．①②都为真　　D．①②都为假

10．“若 a,b 都是质数，则 $a+b$ 是偶数”的逆否命题是____________．

11．命题“各位数字之和是 3 的倍数的正整数可以被 9 整除”，与它的逆命题、否命题及逆否命题，中假命题是________，真命题是________．

12．命题“奇函数的图象关于原点对称”的逆否命题是____________．

13．写出命题“若 $\angle C\neq 90°$，则 $\triangle ABC$ 不是直角三角形”的逆命题、否命题和逆否命题．

14．命题：已知 a,b 为实数，若 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有实数解，则 $a^2-4b\geqslant 0$．写出该命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断这些命题的真假．

15. 已知函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数,$a,b\in\mathbf{R}$,对命题"若$a+b\geq0$,则$f(a)+f(b)\geq f(-a)+f(-b)$."

(1)写出逆命题,判断其真假,并证明你的结论;

(2)写出逆否命题,判断其真假,并证明你的结论.

[参考答案]

1. B 解析:A、C、D均不是命题,A不是陈述句,C、D无法判定真假.
2. D 解析:$x^2-5x=0$的根为$x_1=0,x_2=5$,均为自然数.
3. C 解析:原命题与它的逆否命题同真同假.
4. A 解析:条件与结论"换位"是互为逆命题的.
5. B 解析:由定义知"若非p,则非q"与"若q,则p"是互为逆否的命题.
6. C 解析:由定义知逆否命题是既"换位"又"换质".
7. B 解析:因为互为逆否的两个命题是等价的.
8. C 解析:①若x,y互为倒数,则$xy=1$,真命题.②不相似的三角形周长不相等,假命题.③若方程$x^2-2bx+b^2+b=0$无实根,则$b>-1$.$\because\Delta=4b^2-4(b^2+b)<0,\therefore b>0$,$\therefore$命题为真命题.④直接判定.$\because A\cup B=B,\therefore A\subseteq B,\therefore$命题为假命题.
9. D 解析:$\because$这两个命题都是假命题,$\therefore$它们的逆否命题也都是假命题.
10. 若$a+b$不是偶数,则a,b不都是质数
11. 原命题、逆否命题 逆命题、否命题
12. 图象关于原点不对称的函数不是奇函数
13. 解:逆命题:若$\triangle ABC$不是直角三角形,则$\angle C\neq90°$.
否命题:若$\angle C=90°$,则$\triangle ABC$是直角三角形.
逆否命题:若$\triangle ABC$是直角三角形,则$\angle C=90°$.
14. 解:逆命题:已知a,b为实数,若$a^2-4b\geq0$,则$x^2+ax+b\leq0$有实数解.
$\because$函数$f(x)=x^2+ax+b,\Delta=a^2-4b\geq0$.
$\therefore$不等式$x^2+ax+b\leq0$一定有解,真命题.
否命题:已知a,b为实数,若$x^2+ax+b\leq0$无实数解,则$a^2-4b<0$,真命题.
逆否命题:已知a,b为实数,若$a^2-4b<0$,则$x^2+ax+b\leq0$,无实数解,真命题.
15. 解:(1)逆命题:若$f(a)+f(b)\geq f(-a)+f(-b)$,则$a+b\geq0$,它是成立的,可用反证法证明.假设$a+b<0$,则$a<-b,b<-a.\because f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数,则$f(a)<f(-b),f(b)<f(-a),\therefore f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,与条件矛盾,$\therefore$逆命题为真.
(2)逆否命题:若$f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,则$a+b<0$.若证它为真,可证明原命题为真来证明.$\because a+b\geq0,\therefore a\geq-b,b\geq-a.\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数,$\therefore f(a)\geq f(-b),f(b)\geq f(-a),\therefore f(a)+f(b)\geq f(-a)+f(-b)$.$\therefore$逆否命题为真.

E 课后答案点拨

[练习(第7页)]

1. (1)正确;(2)正确.

2. (1)逆命题:若$a=b$,则$|a|=|b|$,真;否命题:若$|a|\neq|b|$,则$a\neq b$,真;逆否命题:若$a\neq b$,则$|a|\neq|b|$,假.

(2)逆命题:若$x^2>0$,则$x<0$,假;否命题:若$x\geq0$,则$x^2\leq0$,假;逆否命题:若$x^2\leq0$,则$x\geq0$,真.

F 拓展阅读

逆否证法的应用

在商品大战中,广告成了电视节目的一道美丽的风景线,几乎所有的广告商都熟谙这样的命题变换艺术.如宣传某种食品,其广告词为:"拥有的人们都幸福,幸福的人们都拥有."初听起来,这似乎只是几句普通的赞美词,然而它所起的实际效果可大哩!原来,这句话变换成等价命题就是"不拥有的人们不幸福."哪个家庭不希望幸福呢,掏钱买一盒就得了.

瞧!广告商的目的就这样通过巧妙的命题变换达到了,不过,要彻底弄清其中的奥妙,还得先从命题的真假性谈起.

我们已经学过了四种命题的形式:

原命题:$p\Rightarrow q$

逆命题:$q\Rightarrow p$

否命题:非$p\Rightarrow$非q

逆否命题:非$q\Rightarrow$非p

为了进一步揭示四种形式命题间的内在联系,不妨观察下列命题:

原命题:对顶角相等.(真)

逆命题:相等的角是对顶角.(假)

否命题:不是对顶角就不相等.(假)

逆否命题:不相等的角不是对顶角.(真)

由上例可以看出:原命题为真,逆命题未必为真;否命题为真,逆否命题未必为真.然而,原命题与逆否命题,逆命题与

否命题，它们的真假却是一致的. 这种命题的等价性，是普遍性的规律. 我们假定原命题 $p\Rightarrow q$ 为真，如果逆否命题非 $q\Rightarrow$ 非 p 为假的话，根据排中律，必有非 $q\Rightarrow p$ 是真的. 于是有非 $q\Rightarrow p\Rightarrow q$. 即非 $q\Rightarrow q$，这显然违反矛盾律，从而表示逆否命题非 $q\Rightarrow$ 非 p 为真. 这样，我们证明了原命题与逆否命题等价. 同样，也可以证明否命题与逆命题等价. 本文开头讲的广告，正是运用了命题的等价变换，使顾客产生一种购物的心理效应.

G 五年高考回放

1 (2001 · 全国)在空间中，

①若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线；

②若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线.

以上两个命题中，逆命题为真命题的是________.(把符合要求的命题序号填上)

[解析] ①的逆命题为：若空间四点中任何三点都不共线，则这四点不共面. 假命题.

②的逆命题为：若两条直线异面，则这两条直线没有公共点. 真命题.

[答案] ②

2 (2005 · 江苏)命题"若 $a>b$，则 $2^a>2^b-1$"的否命题为________.

[解析] 该题将不等式与四种命题联系在一起，特别要注意不等号的方向和等号的取舍.

"$a>b$"的否定是"$a\leqslant b$"，"$2^a>2^b-1$"的否定是"$2^a\leqslant 2^b-1$".

$\therefore$ 原命题的否命题是"若 $a\leqslant b$，则 $2^a\leqslant 2^b-1$".

[答案] 若 $a\leqslant b$，则 $2^a\leqslant 2^b-1$

3 (2006 · 湖北)关于 x 的方程 $(x^2-1)^2-|x^2-1|+k=0$，给出下列四个命题：

①存在实数 k，使得方程恰有 2 个不同的实根；

②存在实数 k，使得方程恰有 4 个不同的实根；

③存在实数 k，使得方程恰有 5 个不同的实根；

④存在实数 k，使得方程恰有 8 个不同的实根.

其中假命题的个数是 ( )

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

[解析] 根据题意可令 $|x^2-1|=t(t\geqslant 0)$，则方程化为 $t^2-t+k=0(*)$，作出函数 $y=|x^2-1|$ 的图象，结合函数图象可知，(1) 当 $t=0$ 或 $t>1$ 时，方程有 2 个根；(2) 当 $0<t<1$ 时，方程有 4 个根；(3) 当 $t=1$ 时，方程有 3 个根. 故当 $t=0$ 时，代入方程$(*)$，解得 $k=0$，此时方程$(*)$有两个不等根 $t=0$ 或 $t=1$，故此时方程有 5 个根；当方程$(*)$有两个不等正根时，$0<k<\frac{1}{4}$，此时方程$(*)$有两正根且均小于 1，故相应的满足方程 $|x^2-1|=t$ 的解有 8 个；当 $k=\frac{1}{4}$ 时，方程$(*)$有两个相等的正根 $t=\frac{1}{2}$，相应的解有 4 个，故选 A.

[答案] A

4 (2007 · 重庆)命题"若 $x^2<1$，则 $-1<x<1$"的逆否命题是 ( )

A. 若 $x^2\geqslant 1$，则 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$

B. 若 $-1<x<1$，则 $x^2<1$

C. 若 $x>1$ 或 $x<-1$，则 $x^2>1$

D. 若 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$，则 $x^2\geqslant 1$

[解析] 命题的条件是"$x^2<1$"，结论是"$-1<x<1$"，将条件与结论否定并交换位置，即可得答案，注意"$-1<x<1$"的否定是"$x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$".

[答案] D

1.1.2 充分条件和必要条件

A 教材梳理

知识点一　推出

1. 推出的记法

命题"若 p，则 q"为真，记作"$p\Rightarrow q$". "若 p 则 q"为假，记作"$p\nRightarrow q$".

2. "$\Rightarrow$"与"$\nRightarrow$"的读法

"$p\Rightarrow q$"读作"p 推出 q"，"$p\nRightarrow q$"读作"p 不能推出 q".

知识点二　充分条件与必要条件

1. 充分条件的定义

一般地，如果 $p\Rightarrow q$，那么称 p 是 q 的充分条件.

2. 必要条件的定义

如果 $p\Rightarrow q$，那么称 q 是 p 的必要条件.

3. 充分条件与必要条件的关系

p 是 q 的充分条件反映了 $p\Rightarrow q$，而 q 是 p 的必要条件也反映了 $p\Rightarrow q$，所以 p 是 q 的充分条件与 q 是 p 的必要条件表述的是同一个逻辑关系，只是说法不同.

知识点三　充要条件

1. 充要条件的定义

一般地，如果 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则称 p 是 q 的充分且必要条件，简称 p 是 q 的充要条件，记作 $p\Leftrightarrow q$.

如果 $p\Rightarrow q$ 且 $p\nLeftarrow q$，那么称 p 是 q 的充分不必要条件.

如果 $p\nRightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，那么称 p 是 q 的必要不充分条件.

如果 $p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$，那么称 p 是 q 的既不充分又不必要条件.

2. 充要条件的含义

若 p 是 q 的充要条件，则 q 也是 p 的充要条件，虽然本质上是一样的，但在说法上还是不同，因为这两个命题的条件与结论不同.

3. 充要条件的等价说法

p 是 q 的充要条件又常说成是 q 当且仅当 p，或 p 与 q 等价.

B 教材拓展

拓展点一　$p\Rightarrow q$ 的另外几种说法

在逻辑推理中，$p\Rightarrow q$ 还可以表述成以下 5 种说法：

①"如果 p，则 q"为真命题；②p 是 q 的充分条件；③q 是 p 的必要条件；④q 的充分条件是 p；⑤p 的必要条件是 q. 这五种说法表示的逻辑关系是一样的，只是说法不同而已.

拓展点二　证明 p 是 q 的充要条件时应该注意的问题

证明 p 是 q 的充要条件时，一是要注意既要证明 $p\Rightarrow q$，又要证明 $q\Rightarrow p$，不能忽略任何一个；二是在证明过程中要分清充分性与必要性的条件与结论，不要混淆. 使说法严谨，加强逻辑性.

拓展点三　子集与推出的关系

在两个集合 $A=\{x|p(x)\}$，$B=\{x|q(x)\}$ 中，若 $A\subseteq B$，那么 x 具有 $p(x)\Rightarrow x$ 具有 $q(x)$，反之也成立，若 x 具有 $p(x)\Rightarrow x$ 具有 $q(x)$，那么 $A\subseteq B$. 这说明我们可以利用集合之间的子集关系来说明"推出"这种逻辑关系.

拓展点四　等价命题的转化与充要条件

因为 p 是 q 的充要条件与 p 与 q 等价是一致的，所以我们可以通过这一结论将我们所要证明判定的结论或利用的条件进行转化. 例如：p："二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等的实数根"与 q："二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中判别式 $\Delta>0$"等价. 即我们可以把命题 p 转化为命题 q 来证明判定. 这就是数学上重要的转化思想.

拓展点五　命题四种形式的真假与充要条件的关系

若原命题"若 p，则 q"是真命题，则 p 是 q 的充分条件；如果逆命题"若 q，则 p"是真命题，则 p 是 q 的必要条件，原命题与逆命题都为真，则 p 是 q 的充要条件.

C 典型题解

▶问题一　充分条件与必要条件的判定

例题 1　指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件.

(1) p：数 a 能被 6 整除，q：数 a 能被 3 整除；

(2) p：$\triangle ABC$ 有两个角相等；q：$\triangle ABC$ 是等腰三角形；

(3) p：$a^2+b^2>2ab$，q：$|a+b|<|a|+|b|$.

［解析］　解决此类问题就是要判定命题"如果 p，则 q"和命题"如果 q，则 p"的真假.

［答案］　(1) $p\Rightarrow q$，而 $q\nRightarrow p$，$\therefore$ p 是 q 的充分不必要条件.

(2) $p\Leftrightarrow q$，$\therefore$ p 是 q 的充要条件.

(3) $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2>0$，$\therefore$ $a\neq b$，而 $|a+b|<|a|+|b|$ 须满足 a 与 b 异号，即 p 与 q 无关，$\therefore$ p 是 q 的既不充分又不必要条件.

［点评］　判定 p 是 q 的什么条件，就是要判定"如果 p，则 q"和"如果 q，则 p"这两个命题的真假，注意一定不能写成 $p\Rightarrow q$ 是假命题，可以写成 $p\nRightarrow q$.

例题 2　(1) 若 p：两条直线的斜率互为负倒数，q：两条直线互相垂直，则 p 是 q 的什么条件？

(2) 若 p：$|3x-4|>2$，q：$\dfrac{1}{x^2-x-2}>0$，则非 p 是非 q 的什么条件？

［解析］　注意一定要判定两个命题的真假，才可以下结论. (2) 可以利用集合中子集与推出的关系判定.

［答案］　(1) $\because$ 两条直线的斜率互为负倒数，$\therefore$ 两直线垂直. $\therefore$ $p\Rightarrow q$. 又 $\because$ 一条直线的斜率不存在，另一条直线的斜率为 0，两直线也垂直，$\therefore$ $q\nRightarrow p$.

$\therefore$ p 是 q 的充分不必要条件.

(2) 解不等式 $|3x-4|>2$，得 $p=\left\{x\,\middle|\,x>2 \text{ 或 } x<\dfrac{2}{3}\right\}$，

$\therefore$ 非 $p=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2\right\}$

解不等式 $\dfrac{1}{x^2-x-2}>0$，得

$q=\{x|x>2$ 或 $x<-1\}$.

$\therefore$ 非 $q=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$.

$\therefore$ 非 $p\subsetneqq$ 非 q.

$\therefore$ 非 p 是非 q 的充分不必要条件.

［点评］ 要判定 $p\nRightarrow q$ 可以用举反例的方法,用子集来判定推出关系有时很方便.

例题 3 已知 $h>0,a,b\in\mathbf{R}$,设命题甲为"$|a-b|<2h$";命题乙为"$|a-1|<h$ 且 $|b-1|<h$",那么 ( )

A. 甲是乙的充分不必要条件

B. 甲是乙的必要不充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件,也不是乙的必要条件

［解析］ 判定命题的真假可以充分利用上一节中的内容.

(1)取 $a=-2,b=1,h=2$,则 $|a-b|=3<4=2h$,满足条件,但 $|a-1|=3>2$,$|a-1|<h$ 不成立.$\therefore$ 甲 $\nRightarrow$ 乙.

(2)$\because$ $|a-1|<h,|b-1|<h$,

$\therefore$ $|a-b|=|(a-1)-(b-1)|\leqslant|a-1|+|b-1|<h+h=2h$. $\therefore$ 乙 $\Rightarrow$ 甲.

$\therefore$ 甲是乙的必要不充分条件. 故选 B.

［答案］ B

［点评］ 如果 $p\nRightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的必要不充分条件.

例题 4 "$a=0$"是"直线 $l_1:x-2ay-1=0$ 与 $l_2:2x-2ay-1=0$ 平行"的________条件.

［解析］ 解决问题时分析要全面,判定直线与直线平行的必要条件时要分 $a=0$ 与 $a\neq 0$ 两种情况.

(1)$\because$ $a=0$,$\therefore$ $l_1:x-1=0,l_2:2x-1=0$.

$\therefore$ $l_1/\!/l_2$,即 $a=0\Rightarrow l_1/\!/l_2$.

(2)若 $l_1/\!/l_2$,

当 $a\neq 0$ 时,$l_1:y=\dfrac{1}{2a}x-\dfrac{1}{2a}$,$l_2:y=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{1}{2a}$,

$\therefore$ $\dfrac{1}{2a}=\dfrac{1}{a}$. 无解.

当 $a=0$ 时,$l_1:x-1=0,l_2:2x-1=0$,显然 $l_1/\!/l_2$.

［答案］ 充要

［点评］ 如果 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的充要条件.

▶问题二 充分、必要条件的传递性

例题 5 已知 p 是 r 的充分条件,s 是 q 的充分条件,q 是 r 的充要条件,那么:

(1)s 是 r 的什么条件?

(2)q 是 p 的什么条件?

［解析］ 因为推出是具有传递性的,可以充分利用.

［答案］ (1)s 是 q 的充分条件,$\therefore$ $s\Rightarrow q$.

q 是 r 的充要条件,$\therefore$ $q\Leftrightarrow r$.

$\therefore$ $s\Rightarrow q\Leftrightarrow r$.

即 s 是 r 的充分条件.

(2)$p\Rightarrow r\Leftrightarrow q$,$\therefore$ q 是 p 的必要条件.

［点评］ 对待这类题目,不要管这是什么命题,只考虑命题之间的关系就行了,也可以通过一个结构图来分析.

▶问题三 充要条件的逆用问题

例题 6 设集合 $U=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,$A=\{(x,y)|2x-y+m>0\}$,$B=\{(x,y)|x+y-n\leqslant 0\}$,那么点 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$ 的充要条件是 ( )

A. $m>-1,n<5$　　B. $m<-1,n<5$

C. $m>-1,n>5$　　D. $m<-1,n>5$

［解析］ 要寻求 $P\in A\cap(\complement_U B)$ 的充要条件,应从充分性、必要性两方面入手.

(1)$\complement_U B=\{(x,y)|x+y-n>0\}$.

$A\cap(\complement_U B)=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}x+y-n>0,\\2x-y+m>0\end{array}\right.\right\}$,由 $P\in A\cap(\complement_U B)$ 知,$\begin{cases}5-n>0,\\1+m>0,\end{cases}$ 即 $m>-1,n<5$. $\therefore$ "$m>-1,n<5$"是"$P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$"的必要条件.

(2)当 $m>-1,n<5$ 时,$\begin{cases}x+y\geqslant 5,\\2x-y\geqslant 1,\end{cases}$ $\therefore$ $x\geqslant 2,y\geqslant 3$.

即 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$,$\therefore$ "$m>-1,n<5$"是"$P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$"的充分条件,选 A.

［答案］ A

［点评］ 证明过程中必须注明哪一个是充分性,哪一个是必要性. 体现了题目证明的逻辑性.

例题 7 已知 $p:\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$,$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$,且非 p 是非 q 的必要条件,求实数 m 的取值范围.

［解析］ 注意非 p 可以用补集来表示,非 q 也一样.

［答案］ 由 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$,得 $1-m\leqslant x\leqslant 1+m$,

$\therefore$ 非 $q:A=\{x|x>1+m$ 或 $x<1-m\}$.

由 $\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$,得 $-2\leqslant x\leqslant 10$,

$\therefore$ 非 $p:B=\{x|x>10$ 或 $x<-2\}$.

$\because$ 非 p 是非 q 的必要条件,

$\therefore$ $A\subseteq B\Leftrightarrow\begin{cases}m>0,\\1-m\leqslant -2,\\1+m\geqslant 10.\end{cases}$ 解得 $m\geqslant 9$.

［点评］ 除了判定条件的题目之外,还有利用条件的综合

题. 在解决这类题目时，特别要注意推出的方向，并充分利用推出与子集的关系.

▶问题四　充要条件的证明

例题 8　设 α,β 是方程 $x^2-ax+b=0$ 的两个实根，试分析 $p:a>2$ 且 $b>1$ 是 q：两根 α,β 均大于 1 的什么条件？

[解析]　题目的大前提不能作为条件处理，该题的条件是 $a>2$ 且 $b>1$，而结论是两根 α,β 均大于 1.

[答案]　由韦达定理得，$\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=b$.

(1) $\because\alpha>1$，且 $\beta>1$，

$\therefore a=\alpha+\beta>2$，$b=\alpha\beta>1$，即由 $q\Rightarrow p$.

(2) 再看由 p 能否推出 q，不妨取 $\alpha=4$，$\beta=\dfrac{1}{2}$，$a=\alpha+\beta=4+\dfrac{1}{2}>2$，$b=\alpha\beta=4\times\dfrac{1}{2}=2>1$，但 q 不成立，即 $p\not\Rightarrow q$.

由(1)(2)知，"$a>2$ 且 $b>1$"是"$\alpha>1$ 且 $\beta>1$"的必要不充分条件.

[点评]　判定充分条件、必要条件一定要分清条件和结论，注意大前提不能作为条件对待.

例题 9　已知关于 x 的方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0$，$a\in\mathbf{R}$，求方程有两个正根的充要条件.

[解析]　充要条件就是当且仅当，就是等价关系，注意转化.

[答案]　方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0$ 有两个实根的充要条件是 $\begin{cases}1-a\neq0,\\ \Delta\geqslant0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a\neq1,\\ (a+2)^2+16(1-a)\geqslant0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq1,\\ a\leqslant2\text{ 或 }a\geqslant10,\end{cases}$

即 $a\geqslant10$ 或 $a\leqslant2$ 且 $a\neq1$.

设此时方程的两实根为 x_1,x_2，有两个正根的充要条件是

$$\begin{cases}a\neq1,\\ a\leqslant2\text{ 或 }a\geqslant10,\\ x_1+x_2>0,\\ x_1\cdot x_2>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq1,\\ a\leqslant2\text{ 或 }a\geqslant10,\\ \dfrac{a+2}{a-1}>0,\\ \dfrac{4}{a-1}>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq1,\\ a\leqslant2\text{ 或 }a\geqslant10,\\ a<-2\text{ 或 }a>1,\\ a>1.\end{cases}$$

即"$1<a\leqslant2$ 或 $a\geqslant10$"是"方程有两个正根"的充要条件.

[点评]　在求解充要条件的过程中，也可以不必区分充分性、必要性. 但必须保证每一步骤之间都可以用"$\Leftrightarrow$"连接.

例题 10　已知 $ab\neq0$，求证："$a+b=1$"的充要条件是"$a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$".

[解析]　①解决证明题的步骤一定要规范严谨. ②分清题目的条件与结论.

[答案]　先证必要性：

$\because a+b=1$，即 $b=1-a$，

$\therefore a^3+b^3+ab-a^2-b^2=a^3+(1-a)^3+a(1-a)-a^2-(1-a)^2=a^3+1-3a+3a^2-a^3+a-a^2-a^2-1+2a-a^2=0.$

再证充分性：

$\because a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$，

即 $(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a^2-ab+b^2)=0$.

$\therefore(a+b-1)(a^2-ab+b^2)=0$.

由 $ab\neq0$，即 $a\neq0$ 且 $b\neq0$，

$\therefore a^2-ab+b^2\neq0$，只有 $a+b=1$.

综上可知，当 $ab\neq0$ 时，"$a+b=1$"的充要条件是"$a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$".

[点评]　充分性与必要性不要混淆，保证这一点的前提是分清题目的条件与结论，注意"$ab\neq0$"是大前提，不包括在内.

D 针对性练习

1. "$x>1$"是"$x^2>1$"的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

2. 若条件 $p:x>1$ 或 $x<-3$，条件 $q:x^2<5x-6$，则非 p 是非 q 的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

3. 设集合 $M=\{x|x>2\}$，$N=\{x|x<3\}$，那么"$x\in M$ 或 $x\in N$"是"$x\in M\cap N$"的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

4. 如果 A 是 B 的必要不充分条件，B 是 C 的充要条件，D 是 C 的充分不必要条件，那么 A 是 D 的　(　　)

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

5. "$x^2+(y-2)^2=0$"是"$x(y-2)=0$"的　(　　)

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件