# 数值天气预报

（课外参考材料）

南京气象学院气象系天气教研组

一九七四年六月

# 毛主席语录

学习有两种态度. 一种是教条主义的态度, 不管我国情况, 适用的和不适用的, 一起搬来. 这种态度不好. 另一种态度, 学习的时候用脑筋想一下, 学那些和我国情况相适合的东西, 即吸取对我们有益的经验, 我们需要的是这样一种态度.

# 前　言

遵照毛主席关于"洋为中用"的教导，我们编译了汤姆森(Ph.D.Thompson)的《数值天气分析和预告》(Numerical Weather analysis and prediction)一书的第二至第七章，第九至第十一章及第十四章以及别洛夫(П.Н.Белов)的《数值天气预告的实用方法》(Практические Методы Численного прогноза погоды)一书的第一章，第二章，第三章的§1,§2,§7和第五章作为参考材料。前一本书所译的有关章节比较扼要地讲述了数值天气预告问题的物理实质，而后一本书则侧重讨论具体的预告方法。为了便于阅读，在不损害原意的条件下，若干地方增加了一些解释，插图，並对某些公式作了补充说明和推导。若干地方亦作了删节。由于编译者水平有限，不妥之处，请批评帮助。

章基嘉

# 目　录

# 一. 数值天气分析和預告

## 第一章　基本物理原则及其数学表示



## 第二章　作为数学和数值过程的动力天气預告



## 第三章　大气中波状运动的单一型



## 第四章　声波、重力波和罗斯貝波綫性方程的差分解法



## 第五章　大气中波状运动的混合型。滤波問題。

# 二、数值天气預告的实用方法

## 第二章 平均层上的預告



## 第三章 預告数层上的气压和垂直运动



## 第四章 統計預告方法

# 数值天气分析和預告　湯姆森

## 第一章　基本物理原则及其数学表示

动量守恒，质量守恒和能量守恒三原理是一切动力天气予告方法的数学物理基础。应用于液体或气体分子集合的准连续统计运动时，这些基本原理在数学上表达为连续介质的牛顿运动方程，连续方程及热力学的能量方程。至今所知，这些方程是具有普遍性的，它们对于正常压、温、速范围内的一切流体，无论其成份或运动状态如何，都是适用的。

值得指出，牛顿第二定律只适用于相对固定星座无加速度的坐标系中的运动，但另一方面，用固定于地球上的坐标系统来表示大气运动是最方便的。然而地球本身绕地轴一年旋转365周，绕太阳一年旋转一周，可见固定于地球上的坐标系不是一种无加速的惯性坐标系。为了使牛顿第二定律适用相对地球的运动，必须将惯性坐标系中的加速度表为相对地球的运动。

笛卡尔坐标系中的基本方程

### 1. 运动方程

幸好由地球自转引起的加速度是相对固定星座的最大加速度，这就允许我们把地球看成是相对于一个与地球一起运行的惯性坐标的纯旋转体。

设有一个连续的向量场**A**，**A**是时间和三个空间坐标的函数。若 $x, y, z$ 是惯性系统中的笛卡尔坐标，其原点位于地球自转轴上，**i**,**j**,**k**为相应的单位矢量，于是有

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

再令 $x', y', z'$ 为固定于地球上的笛卡尔坐标，这坐标自然地绕地轴以角速度 $\Omega$ 转动着。若 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ 分别为 $x', y', z'$ 上的单位矢量，则**A**也可以表为：

$$\mathbf{A} = A_x'\mathbf{i}' + A_y'\mathbf{j}' + A_z'\mathbf{k}'$$

因为单位矢量 $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ 的方向是随时间变化的，将以上方程对时间全微分便有

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dA_y'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dA_z'}{dt}\mathbf{k}' + A_x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + A_y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + A_z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \quad (1.1)$$

右端的前三项表示在随地球一道旋转的坐标系（$x', y', z'$）中观测到的**A**的全导数。由于坐标系（$x', y', z'$）的旋转是匀速的，所以

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{i}', \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{J}', \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{k}',$$

令 $d'/dt$ 为转动坐标系中的全微分，则方程（1.1）可写为　（1.2）

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{d'\mathbf{A}}{dt}+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{A}$$

这方程表示惯性坐标系中矢量A的全导数与转动坐标系中矢量A的全导数之间的差别等于A和转动坐标系的角速度Ω的矢量积。

将上述结果具体化，令A为位置矢量，定义为

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=x'\mathbf{i}'+y'\mathbf{j}'+z'\mathbf{k}'$$

则方程（1.2）有以下形式

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d'\mathbf{r}}{dt}+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$$

因$d\mathbf{r}/dt$是速度矢，故

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}'+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r} \tag{1.3}$$

V和V′分别为惯性坐标和转动坐标中测得的质点的速度。如令A等同V，则有

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\frac{d'\mathbf{V}}{dt}+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}$$

将（1.3）代入以上方程，由于Ω为常矢，则有

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\frac{d'}{dt}(\mathbf{V}'+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})+\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}+\mathbf{V}')$$

$$=\frac{d'\mathbf{V}'}{dt}+2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}'+\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}) \tag{1.4}$$

以上方程中$d\mathbf{V}/dt$为惯性坐标中的加速度，$d'\mathbf{V}'/dt$为转动坐标中的加速度。它们之间的差别可设想为虚力作用的结果，这虚力是在转动坐标系中必须考虑的。$2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}'$称科氏加速度，$-\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})$是离心加速度。若R是r在与地轴垂直方向上的投影，则

$$\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})=\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R})=\mathbf{\Omega}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{\Omega})-\mathbf{R}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{\Omega})=-\Omega^2\mathbf{R} \tag{1.5}$$

现在写出适用于相对地球运动的牛顿第二定律已经不费事了。将绝对加速度与所有作用力（对单位质量）的合力相等，则由（1.5）有

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\frac{d'\mathbf{V}'}{dt}+2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}'-\Omega^2\mathbf{R}=\mathbf{F}+\mathbf{g}^*+\mathbf{P} \tag{1.6}$$

其中F表示内粘性力，$g^*$为重力，P是由大气压力空间变化引起的力。因为真正的作用力在惯性坐标和转动坐标中是相同的，所以力F，$g^*$，P也是对于转动坐标系的。

由于重力和离心力只是位置的函数，它们与转动坐标系中的运动无关，所以为方便起见把它们合成为一个力$g$，$g$称为视重力，即

$$\mathbf{g}=\mathbf{g}^*+\Omega^2\mathbf{R}$$

g处处与海平面相垂直。若定义“高度”为对海平面的垂直距离，于是在这样的等高面上平行此面的g的分量便消失，而垂直此面的分量就是$g$，也就是视重力加速度的模。

为数值计算的目的，矢量方程（1.6）必须对三个坐标轴分解成三个标量方程。方



以后只记 $\frac{d'}{dt}$ 均写成 $\frac{d}{dt}$

程（1.6）对任何选择的坐标方向都是有效的，但为了便于气象上的应用，我们选择$x$轴与海平面平行並指向东，$y$轴与海平面平行並指向北，$z$轴与海平面垂直並指向上。方程（1.6）在这三个方向上的投影（分量方程）为：

$\frac{d\vec{V}}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{V}-\Omega^2\vec{R}=\vec{F}+\vec{P}+\vec{g}^*$

$$\frac{du}{dt}-2\Omega v\sin\varphi+2\Omega w\cos\varphi=P_x+F_x$$

$$\frac{dv}{dt}+2\Omega u\sin\varphi=P_y+F_y$$

$$\frac{dw}{dt}-2\Omega u\cos\varphi=P_z+F_z-g$$

$g=g^*+\Omega^2R$

在上列方程中略去小项 $2\Omega w\cos\varphi$，$2\Omega u\cos\varphi$，$\frac{dw}{dt}$，且暂时不考虑内粘性力$\mathbf{F}$，並令$f=2\Omega\sin\varphi$，又因 $p_x=-\frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta x}$，$p_y=-\frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta y}$，$p_z=-\frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta z}$，于是可写为

$$\frac{du}{dt}-fv+\frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta x}=0 \tag{1.7}$$

$$\frac{dv}{dt}+fu+\frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta y}=0 \tag{1.8}$$

$$\frac{\delta p}{\delta z}+g\rho=0 \tag{1.9}$$

以上方程是天气分析中常用的运动方程近似形式。其所以是近似的，不仅略去了一些小项，而且忽略了坐标轴方向随运动的改变。将（1.7）和（1.8）合写，就得水平运动的矢量方程

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}+\mathbf{k}\times f\mathbf{V}+\frac{1}{\rho}\nabla p=0 \tag{1.10}$$

其中$\mathbf{V}$是速度矢在水平面上的投影，$\nabla$是梯度的水平矢。方程（1.10）的第一项一般比第二项要小一个量级，如略去水平加速度项，便得地转风公式

$$\boxed{\mathbf{V}=\mathbf{k}\times\frac{1}{\rho f}\nabla p} \tag{1.11}$$

## 2. 连续方程

气象上的连续方程，如空气作为可压缩气体时，具有以下形式

$$\frac{\delta\rho}{\delta t}+u\frac{\delta\rho}{\delta x}+v\frac{\delta\rho}{\delta y}+w\frac{\delta\rho}{\delta z}+\rho\left(\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}\right)=0 \tag{1.12}$$

或

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}\right)=0 \tag{1.13}$$

或

$$\frac{\delta\rho}{\delta t}+\frac{\delta\rho u}{\delta x}+\frac{\delta\rho v}{\delta y}+\frac{\delta\rho w}{\delta z}=0 \tag{1.14}$$

$\frac{\delta\rho}{\delta t}+\nabla\cdot\rho\vec{V}=0$

注：书中偏微分符号“∂”一律排成“δ”，请读者注意。

如空气视为不可压缩流体时，连续方程具有以下形式

$$\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta y}+\frac{\delta w}{\delta z}=0 \tag{1.15}$$

3. **热力学能量方程**

动力预告理论的最后一个物理原则是热力学第一定律。如大气作为无粘性气体，则其唯一作的功是因膨胀而反抗法线方向的压力时所作的功。所以给空气质量一定热能必与其内能的增加和因体积膨胀所作的功相平衡。热力学第一定律在气象上的数学表示就是下列方程

$dq=C_v dT+p d\alpha$

$$\frac{dq}{dt}=C_v\frac{dT}{dt}+p\frac{d\alpha}{dt} \tag{1.16}$$

当过程为绝热时有

$$C_v\frac{dT}{dt}+p\frac{d\alpha}{dt}=0 \tag{1.17}$$

由状态方程$p\alpha=RT$对$t$微分可得

$$p\frac{d\alpha}{dt}=R\frac{dT}{dt}-\alpha\frac{dp}{dt}$$

代入（1.17）有

$$C_p\frac{dT}{dt}-\alpha\frac{dp}{dt}=0$$

其中$C_p=C_v+R$。如将上式除$C_pT$，且$\alpha=\frac{RT}{P}$，有

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}-\frac{k}{p}\frac{dp}{dt}=0$$

其中　$k=R/C_p$。将以上方程乘　$T\left(\frac{p_0}{p}\right)^k$后，有

$$\left(\frac{p_0}{p}\right)^k\frac{dT}{dt}-kT\left(\frac{p_0}{p}\right)^k\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}=0$$

或改写为
$$\left(\frac{p_0}{p}\right)^k\frac{dT}{dt}-kT\left(\frac{p_0}{p}\right)^{k-1}\frac{p_0}{p^2}\frac{dp}{dt}=0$$

$$\left(\frac{p_0}{p}\right)^k\frac{dT}{dt}+T\frac{d}{dt}\left(\frac{p_0}{p}\right)^k=0$$

$$\frac{d}{dt}T\left(\frac{p_0}{p}\right)^k=0 \tag{1.18}$$

其中$p_0=1000$毫巴，$T\left(\frac{p_0}{p}\right)^k=\theta$，为位温。故方程（1.18）又可写为

（绝热）热力学能量方程 $\Rightarrow$ $$\frac{d\theta}{dt}=0 \tag{1.19}$$

绝热过程中空气质点的位温始终保持不变。

这表明，若过程是干绝热的，则空气元量的位温始终保持不变。对于一般情况下的非绝热气流，则其位温的个别变化

非绝热过程

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt}=\frac{\theta}{C_pT}\frac{dq}{dt}} \qquad (1.20)$$

### 4. 等压面坐标系中的基本方程

在等压面坐标系中，坐标（x,y）表示一点投影在水平面上的位置，而以气压表示这点沿垂直轴的位置。一个变量的水平导数等于这个变量在同一等压面上由一点到另一点的差值与这两点距离在水平面上的投影之商。而垂直导数是对气压的导数，但仍旧是沿垂直轴方向的。

令 $\phi_0$ 和 $\phi_1$ 为变量 $\phi$ 在同一等压面上相邻两点A和B上的值，这两点的水平距离为$\Delta x$，垂直距离为$\Delta z$。再令$\phi_2$为变量$\phi$在C点的值，C点与A点在同一水平面内，而与B点在同一垂线上。因A与B在同一等压面上，所以对应于$\Delta x$和$\Delta z$的气压增量$\Delta p$是相同的。如果$\Delta x$，$\Delta z$和$\Delta p$都很小，则

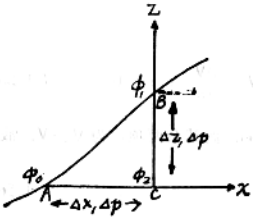


图1

$$\left(\frac{\delta\phi}{\delta x}\right)_z=\frac{\phi_2-\phi_0}{\Delta x}=\frac{\phi_2-\phi_1}{\Delta x}+\frac{\phi_1-\phi_0}{\Delta x}$$

$$=\frac{\phi_1-\phi_0}{\Delta x}+\frac{\phi_2-\phi_1}{\Delta p}\frac{\Delta p}{\Delta x}$$

根据上述定义

$$\frac{\phi_1-\phi_0}{\Delta x}=\left(\frac{\delta\phi}{\delta x}\right)_p,\ \frac{\phi_2-\phi_1}{\Delta p}=\frac{\delta\phi}{\delta p},\ \frac{\Delta p}{\Delta x}=\left(\frac{\delta p}{\delta x}\right)$$

所以有

$$\left(\frac{\delta\phi}{\delta x}\right)_z=\left(\frac{\delta\phi}{\delta x}\right)_p+\frac{\delta\phi}{\delta p}\left(\frac{\delta p}{\delta x}\right)_z \qquad (1.21)$$

同理可得

$$\left(\frac{\delta\phi}{\delta y}\right)_z=\left(\frac{\delta\phi}{\delta y}\right)_p+\frac{\delta\phi}{\delta p}\left(\frac{\delta p}{\delta y}\right)_z \qquad (1.22)$$

$$\frac{\delta\phi}{\delta z}=\frac{\delta\phi}{\delta p}\frac{\delta p}{\delta z} \qquad (1.23)$$

令$\phi$为等压面的高度$z$，根据定义 $\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_z=0$，（1.21）可写为

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_p+\frac{\delta z}{\delta p}\left(\frac{\delta p}{\delta x}\right)_z=0$$

根据静力方程 $\frac{\delta z}{\delta p}=-\frac{1}{g\rho}$

可得 $\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z=g\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p$，同理有 $\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z=g\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p$

于是有 $$\boxed{\frac{1}{\rho}\nabla_z p = g\nabla_p Z} \tag{1.24}$$

因重力加速度g在95%的大气质量范围内为一常数，方程（1.24）说明，水平气压梯度力（对单位质量）和等压面高度的梯度矢成正比，比例常数为$g$。

等压面坐标系的方便不仅表现在用高度梯度代替气压梯度时使运动方程中的ρ消失，而且还表现在连续方程的形式简化上。将连续方程（1.12）写为

$$\left(\frac{\delta\rho}{\delta t}\right)_z + \mathbf{V}\cdot\nabla_z\rho + \frac{\delta}{\delta z}(\rho w) + \rho\nabla_z\cdot\mathbf{V} = 0$$

用静力方程消去上式中的ρ，有

$$-g\frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta p}{\delta t}\right)_z - \mathbf{V}\cdot\nabla_z\left(g\frac{\delta p}{\delta z}\right) - \frac{\delta}{\delta z}\left(g\frac{\delta p}{\delta z}w\right) - g\frac{\delta p}{\delta z}\nabla_z\cdot\mathbf{V} = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta p}{\delta t}\right)_z + \mathbf{V}\cdot\nabla_z\left(\frac{\delta p}{\delta z}\right) + \frac{\delta}{\delta z}\left(w\frac{\delta p}{\delta z}\right) + \frac{\delta p}{\delta z}\nabla_z\cdot\mathbf{V} = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta p}{\delta t}\right)_z + \frac{\delta}{\delta z}(\mathbf{V}\cdot\nabla p) + \frac{\delta}{\delta z}\left(w\frac{\delta p}{\delta z}\right) + \frac{\delta p}{\delta z}\nabla_z\cdot\mathbf{V} - \frac{\delta\mathbf{V}}{\delta z}\cdot\nabla_z p = 0$$

因 $\frac{\delta}{\delta z} = \left(\frac{\delta p}{\delta z}\right)\frac{\delta}{\delta p}$，所以

$$\frac{\delta}{\delta p}\left[\left(\frac{\delta p}{\delta t}\right)_z + \mathbf{V}\cdot\nabla_z p + w\frac{\delta p}{\delta z}\right] + \nabla\cdot\mathbf{V} - \frac{\delta\mathbf{V}}{\delta p}\cdot\nabla_z p = 0 \tag{1.25}$$

上式方括号内三项之和恰为气压个别变化 $\frac{dp}{dt} = \omega$，而其余两项恰为 $\nabla_p\cdot\mathbf{V}$，故得

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$

$$\frac{\delta\omega}{\delta p} + \nabla_p\cdot\mathbf{V} = 0 \tag{1.26}$$

这方程就是等压面坐标系中的连续方程，它是一个线性方程，而且样子非常像不可压缩流体的连续方程（1.15）。

在等压面坐标系中的个别变化可写为

$$\frac{d\phi}{dt} = \left(\frac{\delta\phi}{\delta t}\right)_p + u\left(\frac{\delta\phi}{\delta x}\right)_p + v\left(\frac{\delta\phi}{\delta y}\right)_p + \omega\frac{\delta\phi}{\delta p} = 0 \tag{1.27}$$

水平运动矢量方程（1.10）于是写为

$$\left(\frac{\delta\mathbf{V}}{\delta t}\right)_p + u\left(\frac{\delta\mathbf{V}}{\delta x}\right)_p + v\left(\frac{\delta\mathbf{V}}{\delta y}\right)_p + \omega\frac{\delta\mathbf{V}}{\delta p} + \mathbf{k}\times f\mathbf{V} + g\nabla_p z = 0 \tag{1.28}$$

其他方程可写为

$$\nabla_p\cdot\mathbf{V} + \frac{\delta\omega}{\delta p} = 0 \tag{1.29}$$

绝热过程 → $$\left(\frac{\delta\theta}{\delta t}\right)_p + \mathbf{V}\cdot\nabla_p\theta + \omega\frac{\delta\theta}{\delta p} = 0 \tag{1.30}$$

$$\frac{\delta z}{\delta p}=-\frac{\alpha}{g} \tag{1.31}$$

$$p\alpha=RT \tag{1.32}$$

$$\theta=T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\kappa} \qquad \kappa=\frac{R}{c_p} \tag{1.33}$$

以上七个标量方程包含七个未知函数$u,v,\omega,\theta,z,\alpha,T$，而自变量为$x,y,p,t$。

## 5. 等位温面坐标系中的基本方程

对描写绝热运动的一种方便的坐标系是$\theta$坐标系。它和$p$坐标系十分 相似，所 不 同的是垂直方向上的自变量取位温$\theta$。在作坐标变换时，用到以下关系式

$$\left(\frac{\delta\phi}{\delta x}\right)_z=\left(\frac{\delta\phi}{\delta x}\right)_\theta+\frac{\delta\phi}{\delta\theta}\left(\frac{\delta\theta}{\delta x}\right)_z \tag{1.34}$$

$$\left(\frac{\delta\phi}{\delta y}\right)_z=\left(\frac{\delta\phi}{\delta y}\right)_\theta+\frac{\delta\phi}{\delta\theta}\left(\frac{\delta\theta}{\delta y}\right)_z \tag{1.35}$$

$$\frac{\delta\phi}{\delta z}=\frac{\delta\phi}{\delta\theta}\frac{\delta\theta}{\delta z} \tag{1.36}$$

先用上式转换水平气压梯度力，令$\phi=p$，有

$$\left(\frac{\delta p}{\delta x}\right)_z=\left(\frac{\delta p}{\delta x}\right)_\theta+\frac{\delta p}{\delta\theta}\left(\frac{\delta\theta}{\delta x}\right)_z \tag{1.37}$$

再令$\phi$为等熵面高度，有

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_\theta+\frac{\delta z}{\delta\theta}\left(\frac{\delta\theta}{\delta x}\right)_z=0$$

将上式对$(\delta\theta/\delta x)_z$解出並代到（1.37）右端第二项中去，有

$$\frac{\delta p}{\delta\theta}\left(\frac{\delta\theta}{\delta x}\right)_z=-\frac{\delta p}{\delta\theta}\frac{\delta\theta}{\delta z}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_\theta=-\frac{\delta p}{\delta z}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_\theta=g\rho\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_\theta \tag{1.38}$$

将$\theta$取对数，並对$x$微分，有 $\frac{1}{\theta}\frac{\delta\theta}{\delta x}=\frac{1}{T}\frac{\delta T}{\delta x}-\kappa\frac{1}{p}\frac{\delta p}{\delta x}$，因为微分沿等$\theta$面进 行，故 $\left(\frac{\delta\theta}{\delta x}\right)_\theta=0$，因而有

$$\left(\frac{\delta p}{\delta x}\right)_\theta=\frac{p}{T\kappa}\left(\frac{\delta T}{\delta x}\right)_\theta=\frac{\rho RT}{T}\frac{C_p}{R}\left(\frac{\delta T}{\delta x}\right)_\theta=C_p\rho\left(\frac{\delta T}{\delta x}\right)_\theta \tag{1.39}$$

将（1.38）和（1.39）代入（1.37），得

$$\left(\frac{\delta p}{\delta x}\right)_z=C_p\rho\left(\frac{\delta T}{\delta x}\right)_\theta+\rho g\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_\theta\text{，或 }\frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta p}{\delta x}\right)_z=\frac{\delta}{\delta x}\left(C_pT+gz\right)_\theta$$

令$\Psi=C_pT+gz$，$\Psi$称蒙哥马利流函数，则有

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_\theta,\ \text{同理有，}\ \frac{1}{\rho}\nabla_z p=\nabla_\theta\psi \tag{1.40}$$

方程（1.24）表明，单位质量的气压梯度力在等熵面上表现为蒙哥马利流函数的梯度矢。在$\theta$坐标系中的全导数为

$$\frac{d\phi}{dt}=\left(\frac{\delta\phi}{\delta t}\right)_\theta+u\left(\frac{\delta\phi}{\delta x}\right)_\theta+v\left(\frac{\delta\phi}{\delta y}\right)_\theta+\frac{d\theta}{dt}\frac{\delta\phi}{\delta\theta}$$

对于绝热运动，$d\theta/dt=0$，故上式为

$$\frac{d\phi}{dt}=\left(\frac{\delta\phi}{\delta t}\right)_\theta+\mathbf{V}\cdot\nabla_\theta\phi \tag{1.41}$$

如令　$\phi=\delta z/\delta\theta$，则

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta z}{\delta\theta}\right)=\frac{\delta}{\delta\theta}\left(\frac{\delta z}{\delta t}\right)_\theta+\mathbf{v}\cdot\frac{\delta}{\delta\theta}\nabla_\theta z=\frac{\delta}{\delta\theta}\left(\frac{dz}{dt}\right)-\frac{\delta\mathbf{v}}{\delta\theta}\cdot\nabla_\theta z$$

其中$dz/dt=w$，于是有

$$\frac{\delta w}{\delta\theta}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta z}{\delta\theta}\right)+\frac{\delta\mathbf{v}}{\delta\theta}\cdot\nabla_\theta z \tag{1.42}$$

另一方面连续方程可写为

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\nabla_z\cdot\mathbf{v}+\frac{\delta\theta}{\delta z}\frac{\delta w}{\delta\theta}=0$$

将（1.42）代入上式得

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta z}{\delta\theta}\right)+\nabla_z\cdot\mathbf{v}+\frac{\delta\mathbf{v}}{\delta z}\cdot\nabla_\theta z=0$$

其中第三项与第四项之和恰为$\nabla_\theta\cdot\mathbf{v}$，将上式乘$\rho\delta z/\delta\theta$，并将第一，二两项合并，有

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{\delta z}{\delta\theta}\right)+\rho\frac{\delta z}{\delta\theta}\nabla_\theta\cdot\mathbf{v}=0$$

$$\text{因}\quad\rho\left(\frac{\delta z}{\delta\theta}\right)=-\frac{1}{g}\frac{\delta p}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta\theta}=-\frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial\theta},$$

于是在$\theta$坐标系中连续方程取下列形式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial p}{\partial\theta}\nabla_\theta\cdot\mathbf{v}=0 \tag{1.43}$$

$\theta$坐标系中的运动方程为

$$\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right)_\theta+u\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\right)_\theta+v\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}\right)_\theta+\mathbf{k}\times f\mathbf{v}+\nabla_\theta\psi=0 \tag{1.44}$$

其余方程有以下形式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_\theta+u\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_\theta+v\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_\theta+\frac{\partial p}{\partial\theta}\nabla_\theta\cdot\mathbf{v}=0 \tag{1.45}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}=\frac{C_pT}{\theta} \tag{1.46}$$

$$\theta=T\left(\frac{p_{00}}{p}\right)^k \tag{1.47}$$

$$\Psi=C_pT+gz \tag{1.48}$$

**以上6个标量方程包含6个未知函数$u, v, \dot{\theta}, p, T$及$z$，而自变量为$x, y, \theta, t$。**

# 第二章　作为数学和数值过程的动力天气预告

水平运动方程，静力方程，连续方程，状态方程和绝热方程是动力天气预告的原始方程。首先将气压P通过位温$\theta$来表示。将静力方程和状态方程合並，有

$$\frac{T}{p}\frac{\delta p}{\delta z}=-\frac{g}{R}$$

再由位温公式得　$T=\theta\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa}$，並代入上式，有

$$\frac{p^{\kappa-1}}{p_0^{\kappa}}\frac{\delta p}{\delta z}=-\frac{g}{R\theta}，\text{或}\qquad \frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa}=-\frac{\kappa g}{R\theta}$$

，将此式对$z$积分，有

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa}=\frac{\kappa g}{R}\int_z^{\infty}\frac{dz}{\theta(z)} \qquad (2.1)$$

由此式可见，大气压力的分佈完全取决于位温。

大气中直接可测的量只有$p, T, u$和$v$，而垂直速度是不能直接测量的，但可以通过$u, v, p$来表示。现在就来推求这一表达式。将方程（1.25）写成以下形式

$$\frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{dp}{dt}\right)=\frac{\delta \mathbf{V}}{\delta z}\cdot\nabla p-\frac{\delta p}{\delta z}\nabla\cdot\mathbf{V}$$

将此方程$z$到$\infty$积分，因在大气层顶$dp/dt=0$，故有

$$\frac{dp}{dt}=-\int_z^{\infty}\left(\frac{\delta \mathbf{V}}{\delta z}\cdot\nabla p-\frac{\delta p}{\delta z}\nabla\cdot\mathbf{V}\right)dz \qquad (2.2)$$

$C_v\frac{dT}{dt}+p\frac{d\alpha}{dt}=0$　　$\because p\alpha=RT \quad \therefore \frac{d(p\alpha)}{dt}=R\frac{dT}{dt} \Rightarrow \alpha\frac{dp}{dt}+p\frac{d\alpha}{dt}=R\frac{dT}{dt}$

由方程（1.17）可得　$\Rightarrow \frac{dT}{dt}=\frac{1}{R}\left(\alpha\frac{dp}{dt}+p\frac{d\alpha}{dt}\right)$ 代入(1.17)得：

$$\frac{C_v}{R}\left(\alpha\frac{dp}{dt}+p\frac{d\alpha}{dt}\right)+p\frac{d\alpha}{dt}=0$$

这方程又可化为　$\frac{C_v}{R}\alpha\frac{dp}{dt}+\left(\frac{C_v}{R}+1\right)p\frac{d\alpha}{dt}=0 \Rightarrow \frac{\alpha}{R}C_v\frac{dp}{dt}+\frac{C_p}{R}p\frac{d\alpha}{dt}=0$

$$\frac{1}{\gamma p}\frac{dp}{dt}=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

$\Rightarrow \alpha C_v\frac{dp}{dt}+pC_p\frac{d\alpha}{dt}=0$

其中$\gamma=C_p/C_v$，再用连续方程 $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\nabla\cdot\mathbf{V}+\frac{\delta w}{\delta z}=0$ 代入上式，有

$$\frac{\delta w}{\delta z}=-\nabla\cdot\mathbf{V}-\frac{1}{\gamma p}\frac{dp}{dt}$$

将上式由地面到某一高度$z_1$积分，在地面上$w=0$，故有

$$w=-\int_0^{z_1}\nabla\cdot\mathbf{V}dz-\frac{1}{\gamma}\int_0^{z}\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}dz$$

上式中的$\frac{dp}{dt}$用（2.2）代入，得

$$w=-\int_0^{z_1}\nabla\cdot\mathbf{V}dz+\frac{1}{\gamma}\int_0^{z_1}\left[\frac{1}{p}\int_z^{\infty}\left(\frac{\delta\mathbf{V}}{\delta z}\cdot\nabla p-\frac{\delta p}{\delta z}\nabla\cdot\mathbf{V}\right)dz\right]dz \tag{2.3}$$

（2.3）式表明，垂直速度$w$有可能用同一时刻的$u,v,p$来表达，其中不含对时间的偏导数。为方便起见，再将其他方程列出：

状态方程 $$\rho=\frac{p}{\kappa T} \tag{2.4}$$

位温公式 $$\theta=T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\kappa}\quad 或\quad T=\theta\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} \tag{2.5}$$

静力方程 $$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa}=\frac{\kappa g}{R}\int_z^{\infty}\frac{dz}{\theta} \tag{2.6}$$

绝热方程 $$\frac{\delta\theta}{\delta t}=-\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\theta+w\frac{\delta\theta}{\delta z}\right) \tag{2.7}$$

水平运动方程 $$\frac{\delta u}{\delta t}=-\left(\mathbf{V}\cdot\nabla u+w\frac{\delta u}{\delta z}-fv+\frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta x}\right) \tag{2.8}$$

$$\frac{\delta v}{\delta t}=-\left(\mathbf{V}\cdot\nabla v+w\frac{\delta v}{\delta z}+fu+\frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta y}\right) \tag{2.9}$$

这七个方程（2.3）—（2.9）包含七个未知数$u$，$v,w,p,\rho,T,\theta$，而且是相互独立的，即不能从其他六个方程中推导出其中任何一个方程。如果给出$u,v$，$p,T$四个函数的初始条件和相应的边界条件，如在大气层顶气压和质量的输送为零，在地面上$w=0$等这些方程原则可以求解。但是这些方程中的（2.7）—（2.9）及（2.3）都是非线性的，这给求解造成了相当的困难。

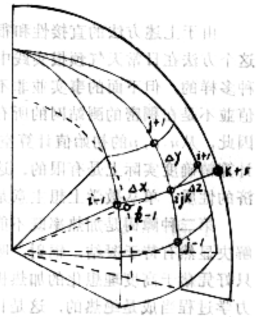


图2

## 1. 差分法

差分时所取的空间网格点如图2所示。$\Delta z$可取常数，$\Delta y$在大气有效厚度比地球半径$a$小得很多时，也可作为常数，只有$\Delta x$明显地取于决所在纬度，若$\Delta_0 x$