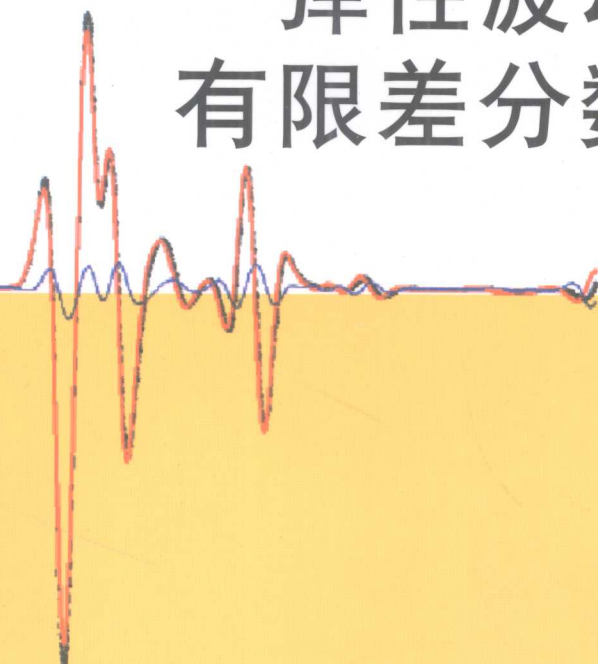


弹性波动方程的 有限差分数值方法

孙卫涛 编著



清华大学出版社

弹性波动方程的 有限差分数值方法

孙卫涛 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书首先从均匀各向同性介质中弹性波动方程基本理论出发,给出波动方程的一般形式及其求解方法,为读者提供一个对所研究问题的基本描述.然后,基于一阶和二阶弹性波动方程,分别讨论了波动方程的交错网格有限差分方法、不规则网格有限差分方法,通过严格的公式推导建立不同格式的有限差分方程,给出了震源和边界条件的处理方法;针对均匀各向异性介质、非均匀各向异性介质、双相孔隙介质等复杂情况逐步展开探讨,给出并对各种差分格式作了稳定性和数值频散分析,导出了稳定性条件.在波动方程有限差分数值方法的理论分析基础上,本书还给出各种不同复杂介质模型的数值算例,并在书中提供相关源程序代码,便于读者迅速理解并掌握波动方程有限差分数值方法.

本书的读者对象包括大专院校本科生、研究生,也可作为讲授弹性波动力学的教师、科研人员参考用书,同时对石油工业中从事地震波勘探方法研究的人员也有帮助.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

弹性波动方程的有限差分数值方法/孙卫涛编著. —北京:清华大学出版社,2009.2
ISBN 978-7-302-19028-8

I. 弹… II. 孙… III. 弹性—波动方程—差分法—数值计算 IV. O175.27

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 190466 号

责任编辑:刘颖 赵从棉

责任校对:赵丽敏

责任印制:王秀菊

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京市清华园胶印厂

经 销:全国新华书店

开 本:185×230 印 张:10.5

字 数:227 千字

版 次:2009 年 2 月第 1 版

印 次:2009 年 2 月第 1 次印刷

印 数:1~3000

定 价:25.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换.
联系电话:010-62770177 转 3103 产品编号:026928-01

波动是物质运动的重要表现形式. 由于物质特征、结构的不同, 波在其内部传播具有不同的特征, 包含的信息也不尽相同. 波在连续介质中的传播问题一直受到极大的重视, 波传问题的研究也具有十分重要的工程应用意义, 其中一个重要的应用领域是在地球物理方面. 地震波勘探(简称为地震勘探)方法是石油工业界使用最为广泛的勘探方法, 这种方法利用人工震源激发地震波, 利用地震仪把地震波传播的情况记录下来, 然后进行处理和分析. 地震勘探方法依据地球岩石的弹性假设以及波的传播特性进行勘探和相应的数据处理. 弹性波在介质中传播时, 其路径、振幅、相位以及波形都会随着介质的物理性质和几何性质的变化而发生变化, 地震勘探正是利用波的这些变化规律, 根据接收到的资料来推断地下介质的性质, 从而达到油气勘探的目的.

由于历史的原因, 地下介质的分布极为复杂, 在几何结构上, 有断层、间断点, 在物性组成上有岩石、流体、裂隙. 正是由于地质条件的复杂性, 要求建立更为复杂、尽可能真实的模型, 在此模型基础上建立波动问题的控制方程(波动方程). 随着地震勘探进展的不断深入, 对勘探精度的要求也越来越高, 勘探的目标也逐步从构造性油气藏转向裂缝性油气藏. 裂缝性油气藏是指油气的储集空间和渗滤通道主要为裂缝及其连通的孔隙、溶洞的油气储集层, 含油气的地层实际上是具有固体状态和流体状态的双相介质. 这种介质中的弹性波速度、振幅衰减均受到孔隙介质参数的影响. 目前对裂缝性储层中波传播的动力学特征尚处于积极研究阶段, 而利用地震波勘探手段寻找裂缝性油气藏是当今勘探地球物理界世界性的热点问题. 从提取地层岩性信息的角度看, 建立和发展更为符合实际的双相介质波动理论和求解方法, 充分阐明并解释各种物理现象以及波传特征具有重要的理论和实际意义.

弹性波动方程有多种求解方法, 20 世纪 50 年代初 Thomson (1950) 和 Haskell (1953) 提出了传播矩阵法; 1968 年 Alterman 和 Karal (1968) 提出了数值求解弹性波动方程的有限差分方法; 1970 年 Aki 和 Larner 提出了谱分析的 Aki-Larner 方法; 1975 年 Smith 提出了有限元法; 1977 年 Cerveny 对传统的射线方法进行了进一步的研究; 1978 年 Hong 和 Helmberger 提出了横向非均匀介质中的 glorified optics 方法; 1983 年 Lee 和 Largsort 提出了处理三维问题的 principal curvatures 方法; 1989 年 Michel Bouchon 等人提出了“边界积分方程-离散波数法”, 用来研究波在具有非均匀界面的多层介质中的传播; 1990 年 P. Berg 等人提出了谱方法, 用来模拟波在弹性介质中的传播. 传播矩阵方法和谱方法具有

计算速度快、占用内存少、计算精度高等优点,但只适用于简单地层模型(如水平层状);基于变分和积分原理的有限单元法和边界元法,优点在于其稳定性、收敛性以及边界适应性,但是有限单元法在进行大规模的线性方程组求解,特别是用于波动响应计算的情况下,计算量和内存占用量都非常大,使用不是很广泛;基于惠更斯原理的射线追踪方法计算速度很快,但是这种旅行时(travel time)正演方法缺少振幅信息.有限差分方法是求解双曲型偏微分方程的最常用数值方法之一,通过网格差分近似波动方程微分算子,能够得到完整的弹性波场信息,而且具有编程简单、运算速度快等优点,可以用来分析处理各种复杂地质构造中的波动问题.但是,这种方法也面临计算精度低、复杂界面处理难度大等问题,局部物理和几何参数的变化要求加密整个模型网格,导致计算量的大大增加.算法耗时大是目前几乎所有波动方程模拟方法的特点,这一缺点对一次模拟是可以忍受的,但是大规模反演问题则无法实现.这也是目前采用波动方程作为模型的反演算法仍未走向实际的根本原因.发展一种网格划分灵活、对复杂模型适应性强而且计算精度高的快速不规则网格有限差分方法,已经成为力学、地球物理学等领域国内外学者研究的热点.

二

人类利用的主要矿物与能源资源大多数都埋藏在具有复杂几何构造和复杂物理属性的地球岩石圈中.在工程应用中,人们往往把含油气地层中复杂地质构造和裂缝系统简化为几种简单的模型(如水平层状、垂直裂缝系统等),把多孔介质当作无孔隙固体处理或进行经验修正,这就使得实际资料得不到充分、合理的解释.因此,建立和发展更符合地质实际的非均匀双相各向异性介质波动理论和快速求解方法已是当今地震勘探领域面临的课题.

1951年 Gassmann 提出了一种流体对弹性波在孔隙介质中传播影响的等效介质理论,把流体饱和双相介质作为某种等效单相介质处理,等效介质的弹性特征由骨架弹性特征和流体弹性特征求取.1956年 Biot 发表了《流体饱和和多孔隙固体的弹性波传播理论》等两篇著名文章,从而奠定了双相介质中弹性波传播规律的基础. Biot 理论假定:由弹性各向同性固体构成骨架,连接骨架孔隙体积的空间内充满可压缩性流体,流体相对于固体流动遵循 Darcy 定律,属于 Poiseuille 型流动,流体与固体相对运动时存在质量耦合效应,弹性波场必须明显大于构成孔隙结构的颗粒的最大尺度. Biot 理论指出,在流体饱和和孔隙介质中传播的弹性波将产生快、慢两种纵波,快纵波类似于无孔隙介质中的普通纵波,对应于固体和同相运动的流体;慢纵波对应于固体和异相运动的流体.1980年 Plona 用实验证明了慢纵波的存在,为 Biot 理论提供了有力证据. Amos Nur 总结了孔隙岩石中波动传播的特点,较详细地阐述了流体饱和度、裂缝密度、孔隙度、孔隙流体压力和围压、裂隙与孔隙空间的几何形态等因素的影响.这些影响因素对地震勘探信息处理和解释具有重要的意义.

在针对裂缝性储层勘探中,早期油气勘探中起到了非常重要作用的各向同性地层假设已远远不能满足需要.1981年 Stuart Crampin 详细论述了各向异性介质中弹性波传播问题,指出在各向异性介质中存在横波分裂现象,据此可以推断裂缝发育程度和展布方向.近

年来的理论与实际观测均表明:具有水平对称轴的横向各向同性(即横观各向同性 HTI 介质)是描述垂直分布、币状、定向裂缝性地层的最为简单有效的模型,因而在裂缝性油气藏勘探过程中广泛使用. HTI 介质可以由 5 个独立弹性常数来描述,1986 年 Thomson 将 5 个参数用纵、横波速度和 3 个无量纲参数(ϵ , γ 和 δ)描述. 在任意垂直面内,这 5 个弹性常数还可以近似用拉梅常数和两个无量纲参数描述,利用多相介质本构关系,这两个无量纲参数可以指示勘探最关心的参数:裂缝密度和裂缝内含物类型. 因此,各向异性介质中弹性波传播特征研究变得更为复杂,而且更具有实际应用价值.

有限差分方法是常用的一种数值解法,它是在微分方程中用差商代替偏导数,得到相应的差分方程,通过解差分方程得到微分方程解的近似值. 该方法广泛应用于数学、力学、地球物理、电磁学等领域,是求解波动方程问题的一种重要方法. 根据求解波动方程的不同形式,有限差分方法可以分为二阶差分法和一阶差分法,根据网格特征,可以分为规则网格差分法和不规则网格有限差分法.

地震波正演模拟中有限差分方法的较早研究见于 1968 年 Alterman 和 Karal 的研究,他们给出了均匀各向同性介质二维二阶弹性波动方程有限差分方法,之后 Boore(1972)和 Alford (1974)等人先后在有限差分方面做了许多工作. Kelly 于 1976 年提出了非均匀各向同性介质二维二阶弹性波动方程有限差分方法. 这些学者采用的都是以位移作为未知变量的波动方程,包含位移对时间和空间的二阶偏导数. 直接对位移表示的二阶波动方程进行时间和空间的离散,要涉及三个时间步和空间步的物理量,公式烦琐且计算量大,而且对泊松比变化比较大的模型稳定性差.

1980 年 Aki 和 Rechar 提出了一维速度应力有限差分法,并对不同的差分格式进行了稳定性分析. 1984 年 Virieux 提出了模拟 SH 波在非均匀介质中传播的速度-应力有限差分法,1986 年 Virieux 又进一步提出了 P-SV 波在二维非均匀介质中传播的速度-应力有限差分法. 该方法将弹性波动方程用速度和应力来表示,对波动方程作降阶处理,波动方程中位移对时间和空间的二阶导数降为速度和应力对于时间和空间的一阶导数,并采用交错网格进行计算,取得了良好效果. 这种方法的重要优点是,对任意泊松比变化的模型正演都很稳定,适合于模拟固体、流体交界面附近的弹性波传播问题;数值频散和数值各向异性都很小,而且对泊松比的变化不敏感;采用具有高精度的差分算子,大大降低了单位波长内的网格点数,提高了计算速度. 1995 年, Dai 给出了非均匀各向同性孔隙介质二维一阶弹性波动方程的有限差分方法,对复杂介质弹性波传播进行了进一步的研究.

以上工作全部基于笛卡儿坐标系中的规则网格,在模拟实际地层中的断层、低速层、孔洞、井眼等复杂构造时,用普通网格模拟曲线界面时出现“阶梯状”边界,在地形构造模型中产生虚假绕射波. 另外,局部几何、物理参数的变化也会要求加密整个模型网格,导致计算量的大大增加,限制了有限差分方法在大规模数值模拟中的应用. 需要解决的关键问题是,在提高模拟复杂介质模型计算精度的同时,保持算法较高的计算速度. 因此,出现了不规则网格有限差分方法.

G. H. Shortley 首先于 1938 年研究了 Laplace 方程的不规则网格有限差分法, Mozoc 在 1989 年提出了均匀各向同性介质中具有垂直变步长不规则网格的二维二阶弹性波动方程有限差分法, Jastram 和 Tessmer, Falk 等给出了交错网格上的不规则网格差分方法, Tessmer, Hestholm 和 Ruud 用变形的矩形网格模拟曲线边界, 1999 年 Ivo Oprsal 研究了非均匀各向同性介质中矩形不规则网格的二维二阶弹性波动方程有限差分法, Pitarka 提出了各向同性介质中矩形不规则网格的有限差分方法, Nordström 导出了曲线坐标下变形网格的高阶差分方法. 不规则网格有限差分方法网格划分灵活, 能够较好地模拟各种复杂几何界面情况, 与相同规模的规则网格有限差分方法相比, 计算精度大大提高; 在相同精度要求下, 这种方法计算速度快, 可节省大量内存, 成为有限差分方法极具潜力的发展方向. 目前不规则网格有限差分方法还面临一些问题, 仍限制在矩形不规则网格范围内, 无法突破结构化网格的限制; 以二阶弹性波动方程不规则网格有限差分方法为主, 公式烦琐, 对于复杂模型正演的稳定性和精度还未达到理想的水平. 建立一种具有高精度差分算子、高适应网格剖分能力和高计算速度的不规则网格有限差分方法是未来的发展方向.

三

本书的目的就是针对具有复杂几何构造和复杂物质属性模型的弹性波传播问题, 研究具有高精度、低运算成本、适应性强的有限差分方法. 本书首先从均匀各向同性介质中弹性波动方程的基本理论出发, 给出波动方程的一般形式及其求解方法. 然后, 分别讨论了波动方程的交错网格有限差分方法、不规则网格有限差分方法, 通过严格公式推导建立不同格式的有限差分方程, 给出了震源和边界条件的处理方法; 针对各向异性介质、双相孔隙介质等复杂情况逐步展开探讨, 对各种差分格式作了稳定性和数值频散分析, 导出了稳定性条件. 在理论分析基础上, 本书还给出各种不同复杂介质模型的数值算例, 并在书中提供相关源程序代码, 便于读者迅速理解并掌握波动方程有限差分数值方法. 在各章结尾还给出了建议进一步阅读的文献, 并在全书结尾给出相关术语的索引, 方便读者在全书中迅速查找关心的内容. 由于作者水平和经验有限, 书中难免出现不妥或者谬误之处, 敬请读者和专家批评指正, 提出宝贵意见.

本书的主要工作得到了国家自然科学基金(项目批准号: 10402015)和中国石油天然气集团公司中青年创新基金(项目号: 05E7010)的支持, 同时也得到了清华大学校内基础研究基金的大力支持, 在此表示感谢!

作 者

2008 年 8 月

目 录

第一部分 基本原理 1

第 1 章 弹性波动方程定解问题	3
1.1 弹性理论基础	3
1.1.1 弹性	3
1.1.2 应变	3
1.1.3 应力	6
1.1.4 应力-应变之间的关系	8
1.1.5 动力学平衡方程式	13
1.2 弹性波动方程及其基本解	16
1.2.1 弹性波动方程	16
1.2.2 弹性波动方程的初值-边值问题	18
1.2.3 弹性波动方程的基本解	19
建议进一步阅读的文献	23
第 2 章 均匀各向同性介质弹性波动方程的有限差分方法	24
2.1 弹性波动方程的有限差分近似	24
2.2 网格剖分	27
2.3 有限差分格式相容性、收敛性和稳定性	28
2.3.1 相容性	28
2.3.2 收敛性	28
2.3.3 稳定性	28
2.4 二维均匀各向同性介质弹性波动方程的差分离散	32
2.5 差分格式稳定性分析	34
建议进一步阅读的文献	36

第二部分 高等差分算法 37

第3章 均匀各向同性介质弹性波动方程的交错网格有限差分方法	39
3.1 一阶弹性波动方程	39
3.2 交错网格有限差分方程	41
3.3 数值频散和稳定性分析	43
3.3.1 波动方程频散关系和差分格式数值频散	43
3.3.2 差分格式稳定性分析	47
3.4 震源处理	47
3.5 吸收边界处理	49
3.5.1 Higdon 吸收边界条件公式推导	49
3.5.2 物理量的吸收边界分布	52
建议进一步阅读的文献	54
第4章 各向同性一阶弹性波动方程的不规则网格有限差分方法	56
4.1 差分格式及方程离散	56
4.2 数值频散和稳定性分析	59
4.2.1 差分波动方程频散关系	59
4.2.2 差分波动方程传播速度分析	61
4.3 震源和吸收边界处理	62
建议进一步阅读的文献	63

第三部分 复杂介质模型 65

第5章 各向异性介质二阶弹性波动方程不规则网格有限差分方法	67
5.1 基本方程	67
5.2 数值频散和稳定性分析	73
5.3 数值算例	74
5.3.1 半空间介质模型	74
5.3.2 地下透镜体模型	76
建议进一步阅读的文献	78
第6章 各向异性一阶弹性波动方程的非矩形不规则网格有限差分方法	79
6.1 基本方程	79
6.2 数值频散和稳定性分析	82
6.3 吸收边界条件	83

6.4 数值算例.....	84
建议进一步阅读的文献	87
第 7 章 各向异性孔隙介质弹性波动方程的有限差分算法	88
7.1 双相各向异性介质弹性波动方程.....	88
7.2 交错规则网格有限差分方程.....	90
7.3 震源处理.....	92
7.4 吸收边界条件.....	93
7.5 数值频散和稳定性分析.....	94
7.6 数值算例	100
7.6.1 均匀孔隙介质模型.....	100
7.6.2 层状介质模型.....	100
7.6.3 各向异性模型.....	102
7.6.4 不均匀耗散系数模型.....	103
建议进一步阅读的文献.....	103
第 8 章 各向异性孔隙介质一阶弹性波动方程不规则网格有限差分方法.....	104
8.1 基本方程	104
8.2 数值频散和稳定性分析	106
8.2.1 公式推导.....	106
8.2.2 参数分析.....	110
8.3 吸收边界条件	118
8.4 数值算例	118
8.4.1 半空间模型.....	118
8.4.2 复杂海底地层模型.....	119
8.4.3 注气孔隙介质模型.....	121
建议进一步阅读的文献.....	124
附录 A 一阶弹性波动方程的交错网格显式差分离散公式.....	125
附录 B 非均匀各向异性介质有限差分应力-速度计算代码	127
B.1 应力分量更新过程的程序代码	128
B.2 速度分量更新过程的程序代码	131
B.3 子函数定义	134

附录 C 震源处理程序实现	135
C.1 震源结构定义	135
C.2 震源网格点应力分量更新过程程序代码	135
附录 D 二阶 Higdon 吸收边界条件的实现	137
附录 E 吸收边界条件程序代码	140
E.1 应力分量吸收边界条件程序代码	140
E.2 速度分量吸收边界条件程序代码	143
E.3 子函数定义	146
E.4 吸收边界条件中相关系数	150
索引	152
参考文献	154

第一部分

基 本 原 理

第 1 章 弹性波动方程定解问题

1.1 弹性理论基础

物体因受力而产生位移、应力、应变的扰动,这种扰动以一定的速度向物体其他部分传播,形成能量的基本传递形式之一:波动.本书中论及的弹性波是指位移、应力、应变等物理量在线弹性介质模型中的传播.下面章节将简要回顾经典线弹性理论的相关基本概念和公式.

1.1.1 弹性

物体在外力作用下发生形状改变,在一定限度内,引起形变的作用力消失后,物体的形变也将完全消失,这种物体称为完全弹性物体.物体完全恢复原来形状的能力称为弹性.

弹性物体是实际材料的一种理想模型,建立在如下基本假设之上.

(1) 物质连续性假设:实际物体的微观结构是由分子、原子、电子等粒子组成的,具有不连续性.但是,这些微观在宏观整体上表现出某种固有的物理特征(如密度、弹性常数等).因此,经典弹性理论能够把实际材料抽象成连续而密实的连续介质,并将位移、应力、应变等物理量定义为理想弹性模型空间点的连续函数,进而使用微积分等数学方法来处理.

(2) 弹性假设:物体的形变与受到的作用力之间存在单值函数关系,如果这种函数关系是线性的,则该物体称为线弹性体.对应的弹性理论称为线弹性理论.

1.1.2 应变

在外力作用下,物体内的质点将产生位移,包括刚体平动、刚体转动及物体变形.应变可以定义为物体形变而产生的质点位移的函数,描述了物体的形状改变,包括体积变化和形状畸变.应变的物理含义是通过物体内部任意质点的单位长度线段的长度、方向变化.

如图 1-1 所示,假设物体上的两个质点 A , B 分别位于 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$,在物体变形后移动到了 A' , B' 两点,其坐标为

$$\overline{OA'} = \mathbf{x} + \mathbf{u},$$

$$\overline{OB'} = \mathbf{x} + d\mathbf{x} + \mathbf{u} + d\mathbf{u}.$$

如果将 $\mathbf{u}$ 表示为分量形式,则有

$$u_i = x'_i - x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

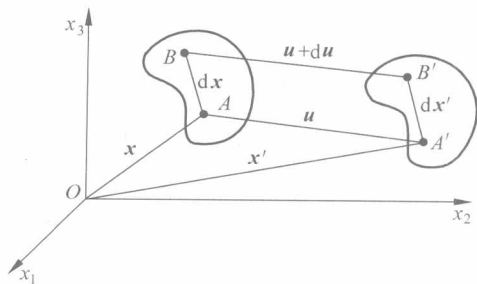


图 1-1 应变与形变关系示意图

采用拉格朗日坐标系,物体变形后的坐标 $\mathbf{x}'$ 可以表示为变形之前坐标 $\mathbf{x}$ 的函数:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\mathbf{x}),$$

或者写成分量形式:

$$x'_i = x'_i(x_1, x_2, x_3).$$

线元变形后(从 AB 到 $A'B'$)的长度变化为

$$\begin{aligned} \Delta &= d\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{x}' - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx'_k dx'_k - dx_i dx_i \\ &= \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} dx_i dx_j - \delta_{ij} dx_i dx_j \\ &= \left(\frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right) dx_i dx_j, \end{aligned} \quad (1-1)$$

其中 $k=1,2,3$. 注意,这里使用了爱因斯坦求和规定,重复的下标表示对该下标求和,即

$$dx_i dx_i = \sum_{i=1}^3 dx_i dx_i = dx_1 dx_1 + dx_2 dx_2 + dx_3 dx_3.$$

如果令

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right),$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecker 函数:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

代入公式(1-1),线元的长度变化可以表示为

$$\Delta = 2E_{ij} dx_i dx_j = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}.$$

上面公式中, $\mathbf{E}$ 称为格林应变张量. 考虑到位移 $\mathbf{u}$ 和质点 A, A' 的坐标之间存在如下关系:

$$u_k = x'_k - x_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

分别对上式等号两侧求空间偏导数,得到

$$\frac{\partial x'_k}{\partial x_i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \delta_{k,i}.$$

因此,格林应变张量可以表示为

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \delta_{k,i} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \delta_{k,j} \right) - \delta_{i,j} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$

考虑小变形的情况:

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1,$$

则格林应变张量写为

$$E_{ij} \approx \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

这是线弹性理论中的格林应变张量. 引入位移梯度的实体符号 $\mathbf{u}\nabla$ 和 $\nabla\mathbf{u}$, 格林应变张量表示为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u}).$$

在笛卡儿坐标系中, 线弹性应变张量的应变分量形式为

$$\begin{aligned}\epsilon_{ii} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \epsilon_{12} &= \epsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \\ \epsilon_{23} &= \epsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \\ \epsilon_{31} &= \epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right).\end{aligned}$$

其中, $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$ 称为正应变, 其他分量称为剪应变. 这组线性微分方程又称为应变-位移公式, 或者几何公式. 工程应变-位移的表达式为

$$\begin{aligned}e_{ii} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \gamma_{12} &= \gamma_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \\ \gamma_{23} &= \gamma_{32} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \\ \gamma_{31} &= \gamma_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}.\end{aligned}$$

补充 1.1

拉格朗日坐标和欧拉坐标

拉格朗日坐标和欧拉坐标是描述物质运动的两种方法. 拉格朗日坐标(物质坐标), 以物体变形前的质点坐标 $\mathbf{x}$ 为基本未知量, 将变形以后物体的质点坐标 $\mathbf{x}'$ 表示为变形前坐标的函数:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\mathbf{x}).$$

在拉格朗日坐标中, 位移表示为 $\mathbf{u} = \mathbf{x}'(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$. 拉格朗日坐标固定在材料上, 每一时刻均随同物质点运动, 通常用于研究固体物质的运动.

欧拉坐标(空间坐标), 以物体变形后的质点坐标 $\mathbf{x}'$ 为基本未知量, 将变形前物体的质点坐标 $\mathbf{x}$ 表示为变形后质点坐标的函数:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}').$$

在欧拉坐标中, 位移表示为 $\mathbf{u} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}(\mathbf{x}')$. 欧拉坐标在物质运动过程中不随物质点运动, 研究的是不同的质点经过空间一定点的状态, 通常用于研究流体运动.

1.1.3 应力

物体在外力作用下产生形状改变,形变导致物体内部结构发生变化,产生与外力相抗衡的内力场.内力场的强度与物体形变程度成比例,起到平衡外力、阻止形变的作用.应力描述了物体单位面元上所承受的力.作用在物体上的外力可以分为体积力和面积力两种.

1. 体积力

体积力是由外部作用力源引起的、在物体内部按体积分布的作用力.如图 1-2 所示,考虑在空间中的物体 Ω ,内部存在一个封闭区域 V , $P(x)$ 是 V 内部任意质点, ΔV 是位于 P 点的体积元.

设作用于体积元 ΔV 上的体积力(如重力)的合力为 $\tilde{\mathbf{G}}$,则单位体积内的体积力定义为

$$\mathbf{\Gamma} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\tilde{\mathbf{G}}}{\Delta V}.$$

作用于整个封闭区域 V 上的体积力可以通过积分公式得到:

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{\Gamma} dV.$$

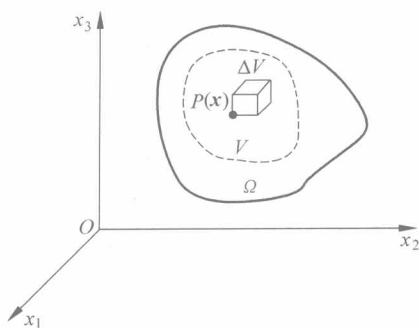


图 1-2 体积力示意图

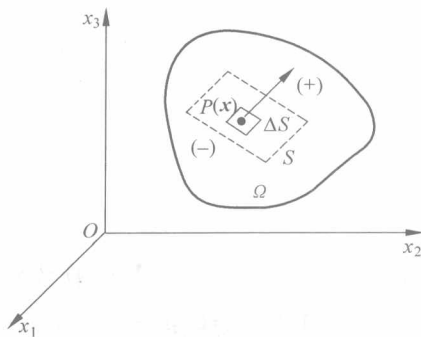


图 1-3 面积力示意图

2. 面积力

面积力是作用于物体任意截面上且与作用面的面积成正比的作用力.这种力是由于物体内部或物体之间邻近粒子的相互作用产生的.如图 1-3 所示,考虑空间中物体 Ω ,内部存在一个截面 S , $P(x)$ 是截面 S 上任意一点, ΔS 是 S 上包含 P 点的面积元.

设截面 S 的两侧分别称为“正向”和“负向”,则通过 P 点且指向“正向”的面元 ΔS 的法向矢量称为正法向,指向“负向”的法向矢量称为负法向.令 $\tilde{\mathbf{F}}$ 是面元 ΔS 上正法向对负法向一侧作用力的合力(一般说来, $\tilde{\mathbf{F}}$ 与面元 ΔS 的矢量方向并不重合),则通过 P 点作用于截面