龙门品牌 学子至爱

新课标

龙门专题

数列

高中数学

主　　编　傅荣强
本册主编　于长军

龍門書局
www.Longmenbooks.com

新课标

龙门专题

数列

高中数学

主　　编：傅荣强

本册主编：于长军

编　　者：侯　芳　袁　野　张秀斌
刘淑安　李淑艳　杨宝山
崔龙珠　王德珍　郭靖兰
陈　冰　乔　伟　朱仁俐
孙青枝　刘连新　杨玉琴
隋元善　李　丽　于佩兰
梁吉祥

龍門書局

北　京

举报电话：(010)64030229；(010)64034315；13501151303
邮购电话：(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

龙门专题：新课标. 高中数学. 数列/傅荣强主编；于长军本册主编. —北京：龙门书局，2008
ISBN 978-7-5088-1585-5

Ⅰ.龙…　Ⅱ.①傅…②于…　Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 108266 号

责任编辑：田　旭　马建丽　佟艳丽/封面设计：耕　者

龍　門　書　局出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
www.longmenbooks.com
北京龙兴印刷厂　印刷
科学出版社总发行　各地书店经销
*
2008 年 7 月第　一　版　开本：A5(890×1240)
2008 年 7 月第一次印刷　印张：6 1/2
字数：231 000

定　价：12.00 元

编 委 会

策划者语

生命如歌

未名湖畔，博雅塔旁。

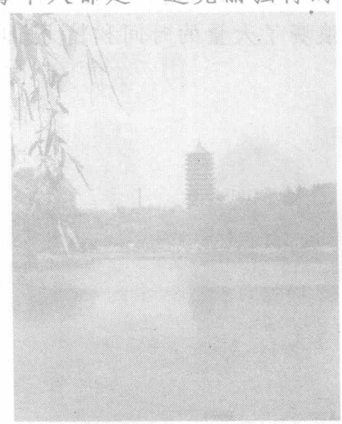
明媚的晨光穿透枝叶，懒散的泻落在林间小道上，花儿睁开惺忪的眼睛，欣喜地迎接薄薄的雾霭，最兴奋是小鸟，扇动翅膀在蔚蓝的天空中叽叽喳喳地欢唱起来了。微风轻轻拂动，垂柳摇曳，舒展优美的身姿，湖面荡起阵阵涟漪，博雅塔随着柔波轻快地翩翩起舞。林间传来琅琅的读书声，那是晨读的学子；湖畔小径上不断有人跑过，那是晨练的学子；椅子上，台阶上，三三两两静静的坐着，那是求索知识的学子……

在北大，每个早晨都是这样的；在清华，每个早晨都是这样的；在复旦，在交大，在南大，在武大……其实，在每一所高校里，早晨都是一幅青春洋溢、积极进取的景象！

在过去几年时间里，我一直在组织北大、清华的高考状元、奥赛金牌得主还有其他优秀的学子到全国各地巡回演讲。揭开他们“状元”的光环，他们跟我们是那么的相似，同样的普通与平凡。

是什么成就了他们的“状元”辉煌？

在来来往往带他们出差的路上，在闲来无事的聚会聊天过程中，我越来越发现，在普通平凡的背后，他们每个人都是一道亮丽独特的风景，都是一段奋斗不息、积极进取的历程，他们的成功，是偶然中的必然。



小朱，一个很认真、很可爱的女孩子，高中之前家庭条件十分优越，但学习一直平平；在她上高中前，家庭突遭变故，负债累累，用她妈妈的话说，“家里什么都没有了，一切只能靠你自己了。”她说自己只有高考一条路，只有考好了，才能为家里排忧解难。我曾经在台下听她讲自己刻苦学习的经历：“你们有谁在大年

三十的晚上还学习到深夜三点？你们又有谁发烧烧到39度以上还在病床上看书？……”那一年，她以总分684分成为了浙江省文科高考状元。

陆文，一个出自父母离异的单亲家庭的女孩，她说，她努力学习的动力就是想让妈妈高兴，因为从小她就发现，每次她成绩考得很好，妈妈就会很高兴。为了给妈妈买一套宽敞明亮的房子，她选择了出国这条路，考托福，考GRE，最后如愿以偿，被芝加哥大学以每年6.4万美金的全额奖学金录取为生物方向的研究生。6.4万美金，当时相当于人民币52万。

齐伟，湖南省高考第七名，清华大学计算机学院的研究生，最近被全球最大的软件公司MICROSOFT聘为项目经理；霖秋，北京大学数学学院的小妹，在坚持不懈的努力中完成了自身最重要的一次涅槃，昨天的她在未名湖上游弋，今天的她已在千里之外的西雅图……

还有很多很多优秀的学子，他们也都有自己的故事，酸甜苦辣，很真实，很精彩。我有幸跟他们朝夕相处，默默观察，用心感受，他们的自信，他们的执着，他们的勤奋刻苦，尤其是他们的“学而得其法”所透露出来的睿智更让人拍案叫绝，他们人人都有一套行之有效的学习方法，花同样的时间和精力他们可以更加快速高效，举一反三。我一直在想：如果当年我也知道他们的这些方法，或许我也能考个清华北大的吧？

多年以来，我一直觉得我们的高考把简单的事情搞复杂了，学生们浪费了大量的时间和精力却收效甚微；多年以来，我们也一直在研究如何将一套优良的学习方法内化在图书中，让同学们在不知不觉中轻松快速的获取高分。这，就是出版《龙门专题》的原因了。

一本好书可以改变一个人的命运！名校，是每一个学子悠远的梦想和真实的渴望。“少年心事当拿云，谁念幽寒坐呜呃！”

龙门专题，走向名校的阶梯！

总策划

2008年7月

读者使用指南

1.《龙门专题》适合什么样的同学使用？

《龙门专题》是针对中等程度及中等程度以上的学生研究开发的，尤其是对尖子生来讲，《龙门专题》是必备图书！

2.中等程度的学生使用本书应注意什么？

这套书在设计上全面贯彻循序渐进的学习方法，中等程度的学生要特别注意：

“知识点精析与应用”部分侧重夯实学生的基础，重点在把基础知识讲细、讲透，适合为中等程度的学生奠定扎实的基础；

“能力拓展”部分重点在于拓展学生思维，直接与中高考的难度、题型接轨，适合中等学生提高成绩。

3.《龙门专题》适合什么时间使用？(3~5理科)

同步学习使用：

《龙门专题》每一节内容都是按照教材的顺序编排的，因此可以随着教学进度同步使用，老师讲到哪里，就紧跟着做透哪一本专题。

中高考复习：

“基础篇”适用于第一轮全面复习，全面梳理知识点，从这一角度，专题比任何高考复习资料都要详细、全面；

“综合应用篇”适用于第二轮专项复习，尤其是跟其他专题、其他学科进行交叉综合时，事半功倍。

4.如何使用《龙门专题》打下扎实的基础知识？

“万变不离其宗！”考试题目都是由基础知识演化而来的，因此基础知识是极其重要的，只有准确地理解、牢固地掌握基础知识，才能灵活、轻松地应用和解题！

使用《龙门专题》打基础，重点注意每节的“知识点精析与应用”，它分为三个小部分：

知识点精析：可帮助学生更全面的理解重点，突破难点；

解题方法指导：通过经典和新颖的例题帮助学生掌握解题规律和技巧；

基础达标演练：可以即学即练，便于巩固。

5.如何使用《龙门专题》拓展视野，提高素质？

“能力拓展”栏目是在牢固掌握基础的前提下，提高学生的综合素质和应试能力的，它同样包括三个小部分：

释疑解难：以综合性，关联所学知识，并作深度的拓展和延伸；

典型例题导析：最具代表性的例题、全面的思路分析、有的放矢的总结和反思，培养学生的解题技巧和方法；

思维拓展训练：完美的拓展训练设计，提升学生的学科思维能力。

6.怎么样在中高考复习中使用《龙门专题》？

“知识点精析与应用”用于梳理知识脉络，掌握基本知识点；复习时侧重使用“能力拓展”栏目，这部分立足于教材，对中高考必考内容进行拓展提升，也包括了一些难点和失分率较高的内容。

此外，“本书知识结构”、“本讲知识网络图”能帮助学生迅速快捷地掌握全部知识体系，提高复习效率。在中高考的复习备考中，还要注意：近年本专题知识在高考(中考)中所占分数比例，紧跟第二轮专项复习节奏使用。

7.尖子生如何使用《龙门专题》？

从全国调查看，尖子生最喜爱的教辅图书中，《龙门专题》被提及率十分高；来自高考状元的信息也表明，尖子生是特别适合使用本书的。尖子生在使用本书时，要注意以下几点：

首先，立足基础，通过自学或者预习的方式将基础知识理解并掌握；

其次，学习的重点放在“能力拓展”上，提高综合能力和应对中高考的能力；

再次，在复习中，一个板块一个板块的逐一解决，力争做到没有任何知识点的遗漏；

最后，中高考的复习，侧重于专题与专题之间、不同学科之间的复合型试题的研究和训练，确保在考试中基础题目不失分。

《龙门专题》状元榜

赵永胜　2007年山西省文科状元

中国人民大学财政金融学院

星座：射手座

喜欢的运动：爬山　乒乓球

喜欢的书：伟人传记，如《毛泽东传》

人生格言：生命不息，奋斗不止

学习方法、技巧：兴趣第一，带着乐趣反复翻阅教科书，从最基本的知识入手，打牢“地基”，从基础知识中演绎难题，争取举一反三，融会贯通。合理安排时间，持之以恒，坚信“天道酬勤，勤能补拙”。

卢　毅　2006年浙江省理科状元

北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：跑步　滑板

喜欢的书：《卡尔维诺文集》

人生格言：做自己

学习方法、技巧：注重知识点的系统性，将每门学科的知识点作一个系统地梳理，无论是预习还是复习，这样便可在课上学习时有的放矢，课后复习时查漏补缺。坚持锻炼，劳逸结合。

武睿颖　2005年河北省文科状元

北京大学元培学院

星座：天秤座

喜欢的运动：游泳　网球

喜欢的书：*A Thousand Splendid Suns*

人生格言：赢得时间，赢得生命

学习方法、技巧：勤奋是中学学习的不二法门；同时要掌握良好的学习方法，如制定学习目标、计划，定期总结公式、解题思路等，这样能事半功倍。最后要培养良好的心态，平和积极地面对学习中的得失。

刘诗泽　2005年黑龙江省理科状元

北京大学元培学院

星座：金牛座

喜欢的运动：篮球　台球　排球

喜欢的书：《三国演义》

人生格言：战斗到最后一滴血

学习方法、技巧：多读书，多做题，多总结。看淡眼前成绩，注重长期积累。坚持锻炼，劳逸结合。

邱　汛　2005年四川省文科状元

北京大学

星座：处女座

喜欢的运动：篮球　乒乓球

喜欢的书：《哈利・波特》

人生格言：非淡泊无以明志，
非宁静无以致远

学习方法、技巧：1. 要保持一颗平常心来面对考试、繁重的学习任务和激烈的竞争。2. 学会从各种测验考试中总结经验、教训，而不要仅仅局限于分数。3. 学会计划每一天的学习任务，安排每一天的学习时间。4. 坚持锻炼，劳逸结合。

林　叶　2005年江苏省文科状元

北京大学

星座：水瓶座

喜欢的运动：跑步　台球　放风筝

喜欢的书：《黑眼睛》《笑面人》

人生格言：不经省察的生活不值得过

学习方法、技巧：学习分两类，一类和理想真正有关，另一类只是不得不过的门槛。不要总因为喜好就偏废其中的一个，它不仅是必须的，而且你也许会发现，它本来也值得你热爱和认真对待。你自己的学习方法别人永远无法替代，它也是你生活的一部分，完善它，就像完善你自己。

田　禾　2005年北京市理科状元

北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：羽毛球

喜欢的书：历史类书籍

人生格言：认真、坚持

学习方法、技巧：认真听讲，勤于思考，作阶段性总结，及时调整学习计划，坚持阅读课外书和新闻，一以贯之，学不偏废。

朱师达　2005年湖北省理科状元

北京大学元培学院

星座：水瓶座

喜欢的运动：足球　篮球　游泳

喜欢的书：《追风筝的人》《史记》

人生格言：有梦想就有可能，有希望
就不要放弃

学习方法、技巧：1. 知识系统化、结构化是掌握知识的有用技巧和重要体现。2. 知其然还要知其所以然，记忆才更牢固。3. 整体把握兴趣和强弱科的平衡。4. 正确认识自己的弱点，集中力量克服它。

Contents

目录

基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科,简单地说它是研究“数”和“形”的学科.

数列是按一定次序排列的一列数.

从映射、函数的观点看,数列是一个序号集合到另一个数的集合的映射 $f:A\rightarrow B$. 其中,$A=\mathbf{N}^{*}(\mathbf{N}_{+})$或 $A=\{1,2,\cdots,n\}$,$B\subsetneqq\mathbf{R}$. 因此,数列$\{a_n\}$可以看成定义域为 A、值域为 B、对应关系为 f 的函数 $a_n=f(n)$ 的一列函数值 $a_1=f(1)$,$a_2=f(2)$,$\cdots$.

数列研究的主要问题是:

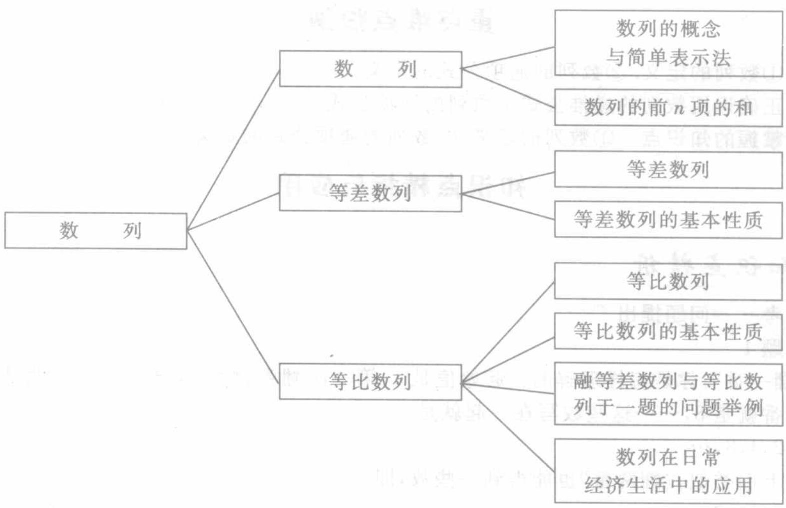
(1)根据已知条件,求出通项公式 $a_n=f(n)$;

(2)通过通项公式 $a_n=f(n)$ 研究数列的性质.

数列课题的知识载体除了通项公式 a_n 之外还有它的前 n 项和 S_n 和递推公式

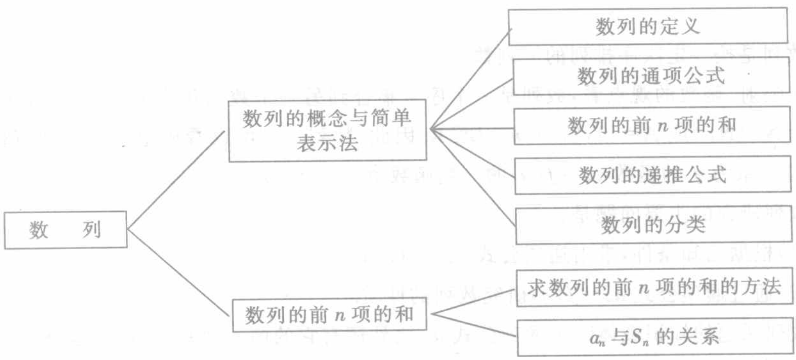
$a_n=f(a_{n-1})$;等差数列、等比数列是数列的两大模型,绝大部分数列问题,最终都要转化为等差数列、等比数列去获得其解.

本篇知识框图



第一讲 数 列

本讲知识框图



1.1 数列的概念与简单表示法

重点难点归纳

重点 ①数列的定义.②数列的通项公式的定义.

难点 正确运用数列的递推公式求数列的通项公式.

本节需掌握的知识点 ①数列的定义.②数列的通项公式的定义.

知识点精析与应用

知识点精析

思考——问题提出

问题 1

"翻一番",你是怎样理解的?起始值是1,第一次翻番就是2,第二次翻番就是4,第三次翻番就是8,……这些数写在一起就是

1,2,4,8,…. ①

与上面类似,"翻两番"也能得到一些数,即

1,4,16,64,…. ②

问题 2

记录你的年龄,可以用一列数来完成,即

1,2,3,4,…. ③

在函数 $f(x)=2x-1$ 中,令 $x=1,2,3,4,\cdots$,可以得到一列数,它们是函数值,即

$$f(1)=1;f(2)=3,f(3)=5,f(4)=7,\cdots. \quad ④$$

①、②、③、④都可以通过对应关系得到初步解释，即

序号	1	2	3	4
	↓	↓	↓	↓
数	1	2	4	8
	1	4	16	64
	1	2	3	4
	1	3	5	7

你考虑一下，在①、②、③、④中，你能写出第5个、第6个数吗？你能找出规律吗？

探究——抽象概括

思考中提出的问题，①中后者是前者的2倍；②中后者是前者的4倍；③中后者比前者大1；④是正整数中的奇数.

与①、②、③、④相类似，我们还可以写出数以万计的这样的数，它们的共同特征是“次序”或称“顺序”. 下面我们就来探究“按照一定的次序排列起来的一列数”的科学体系.

1. 数列的定义

数列是按一定次序排列的一列数.

数列有它的函数特征，在函数意义下，数列是定义域为正整数集 $\mathbf{N}^*$ ($\mathbf{N}_+$)或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$的函数 $f(n)$当自变量 n 从1开始依次取正整数时所对应的一列函数值

$$f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots.$$

通常用 a_n 代替$f(n)$，于是数列的一般形式为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，简记为$\{a_n\}$. 其中 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 依次叫做数列$\{a_n\}$的第1项，第2项，…，第 n 项，a_1 也叫首项，a_n 也叫通项. 对项数有限的数列而言，最后一项一般称为末项.

2. 数列的通项公式

一个数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 与项数 n(序号)之间的函数关系，如果可以用一个公式

$$a_n=f(n)$$

来表示，我们就把这个公式叫做这个数列的通项公式.

如：数列1，4，9，16，…的通项公式为 $a_n=n^2$.

正像不是所有的函数关系都能用解析式表示出来一样，也不是每个数列都能写出它的通项公式. 如：数列1，2，3，－1，4，－2 就没有通项公式.

有的数列，虽然有通项公式，但在形式上却不一定是唯一的. 如：数列－1，1，－1，1，…的通项公式可写成 $a_n=(-1)^n$，也可写成 $a_n=\cos n\pi$.

3. 数列的前 n 项的和

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 叫做数列$\{a_n\}$的前 n 项的和.

4. 数列的递推公式

如果已知数列$\{a_n\}$的第1项(或前几项)，且任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}(或前几项)间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推公式.

5. 数列的分类

(1)有穷数列、无穷数列

按照数列的项数是有限项还是无限项来分，数列可划分为有穷数列、无穷数列. 如：数列1，2，…，2018 和数列1，3，5，…，$2n-1$，…分别是有穷数列和无穷数列.

(2)递增数列、递减数列

与函数类似,数列也有其单调性.

按照数列的项与项之间的大小关系"$a_{n+1}>a_n$ 或 $a_{n+1}<a_n$"来分,数列可划分为递增数列和递减数列.如:数列 $1,2,4,\cdots,2^{n-1},\cdots$ 和数列 2018,2007,…,1949 分别是递增数列和递减数列.

递增数列与递减数列统称为单调数列.

(3)有界数列、无界数列

按照数列的任何一项的绝对值是否都小于某一正数来分,数列可划分为有界数列和无界数列.如:数列$\{\sin 1921n\}$和数列$\{n^{1927}\}$分别是有界数列和无界数列.

(4) 摆动数列

$a_{n+1}>a_n$ 或 $a_{n+1}<a_n$ 不确定.如:数列 $-2,2,-2,2,\cdots$ 是摆动数列.

(5) 常数数列

$a_{n+1}=a_n$.如:数列 2020,2020,…,2020,…是常数数列.

解题方法指导

一个数列,通项公式清楚了,这个数列也就确定了.最初学习数列,要抓住通项公式这个第一要点,从不同的角度去探讨它的求解方法.

1. 用观察法求数列的通项公式

用观察法求数列的通项公式应从三个方面考虑.

(1)掌握一些简单数列的通项公式,见下表.

简 单 数 列	通 项 公 式
$1,1,1,1,\cdots$	$a_n=1$
$1,2,3,4,\cdots$	$a_n=n$
$2,4,6,8,\cdots$	$a_n=2n$
$1,3,5,7,\cdots$	$a_n=2n-1$
$1,2,4,8,\cdots$	$a_n=2^{n-1}$
$2,6,12,20,\cdots$	$a_n=n(n+1)$
$1,4,9,16,\cdots$	$a_n=n^2$
$1,8,27,64,\cdots$	$a_n=n^3$
$1,-1,1,-1,\cdots$	$a_n=(-1)^{n-1}=\cos(n-1)\pi$
$-1,1,-1,1,\cdots$	$a_n=(-1)^n=\cos n\pi$
$1,-2,3,-4,\cdots$	$a_n=(-1)^{n+1}n$
$0,1,0,1,\cdots$	$a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}=\left\lvert\sin\frac{(n-1)\pi}{2}\right\rvert$
$1,0,1,0,\cdots$	$a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}=\left\lvert\sin\frac{n\pi}{2}\right\rvert$
$1,11,111,1111,\cdots$	$a_n=\frac{10^n-1}{9}$

(2) 正、负号的交错“+，−，+，−，…”和“−，+，−，+，…”，分别用$(-1)^{n+1}$和$(-1)^n$来调节.

(3) 求形如$\{a_nb_n\}$、$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$等形式的数列的通项公式，先分别求出$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式，再组合为一体.

［例1］ 求下列数列的一个通项公式：

(1)$1,-2,3,-4,\cdots$；　　(2)$-3,5,-9,17,-33,\cdots$；

(3)$\frac{1}{2},2,\frac{9}{2},8,\frac{25}{2},\cdots$；　　(4)$1,0,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,-\frac{1}{7},0,\cdots$.

分析 求通项公式，首先是观察数列中的每一项与它的序号之间的对应关系，然后是归纳各项数值的变化规律.

解 (1)+、−号的规律是$+,-,+,-,\cdots$.

各项的绝对值的规律是$|1|,|-2|,|3|,|-4|,\cdots$.

所以
$$a_n=(-1)^{n+1}n.$$

(2)+、−号的规律是$-,+,-,+,\cdots$.

各项的绝对值的规律是$1+2,1+2^2,1+2^3,1+2^4,1+2^5,\cdots$.

所以
$$a_n=(-1)^n(1+2^n).$$

(3)数列的项，有的是分数，有的是整数，可将数列的各项都统一成分数再观察. 在数列$\frac{1}{2},\frac{4}{2},\frac{9}{2},\frac{16}{2},\frac{25}{2},\cdots$中，分母为2，分子依次为$1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,\cdots$，

所以
$$a_n=\frac{n^2}{2}.$$

(4)把数列改写成$\frac{1}{1},\frac{0}{2},\frac{-1}{3},\frac{0}{4},\frac{1}{5},\frac{0}{6},\frac{-1}{7},\frac{0}{8},\cdots$.

分母依次为$1,2,\cdots$，分子$1,0,-1,0,\cdots$周期性地出现，用$\sin\frac{n\pi}{2}$表示分子，

所以
$$a_n=\frac{\sin\frac{n}{2}\pi}{n}.$$

2. 根据数列的递推公式求数列的通项公式

根据数列的递推公式求数列的通项公式，常常是先把递推公式变形，再根据变形后的式子写出一些式子，并把这些式子相乘或相加减或层层代入.

［例2］ 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3,a_{n+1}=2a_n+1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解 把$a_{n+1}=2a_n+1$变形为$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，由此可得下面的$n-1$个式子
$$a_n+1=2(a_{n-1}+1),$$
$$a_{n-1}+1=2(a_{n-2}+1),$$
$$a_{n-2}+1=2(a_{n-3}+1),$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_2+1=2(a_1+1).$$

将这$(n-1)$个等式相乘，得

$$a_n+1=2^{n-1}(a_1+1).$$

又∵ $$a_1=3,$$

∴ $$a_n=2^{n+1}-1.$$

点评 本例中，我们先把$a_{n+1}=2a_n+1$变形为$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，意在形成一个新的数列$\{a_n+1\}$，并且$a_{n+1}+1$与a_n+1是相邻的两项，然后又据$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$写出了$(n-1)$个式子，由这$(n-1)$个式子相乘的结果以及$a_1=3$，我们获得了通项公式$a_n=2^{n+1}-1$. 整个求解过程，给我们思维上的启示是"$(n-1)$个式子相乘". 像这样通过若干个式子相乘获得通项公式的方法我们称它为**累乘法**.

[例3] 在数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$中，$a_1=1$，$b_1=-1$，且$a_{n+1}=8a_n-6b_n$，$b_{n+1}=6a_n-4b_n$. 求a_n-b_n，a_n和b_n.

解 由$\begin{cases}a_{n+1}=8a_n-6b_n,\\ b_{n+1}=6a_n-4b_n,\end{cases}$可得

$$a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n).$$

在上式中，令$n=1,2,3,\cdots,n-2,n-1$可得

$$a_2-b_2=2(a_1-b_1),$$

$$a_3-b_3=2(a_2-b_2),$$

$$a_4-b_4=2(a_3-b_3),$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{n-1}-b_{n-1}=2(a_{n-2}-b_{n-2}),$$

$$a_n-b_n=2(a_{n-1}-b_{n-1}).$$

把上面的这$(n-1)$个式子相乘，可得

$$a_n-b_n=2^{n-1}(a_1-b_1). \qquad ①$$

由已知$a_1=1$，$b_1=-1$，可得

$$a_1-b_1=2. \qquad ②$$

由①、②，可得

$$a_n-b_n=2^n. \qquad ③$$

把③代入$a_{n+1}=8a_n-6b_n$，可得

$$a_{n+1}=2a_n+6(a_n-b_n)=2a_n+6\times 2^n,$$

所以 $$a_n=2a_{n-1}+6\times 2^{n-1}.$$

由上式可得

$$a_n=2a_{n-1}+6\times 2^{n-1}\Rightarrow 2a_n=2^2a_{n-1}+6\times 2^n,$$

$$a_{n-1}=2a_{n-2}+6\times 2^{n-2}\Rightarrow 2^2a_{n-1}=2^3a_{n-2}+6\times 2^n,$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_3=2a_2+6\times 2^2 \Rightarrow 2^{n-2}a_3=2^{n-1}a_2+6\times 2^n,$$
$$a_2=2a_1+6\times 2^1 \Rightarrow 2^{n-1}a_2=2^n a_1+6\times 2^n.$$

把这$(n-1)$个式子相加并把$a_1=1$代入，可得

$$2a_n=2^n+(n-1)6\times 2^n,$$

所以

$$a_n=2^{n-1}(6n-5). \quad ④$$

把④代入③，得

$$b_n=2^{n-1}(6n-7).$$

点评 本例中，得到①式，仍旧使用了累乘法. ④式的得来，是通过把$(n-1)$个式子相加获取的，像这样通过把若干个式子相加(或减)得到通项公式的方法我们称它为**叠加法或累加法**.

[例 4] 已知数列$\{a_n\}$: 3,5,7,…,$2n+1$,…，作另一数列$\{b_n\}$，使$b_1=a_1$，当$n\geqslant 2$时，$b_n=a_{b_{n-1}}$，求数列$\{b_n\}$的第 4 项、第 5 项和通项.

分析 数列$\{a_n\}$是已知数列，通项公式为$a_n=2n+1$，$\{b_n\}$与$\{a_n\}$的关系是$b_n=\begin{cases} a_1 & (n=1), \\ a_{b_{n-1}} & (n\geqslant 2), \end{cases}$结合在一起，得$b_1=a_1$，$b_{n+1}=2b_n+1$，即$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$，所以数列$\{b_n+1\}$的通项可求.

①$a_n=2n+1 \Rightarrow a_1=b_1=3$.
②依$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$，将$n=1,2,\cdots,n-1$逐个代入

解 $b_2=a_3=7$,

$b_3=a_{b_2}=a_7=2\times 7+1=15$,

$b_4=a_{b_3}=a_{15}=31$,

$b_5=a_{b_4}=a_{31}=63$.

∵ $b_n=a_{b_{n-1}}=2b_{n-1}+1$,

∴ $b_n+1=2(b_{n-1}+1)$,

∴ $n\geqslant 2$ 时，$b_n+1=2(b_{n-1}+1)=2^2(b_{n-2}+1)=\cdots=2^{n-1}(b_1+1)=2^{n+1}$,

∴ $b_n=2^{n+1}-1$(经检验，$n=1$也适合).

点评 本例中，得到$b_n=2^{n+1}-1$，本质上是把$b_{n-1}+1=2(b_{n-2}+1)$代入$b_n+1=2(b_{n-1}+1)$，再把$b_{n-2}+1=2(b_{n-3}+1)$代入$b_n+1=2^2(b_{n-2}+1)$，依次这样做下去. 像这样通过层层代入得到通项公式的方法我们称它为**递归法或迭代法**.

3. 根据数列前 n 项和公式求数列的通项公式

已知数列的前n项和，求通项，可直接使用通项与和的关系$a_n=\begin{cases} S_1 & (n=1), \\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2) \end{cases}$去获解.

[例 5] 数列$\{a_n\}$中，$S_n=n^2+n-2$，求a_n.

解 当$n=1$时，$a_1=S_1=1+1-2=0$.

当$n\geqslant 2$时，有

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+n-2)-[(n-1)^2+(n-1)-2]=2n.$$