姜淑珍◎主编

集合论

Jihe Lun

吉林大学出版社
JILIN UNIVERSITY PRESS

责任编辑／朱 进　封面设计／孙 群

ISBN 978-7-5601-4151-0

9 787560 141510 >

定价：19.40元

教材立项系列丛书

集合论

Jihe Lun

主　编　姜淑珍

副主编　周晨星　赵　虹

陈　岩　郭晓冰

杨利垚

吉林大学出版社

JILIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

集合论 / 姜淑珍主编.—长春:吉林大学出版社,2009.3
(教材立项系列丛书)
ISBN 978-7-5601-4151-0

Ⅰ.集…　Ⅱ.姜…　Ⅲ.集论—高等学校—教材　Ⅳ.0144

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 025731 号

书　　名:教材立项系列丛书
　　　　　集合论
作　　者:姜淑珍　主编

责任编辑、责任校对:朱进　　封面设计:孙　群
吉林大学出版社出版、发行　　长春永恒印业有限公司　印刷
开本:787×1092　毫米:1/16　　2009 年 3 月　第 1 版
印张:12　　字数:215 千字　　2009 年 3 月　第 1 次印刷
ISBN 978-7-5601-4151-0　　定价:19.40 元

社址:长春市明德路 421 号　邮编:130021
发行部电话:0431-88499826
网址:http://www.jlup.com.cn
E-mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

前　言

集合论已经成为数学的基础，它的基本观点和方法广泛地渗透到所有数学学科领域，特别是它已成为学习现代数学不可缺少的工具之一．在高等学校许多数学课程中都会涉及到有关集合的知识，出于课程的需要，教师都会讲授一些集合的基本知识．这样，不同的课程里重复讲授有关集合的一些内容，但由于课时所限都讲得不够深入、透彻，又浪费许多宝贵的时间，为此，我们把各门课中重复讲授的内容整合起来，使学生能够在较少的时间内系统地掌握学习现代数学必备的有关集合的基本知识．

考虑到低年级学生的理解能力，本书前四章主要介绍了朴素集合论的基本知识，以给读者学习数学本科各门课程奠定必要的集合论基础；第五章简单地介绍了公理化集合论的几个基本公理及其等价性证明，使读者对公理化集合论有一个初步的了解．

在编写此书时，我们注意到与其它学科的联系，并力求通俗易懂，便于自学．为了加深对书中内容的理解和基本方法的掌握，在各个章节中给出了足够的例子，并在章节之后编写了一定数量的习题．

由于作者水平所限，加之时间仓促，书中如有不妥之处，望读者批评指正．

编　者

2008 年 12 月于长春师范学院

绪　论

在高中我们所学的第一个数学概念就是集合．研究集合的数学理论在现代数学中被恰当地称为集合论．它是数学的一个基本分支，在数学中占据着一个极其独特的地位，其基本概念已渗透到数学的所有领域．如果把现代数学比作一座无比辉煌的大厦，那么可以说集合论正是构成这座大厦的基石，由此可见它在数学中的重要性．集合论的创始人康托尔也以其成就被誉为对二十世纪数学发展影响最深的学者之一．

一、集合论的诞生

集合论是德国著名数学家康托尔于19世纪末创立的．十七世纪，数学中出现了一门新的分支——微积分．在之后的一二百年中这一崭新的学科飞速发展，并结出了丰硕成果．其推进速度之快使人来不及检查和巩固它的理论基础．十九世纪初，许多迫切问题得到解决后，出现了一场重建数学基础的运动．正是在这场运动中，康托尔开始了探讨前人从未碰过的实数点集，这是集合论研究的开端．到1874年康托尔开始一般地提出“集合”的概念．他对集合所下的定义是：把若干确定的、有区别的（不论是具体的或抽象的）事物合并起来，看作一个整体，就称为一个集合，其中各事物称为该集合的元素．人们把康托尔于1873年12月7日给戴德金的信中最早提出集合论思想的那一天定为集合论诞生日．

二、康托尔的不朽功绩

前苏联数学家柯尔莫戈洛夫评价康托尔的工作时说：“康托尔的不朽功

绩在于他向无穷的冒险迈进."因而只有当我们了解了康托尔在对无穷的研究中究竟做出了些什么结论后才会真正明白他工作的价值和众多反对之声的由来. 数学与无穷有着不解之缘,但在研究无穷的道路上却布满了陷阱. 因为这一原因,在数学发展的历程中,数学家们始终以一种怀疑的眼光看待无穷,并尽可能回避这一概念. 但试图把握无限的康托尔却勇敢地踏上了这条充满陷阱的不归路. 他把无穷集这一词汇引入数学,从而进入了一片未开垦的处女地,开辟出一个奇妙无比的新世界."我们把全体自然数组成的集合简称作自然数集,用字母 N 来表示",学过集合的所有人应该对这句话不会感到陌生. 但在接受这句话时,我们根本无法想到当年康托尔如此做时是在进行一项更新无穷观念的工作. 在此以前数学家们只是把无限看作永远在延伸着的,一种变化着成长着的东西来解释. 无限永远处在构造中,永远完成不了,是潜在的,而不是实在. 这种关于无穷的观念在数学上被称为潜无限. 十八世纪数学王子高斯就持这种观点. 用他的话说,就是"……我反对将无穷量作为一个实体,这在数学中是从来不允许的. 所谓无穷,只是一种说话的方式……". 而当康托尔把全体自然数看作一个集合时,他是把无限的整体作为了一个构造完成了的东西,这样他就肯定了作为完成整体的无穷,这种观念在数学上称为实无限思想. 由于潜无限思想在微积分的基础重建中已经获得了全面胜利,康托尔的实无限思想在当时遭到一些数学家的批评与攻击是不足为怪的. 然而康托尔并未就此止步,他以前所未有的方式,继续正面探讨无穷. 他在实无限观念基础上进一步得出一系列结论,创立了令人振奋的、意义十分深远的理论. 这一理论使人们真正进入了一个难以捉摸的、奇特的无限世界. 最能显示出他独创性的是他对无穷集元素个数问题的研究. 他提出用一一对应准则来比较无穷集元素的个数. 他把元素间能建立一一对应的集合称为个数相同,用他自己的概念是等势. 由于一个无穷集可以与它的真子集建立一一对应关系,也就是说无穷集可以与它的真子集等势(即具有相同的个数). 这与传统观念"全体大于部分"相矛盾. 而康托尔认为这恰恰是无穷集的特征. 在此意义上,正自然数集与正偶数集具有了相同的个数,他将其称为可数集. 又可容易地证明有理数集与自然数集等势,因而有理数集也是可数集. 后来当他又证明了代数数集合也是可数集时,一个很自然的想法是无穷集是清一色的,都是可数集. 但出乎意料的是,他在 1873 年证明了实数集的势大于自然数集. 这不但意味着无理数远远多于有理数,而且显然庞大的代数数与超越数相比较而言也只成了沧海一粟,如同有人描述的那样:"点缀在平面上的代数数犹如夜空中的繁星;而沉沉的夜空则由超越数构成."而当他得出这一结论时,人们所能找到的超越数尚仅有一两个而已. 这是何等令人震惊

的结果！从上述结论中康托尔意识到无穷集之间存在着差别，有着不同的数量级，可分为不同的层次．他所要做的下一步工作是证明在所有的无穷集之间还存在着无穷多个层次．他取得了成功，并且根据无穷性有无穷种的学说，对各种不同的无穷大建立了一个完整的序列，他称为“超限数”．他用希伯莱字母表中第一个字母“阿列夫”来表示超限数的精灵，最终他建立了关于无限的所谓阿列夫谱系，就这样他创造了一种新的超限数理论．可以想象这种至今让我们还感到有些异想天开的结论在当时会如何震动数学家们的心灵了．康托尔的关于无穷的这些理论，遭到了反对派的强烈抨击，有人嘲笑集合论是一种“疾病”，有人嘲讽超限数是“雾中之雾”，称“康托尔走进了超限数的地狱”．作为对传统观念的一次大革新，由于他开创了一片全新的领域，提出又回答了前人不曾想到的问题，他的理论受到激烈地批驳是正常的．

三、集合论的发展

集合论经历了大约二十余年，最终获得了世界公认．到二十世纪初集合论已得到数学家们的赞同．数学家们为一切数学成果都可建立在集合论基础上的前景而陶醉了．他们乐观地认为从算术公理系统出发，借助集合论的概念，便可以建造起整个数学的大厦．在 1900 年第二次国际数学大会上，著名数学家庞加莱就曾兴高采烈地宣布“……数学已被算术化了．今天，我们可以说绝对的严格已经达到了．”

对于集合论那种自得的情绪并没能持续多久．不久，集合论是有漏洞的消息迅速传遍了数学界．这就是 1902 年罗素得出的罗素悖论．罗素构造了一个所有不属于自身（即不包含自身作为元素）的集合 R. 发现他构造的这个集合 R 无论是属于自身还是不属于自身，经过推理都有矛盾．这一仅涉及集合与属于两个最基本概念的悖论如此简单明了，致使绝对严密的数学陷入了自相矛盾之中．这就是数学史上的第三次数学危机．危机产生后，众多数学家投入到解决危机的工作中去．1908 年，策梅罗提出公理化集合论，后经改进形成无矛盾的集合论公理系统，简称 ZF 公理系统．原本直观的集合概念被建立在严格的公理基础之上，从而避免了悖论的出现．这就是集合论发展的第二个阶段——公理化集合论．与此相对应，在 1908 年以前由康托尔创立的集合论被称为朴素集合论．公理化集合论是对朴素集合论的严格处理．它保留了朴素集合论的有价值的成果并消除了其可能存在的悖论，因而较圆满地解决了第三次数学危机．从康托尔提出集合论至今，时间已经过去了一百多年，在这一段时间里，数学又发生了极其巨大的变化，包括对上述经典集合论做出进一步发展的模糊集合论的出现等等．而这一切都是与康托尔的开拓性工作

分不开的.

四、集合论在数学中的作用

从 1900 年至今这段时期数学的进展至少可以说是显著的.集合论在所谓的现代数学的发展中起过不小的作用,事实上,也可以说是现代数学的各个分支的基础.集合论中悖论的出现还帮助了通常称为数学基础的这一数学领域的发展.在这个数学领域里,所有数学的公理都要被严格地考查.从更直接的观点来看,我们现在认为几乎所有的数学分支都是研究某类东西的集合.这样,几何学就是研究点的集合,代数学则是研究数(或它的原型)的集合以及这些集合的运算.数学分析主要涉及到各种函数,而函数正如我们已经看到的,只不过是一种特殊类型的集合而已.

目　录

第一章 集 合

§1. 集合的概念

数学的抽象性与它的应用广泛性是相互关联的，现代数学尤其是这样．仅仅研究数学和几何图形已远远不能满足需要，研究更多更广泛的对象就必须以更普遍的理论作为基础．集合论就是这种理论，它是现代数学的理论基础．

一、集合概念

集合的概念是数学的一个原始概念，而原始概念是不能定义只能描述的．什么是原始概念呢？人们在定义一个概念时，总要用到一些已被定义了的概念，如定义代数数时用到了代数方程，定义方程时要用到等式，定义函数时要用到变量…那么最先开始定义的概念怎样办呢？这种不能用其它数学概念来定义而用一般语言来描述的概念，如点（没有形状）、线（没有粗细）、面（没有厚薄）等称为原始概念．

下面，我们来描述集合．

具有某种属性或按照某一法则进行研究的事物或对象的全体称为**集合**，构成集合的事物或对象称为集合的**元素**或**成份**，集合通常简称为**集**.

一般常用大写拉丁字母 A、B、C、…表示集合，用小写拉丁字母 a、b、c、…或希腊字母 α、β、…等表示元素．

当 a 是集合 A 的元素时，就说“a 属于 A”或“A 含有 a”，记为 $a\in A$；如果 a

不是集合 A 的元素，则说"a 不属于 A"，记为 $a \notin A$.

如果一个集合 A 是由无限多个元素组成，则称 A 是**无限集**. 若 A 是由有限多个元素组成，则称 A 是**有限集**. 为方便起见，我们把不包含任何元素的集合称为空集，记为 ϕ.

我们约定，用一些特定的字母表示常用的数的集合.

N：自然数集，

Z：整数集，

Q：有理数集，

R：实数集，

C：复数集.

以后若无特别说明，符号 N、Z、Q、R、C 就分别表示上述集合.

二、一些集合的例子

例 1　(1)本教室里的全体学生组成一个集合，是有限集合.

(2)某人的手指组成一个集合，它包含有 10 个元素.

(3)不等式 $(x-3)(x-2)>0$ 的解组成一个集合，它包含所有小于 2 和大于 3 的实数，是无限集.

(4)区间 (a,b) 上的连续函数的全体，是无限集.

一个集合的元素可以是具体的事物，也可以是比较抽象的事物，如

例 2　(1)平面直角坐标系的所有平移变换构成一个集合.

(2)将 4 个字母 a、b、c、d 进行全排列，其所有的排列方法构成一个集合，它的每个元素是一个排列方法，因此它共有 24 个元素.

集合的元素可以是另外一些集合，如

例 3　(1)在平面上所有曲线组成的集合，它的每个元素是一条曲线，而每条本身又是一个由点组成的集合.

(2)全世界所有国家组成一个集合，它的每个元素是一个国家，而每个国家都是一个集合.

可见，我们不必为一个元素同时又是集合，或一个集合是由许多集合作为元素构成而感到费解，应该用构成集合的法则去判断它.

在运用构成集合的法则研究集合时，值得注意的是：一旦法则被给出，我们就认为这个集合是已知的了，确切地说，集合已被给出.

三、具体集合的表示方法

一般地,用来表示集合的方法有以下两种:

(1)列举法

按任意顺序列出集合的所有元素,并用花括号{}括起来.

例 4　由五个元素 a、b、c、d、e 组成的集合 A,可以记为

$$A=\{a、b、c、d、e\}.$$

注意:$\{a\}$ 与 a 有不同的含义,a 是一个元素,而 $\{a\}$ 是由 a 这个元素组成的集合.同时还要注意 $\{a、a、a\}$ 不是三个元素的集合,它只有一个元素,只能记为 $\{a\}$.

列举表示方法仅适合于有限集合,对于无限集,不可能将全部元素一一排列出来,为了表示这种集合,我们采用另一种方法——示性法.

(2)示性法(描述法)

设 φ 表示某个属性或法则,A 为满足属性或法则 φ 的一切 a 构成的集合,则记为

$$A=\{a \mid a\text{ 满足 }\varphi\}\text{ 或 }A=\{a;a\text{ 满足 }\varphi\}.$$

例 5　(1)A 为全体正奇数的集合,记为

$$A=\{x \mid x=2n-1,n\text{ 为正整数}\}.$$

(2)B 为平面上以原点为圆心,1 为半径的单位圆周上的点集,记为

$$B=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1,x、y\in \mathrm{R}\}.$$

(3)C 为区间 (a,b) 上满足 $f(x)>g(x)$ 的点全体,记为

$$C=\{x \mid x\in(a,b)\text{ 且 }f(x)>g(x)\}.$$

(4)D 为三维空间中圆心在原点,半径为 r 的球体上的点集,记为

$$D=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2\le r^2\}.$$

上面的这些集合都是无限集合,示性法也适合有限集.这类表示方法最常用,但元素不多时比较烦琐.

例如:A 为 $x^2-5x+6=0$ 的根构成的集合,记为

$$A=\{x \mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}.$$

由于构成集合的对象可以是任何事物,以致集合的观点可以广泛地应用到各个学科中去.研究集合时,不考虑构成集合的对象的特殊性质,而仅仅研究集合本身的一般性质的数学分支称为集合论.这里我们将在确定的范围内对集合展开讨论.

习 题

1. 下列集合哪些是相等的？

$A=\{r,t,s\}$，$B=\{s,t,r,s\}$，$C=\{t,s,t,r\}$，$D=\{s,r,s,t\}$.

2. 设 $N=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$，列出下列集合的元素．

(1) $A=\{x|x\in N,3<x<12\}$；

(2) $B=\{x|x\in N,x$ 为偶数，且 $x<15\}$；

(3) $C=\{x|x\in N,4+x=3\}$.

3. 写出集合 $A=\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7,8\}\}$ 的元素．

§2. 集合的包含与相等

在集合论的任何应用中，所讨论集合的元素往往都属于一个大的集，叫做**全集**，记为 I.

例如在平面几何中，全集由平面上的所有点构成；而在人口学的研究中，全集则是世界上所有的人．

全集是相对的，一个集合在一定条件下是全集，在另一种条件下就可能不是全集．例如，讨论问题仅限于整数，则全体整数组成的集合为全集，如果讨论问题包含整数和分数，则全体整数组成的集合就不是全集，它便成为某一个部分——**子集**.

定义 1 设有两个集合 A、B，如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，即"如果 $a\in A$，则 $a\in B$"，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$（或 $A\subseteq B$），读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

注：$A\subset B$ 也可表示为 $B\supset A$（或 $B\supseteq A$）.

例 1 $N\subset Z\subset Q$

例 2 设 A 表示某工厂全部产品的集合，B 表示全部废品的集合，则有 $B\subset A$.

集合 A 不是集合 B 的子集，当且仅当集合 A 中至少有一个元素不是集合 B 的元素；若集合 A 不是集合 B 的子集，通常记作 $A\not\subset B$.

根据上面定义可直接得出：

(1) 集合 A 是自己的子集，即 $A\subset A$.

(2) 对任何集合 A，有 $\phi\subset A\subset I$，即空集是任意集合的子集；任何集合都是

全集的子集.

对于任意二集合 A、B 来说,或者 A 的元素全部属于 B,或者 A 的元素不全属于 B,二者必居其一,于是得到:

定理 2.1　若 A、B 是集合,则 $A\subset B$ 或者 $A\not\subset B$.

定义 2　设有集合 A 和 B,如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B **相等**,记作 $A=B$.

显然,当 $A=B$ 时,A 与 B 有相同的元素,反之,若 A 与 B 有相同的元素,则 $A=B$.

例 3　设 $A=\{x|x$ 为大于 1 小于 4 的整数$\}$,

$B=\{x|x$ 为小于 5 的质数$\}$,则 $A=B$.

定义 3　如果 A 是 B 的子集,并且 $A\neq B$,则称集合 A 为集合 B 的**真子集**.

显然,空集 ϕ 是任何非空集合的真子集.

由包含定义不难得到:

定理 2.2　对于集合 A、B、C,如果 $A\subset B$,$B\subset C$,则 $A\subset C$.

事实上,设 x 是集合 A 的任意一个元素,因为 $A\subset B$,所以 $x\in B$,又因为 $B\subset C$,所以 $x\in C$,从而 $A\subset C$.

即"集合的包含有传递性".

我们给出了集合子集的定义,自然想到由 n 个元素组成的集合能有多少个子集的问题. 如果 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ 是 6 个元素构成的集合,那么作为 A 的子集,有不含元素的空集 ϕ,恰为 c_6^0 个;及

含有 1 个元素的子集,恰有 c_6^1 个;

含有 2 个元素的子集,恰有 c_6^2 个;

含有 3 个元素的子集,恰有 c_6^3 个;

含有 4 个元素的子集,恰有 c_6^4 个;

含有 5 个元素的子集,恰有 c_6^5 个;

含有 6 个元素的子集,恰有 c_6^6 个;

合计共有 $c_6^0+c_6^1+c_6^2+c_6^3+c_6^4+c_6^5+c_6^6=2^6$ 个子集. 显然,一般地,由 n 个元素组成的集合共有 2^n 个子集.

定义 5　集合 A 的一切子集构成的集合,称为集合 A 的**幂集**,记作 $p(A)$.

显然,$\phi\in p(A)$,$A\in p(A)$;$\{x\}\in p(A)$ 的充要条件是 $x\in A$,$B\in p(A)$ 的充要条件是 $B\subset A$.

习 题

1. 考虑下列集合

$\phi, A=\{1\}, B=\{1,3\}, C=\{1,5,9\}$,

$D=\{1,2,3,4,5\}, E=\{1,3,5,7,9\}$,

$F=\{1,2,3,\cdots,8,9\}$.

在下列每对集合之间正确填写“$\subset$”或“$\not\subset$”.

(1)ϕ, A;　(2)A, B;　(3)B, C;　(4)B, E;

(5)C, D;　(6)C, E;　(7)D, E;　(8)D, F.

2. 已知集合 $A=\{2,3,4,5\}, B=\{x \mid x \in \mathrm{N}, x$ 为偶数$\}$. 证明 A 不是 B 的一个子集.

3. 证明集合 $A=\{2,3,4,5\}$ 是集合 $C=\{1,2,3,\cdots,8,9\}$ 的一个真子集.

4. 已知集合 $S=\{1,2,3\}$, 求 S 的幂集 $\mathrm{p}(S)$.

§3. 并集与交集

你们可能在基本科学中,看到过大概说明“1 + 1 = 1”的实验证明. 这个“惊人”的事实可以通过用咖啡把杯子斟的非常满而显示出来. 把满满一汤勺的糖慢慢地“添加”到这杯咖啡里,但没有咖啡从杯口边溢出. 这说明没有体积变化. 因此,至少从体积上来说,有“1 + 1 = 1”. 在集合论中也发生类似的情况.

一、并集与交集的定义

已知方程 $x^2-5x+6=0$ 的解集为 $A=\{2,3\}$;

方程 $x^2-9=0$ 的解集为 $B=\{-3,3\}$;

方程 $(x^2-5x+6)(x^2-9)=0$ 的解集为 $C=\{-3,2,3\}$.

可见,集合 C 是由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的.

定义 1　设有集合 A 和 B,由 A 和 B 的一切元素构成的集合称为集合 A 和 B 的**并集**,记作 $A \cup B$. 即

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

这样,方程

$$(x^2-5x+6)(x^2-9)=0$$