

新概念定律公式

中学版

数

中学生数学

龙文/编

新概念定律公式手册

下

湖南科学技术出版社

中 学 版

中学生 数学 新概念定律公式手册

龙 文 / 编

下

42

（五）《说文解字》与《说文解字注》

目 录

第五章 平面向量	(279)
§ 5.1 平面向量的有关概念	(279)
§ 5.2 平面向量的线性运算	(280)
§ 5.3 平面向量的坐标运算	(283)
§ 5.4 平面向量的数量积	(287)
第六章 不等式	(290)
§ 6.1 不等式的性质	(290)
§ 6.2 不等式的解法	(291)
§ 6.3 不等式的证明	(298)
§ 6.4 不等式的应用	(303)
第七章 直线和圆的方程	(309)
§ 7.1 直线的方程	(309)
§ 7.2 两条直线的位置关系	(316)
§ 7.3 简单的线性规划	(325)
§ 7.4 曲线和方程	(327)
§ 7.5 圆的方程	(329)
第八章 圆锥曲线方程	(340)
§ 8.1 圆锥曲线的方程与性质	(340)
§ 8.2 直线与圆锥曲线的位置关系	(347)
§ 8.3 坐标变换	(356)
第九章 直线、平面、简单几何体	(376)
§ 9.1 平面及其性质	(376)
§ 9.2 空间线面的位置关系	(380)
§ 9.3 空间中的各种角	(388)

§ 9.4 空间的各种距离	(394)
§ 9.5 空间向量及其运算	(401)
§ 9.6 多面体	(411)
§ 9.7 旋转体	(428)
§ 9.8 截面、折叠和旋转	(443)
第十章 排列、组合和概率	(450)
§ 10.1 排列与组合	(450)
§ 10.2 二项式定理	(456)
§ 10.3 概率	(459)
第十一章 概率与统计	(463)
§ 11.1 随机变量	(463)
§ 11.2 统计	(465)
第十二章 极限	(473)
§ 12.1 数列的极限	(473)
§ 12.2 函数的极限	(475)
§ 12.3 函数的连续性	(478)
第十三章 导数与微分	(482)
§ 13.1 导数	(482)
§ 13.2 微分	(486)
§ 13.3 导数的应用	(487)
第十四章 积分	(493)
§ 14.1 不定积分的概念与计算	(493)
§ 14.2 定积分及其应用	(497)
[附表] 简易积分表	(503)
第十五章 复数	(509)
§ 15.1 复数的概念与表示法	(509)
§ 15.2 复数的运算	(514)
§ 15.3 复数与方程	(526)
第十六章 极坐标的有关知识	(531)
附录	

一、常数表	(543)
二、平方、立方、阶乘数表	(544)
三、常用计量单位表	(545)
四、拉丁字母和希腊字母	(547)

第五章 平面向量

§ 5.1 平面向量的有关概念

数量 只有大小的量称为数量(也称为标量或纯量).例如温度、时间、质量、面积等都是数量.

向量 既有大小又有方向的量叫做向量(也称矢量).例如位移、力、速度、力矩、加速度等都是向量.

自由向量 具有大小和方向而无特定位置的向量称为自由向量.除有特别说明外,本章提到的向量都是自由向量(即起点的选取是任意的).

向量的表示 向量可用一条有向线段(带有方向的线段)来表示.有向线段的长度表示向量的大小,箭头所指的方向表示向量的方向.

向量也可(印刷)用黑体字母 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ 等表示,书写时用 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ 等表示;

或用表示向量的有向线段的起点和终点字母表示(起点写在前面,终点写在后面).如图 5-1,记作 $\mathbf{a}$ 或 $\overrightarrow{AB}$.

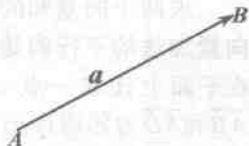


图 5-1

【注意】自由向量用有向线段表示时,与它的起点位置无关.

向量的模 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小(或长度)的数值叫做向量的模(或绝对值),记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\vec{a}|$ ($|\mathbf{a}|$).

零向量 长度(或模)为 0 的向量叫做零向量.记作 $\mathbf{0}$

平行向量 方向相同或相反的非零向量叫做平行向量.平行向量也叫共线向量.

如图 5-2 中的 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 就是一组平行向量.向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 平行,记作 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$.规定 $\mathbf{0}$ 与任一向量平行.

相等向量 长度相等且方向相同的向量叫做相等向量.向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 相等,记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.凡零向量都相等.

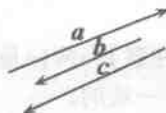


图 5-2

任意两个相等的非零向量,都可用同一条有向线段来表示,并且与有向线段的起点无关.

向量不同于数量

数量是只有大小的量,其大小可以用正数、负数和0来表示,它是一个代数量,可进行各种代数运算.数量之间可以比较大小,“大于”、“小于”的概念对数量是适用的.

向量是既有大小,又有方向的量.向量的模是正数或0,是可以进行比较大小的.由于方向不能比较大小,因此,“大于”、“小于”对向量来说是没有意义的.例如,记号 $a > b$ 就没有意义,而 $|a| > |b|$ 是有意义的.

§ 5.2 平面向量的线性运算

向量的加法的三角形法则 已知向量 a, b , 在平面内任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{BC} = b$, 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做 a 与 b 的和, 记作 $a + b$ (如图 5-3), 即

$$a + b = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

求两个向量和的运算,叫做向量的加法.

向量加法的平行四边形法则 已知向量 a, b , 在平面上任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b$, 以 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 为邻边作 $\square ABCD$, 则以 A 为起点的对角线 $\overrightarrow{AC}$ 就是 a 与 b 的和 (如图 5-4), 即

$$\overrightarrow{AC} = a + b.$$

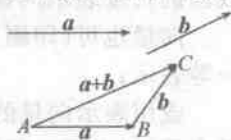


图 5-3

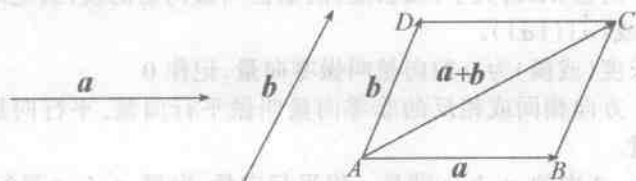


图 5-4

【注意】当两向量不共线时,向量加法的三角形法则和平行四边形法则是一致的.

一个向量与零向量的和

对于零向量与任一向量 a , 有

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

求几个已知向量的和

已知向量 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$, 在平面上任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA_1} = a_1, \overrightarrow{A_1A_2} = a_2, \overrightarrow{A_2A_3} = a_3, \dots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = a_n$, 则

$$\overrightarrow{OA_n} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

向量加法的运算律

交换律 $a + b = b + a,$

结合律 $(a + b) + c = a + (b + c).$

关于向量和

(1) 两个向量的和仍然是一个向量.

(2) 当向量 a 与 b 不共线时, $a + b$ 的方向与 a, b 都不同向, 且

$$|a + b| < |a| + |b|.$$

(3) 当向量 a 与 b 同向时, 则 $a + b, a, b$ 都同向, 且

$$|a + b| = |a| + |b|.$$

(4) 当向量 a 与 b 反向时,

若 $|a| > |b|$, 则 $a + b$ 的方向与 a 相同, 且

$$|a + b| = |a| - |b|;$$

若 $|a| < |b|$, 则 $a + b$ 的方向是与 b 相同, 且

$$|a + b| = |b| - |a|.$$

相反向量 与 a 长度相等, 方向相反的向量, 叫做 a 的相反向量, 记作 $-a$

(1) 零向量的相反向量仍是零向量.

(2) 任一向量与它相反向量的和是零向量, 即

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

由此得

$$-(-a) = a.$$

(3) 若 a, b 互为相反向量, 则

$$a = -b, b = -a, a + b = 0.$$

向量的减法 向量 a 加上 b 的相反向量, 叫做 a 与 b 的差. 即

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}),$$

求两个向量差的运算,叫做向量的减法.

显然,向量减法是向量加法的逆运算.

向量减法的三角形法则

已知两个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 在平面内任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, 即 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 可以表示为从向量 $\mathbf{b}$ 的终点指向向量 $\mathbf{a}$ 的终点的向量(如图 5-5).

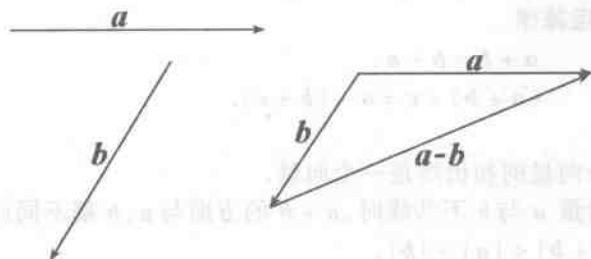


图 5-5

向量等式 含有向量的等式叫做向量等式.

在向量等式的两边同时加上或减去一个相同的向量,仍得到向量等式.特别地,移项法则对向量等式仍适用.

向量的数乘(倍积) 实数 λ 与向量 $\mathbf{a}$ 的乘积是一个向量,叫做向量 $\mathbf{a}$ 的数乘,也叫做倍积.记作 $\lambda\mathbf{a}$. $\lambda\mathbf{a}$ 也有长度和方向,

其长度 $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$,

即等于 λ 的绝对值与 $\mathbf{a}$ 的长度的乘积;

其方向与 λ 的符号有关.当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 的方向相同;当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 的方向与 $\mathbf{a}$ 的方向相反;当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

实数 λ 叫做 $\mathbf{a}$ 的系数.

数乘的运算律

若 λ, μ 为实数, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为向量,则数乘满足如下运算律:

结合律 $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$;

第一分配律 $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$;

第二分配律 $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

向量共线(平行)的充要条件

(1) 向量 a 与非零向量 b 共线(平行)的充要条件是有且只有一个实数 λ , 使得 $a = \lambda b$. 即

$$a \neq 0, a // b \Leftrightarrow a = \lambda b;$$

(2) 设 $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$, 则

$$a // b \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0;$$

【注意】 向量平行与直线平行是有区别的, 直线平行不包括重合.
平面向量基本定理 如果 e_1 和 e_2 是同一平面内的两个不共线向量, 那么对这一平面内的任一向量 a , 有且只有一对实数 λ_1, λ_2 , 使

$$a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2.$$

即: 任一向量都可沿两个不平行的方向分解为两个向量的和, 并且分解是唯一的.

向量的线性组合 $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ 叫做向量 e_1 和 e_2 的线性组合, 其中 λ_1, λ_2 为实数. 因此平面向量基本定理即为:

同一平面内的三个向量, 其中任一向量都可表示为其他两个向量的线性组合.

向量的线性相关 如果两个非零向量 a 和 b 有线性关系

$$\lambda a + \mu b = 0,$$

式中 λ, μ 不全为零, 则称这两个向量共线(即 $a // b$), 反之也真. 称向量 a 和 b 线性相关.

线性无关 对两个非零向量 a 和 b , 若 $\lambda a + \mu b = 0$ 只有在 $\lambda = 0$ 且 $\mu = 0$ 时才成立, 则称向量 a, b 为线性无关.

基底和基向量 如果向量 e_1 和 e_2 不平行, 那么 e_1 和 e_2 的所有线性组合 $(\lambda e_1 + \mu e_2)$ 能生成平面上的全体向量, $\{e_1, e_2\}$ 叫做平面上全体向量的一个基底, e_1 和 e_2 叫做基向量.

向量的线性运算 向量的加法、减法、实数与向量的积的混合运算称为向量的线性运算, 也叫做向量的初等运算.

§ 5.3 平面向量的坐标运算

向量的坐标表示 在直角坐标系内, 我们分别取与 x 轴、 y 轴方向相同的两个单位向量 i, j 作为基底, 任作一个向量 a , 由平面向量基本定

理知,有且只有一对实数 x, y , 使得

$$a = xi + yj.$$

我们把 (x, y) 叫做向量 a 的(直角)坐标, 记作

$$a = (x, y).$$

其中 x 叫做 a 在 x 轴上的坐标, y 叫做 a 在 y 轴上的坐标, ①式叫做向量 a 的直角坐标表示.

与 a 相等的向量的坐标也为 (x, y) .

显然 $i = (1, 0), j = (0, 1), 0 = (0, 0)$.

位置向量 在直角坐标平面内, 以原点 O 为起点, 作 $\overrightarrow{OA} = a$, 则点 A 的位置被 a 唯一确定. 称向量 a 为点 A 的位置向量. 向量 $\overrightarrow{OA}$ ($\overrightarrow{OA} = xi + yj$) 的坐标 (x, y) 也就是点 A 的坐标; 反之, 点 A 的坐标 (x, y) 也就是向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标.

设从 x 轴正方向到 $\overrightarrow{OA}$ 的方向的转角为 α , 有

$$\begin{cases} x = |a| \cos \alpha, \\ y = |a| \sin \alpha. \end{cases}$$

向量坐标的意义

$\overrightarrow{AB}$ 为表示向量 a 的有向线段(如图 5-7), A, B 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 则向量 a 的坐标为

$$x = x_2 - x_1,$$

$$y = y_2 - y_1,$$

即 a 的坐标为 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

由此可知, 向量 a 的坐标与表示该向量的有向线段的起、终点的具体位置没有关系, 只与其相对位置有关系.

向量的坐标运算 若 $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2), \lambda$ 是实数. 则

$$a + b = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

$$a - b = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2);$$

$$\lambda a = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1);$$

$$a \cdot b = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2;$$

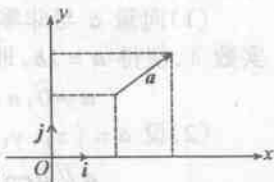


图 5-6

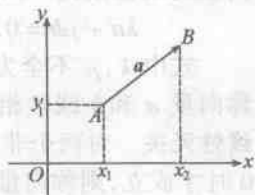


图 5-7

$$|a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

向量平行的坐标表示 设 $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$, 其中 $b \neq 0$, 则

$$a \parallel b \Leftrightarrow (x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \quad (x_2 \neq 0, \text{ 且 } y_2 \neq 0).$$

有向线段

(1) 规定了正方向的直线叫做有向直线.

(2) 规定了起点和终点的线段叫做有向线段. 以 A 为起点、 B 为终点的有向线段记作 $\overrightarrow{AB}$.

(3) 有向线段的数量和长度.

一条有向线段的长度, 连同表示它的方向的正负号, 叫做有向线段的数量. 有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的数量用 AB 表示.

若有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 在数轴上的坐标为 $A(x_1)$, $B(x_2)$, 则

它的数量 $AB = x_2 - x_1$

它的长度 $|\overrightarrow{AB}| = |x_2 - x_1|$

有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BA}$ 具有下列关系:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|,$$

$$|\overrightarrow{AB}| = -|\overrightarrow{BA}| \text{ 或 } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0).$$

(4) 沙尔定理 设 A, B, C 是同一条有向直线上的三个点, 则不论它们的位置怎样, 都有

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

一般地, 设 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 是同一条有向直线上的 n 个点, 则不论它们的位置怎样, 总有

$$\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1} A_n} = \overrightarrow{A_1 A_n}.$$

线段的定比分点

1. 有关概念

设 P_1, P_2 是直线 l 上的两点, 点 P 是 l 上不同于 P_1, P_2 的任意一点, 则存在一个实数 λ , 使 $\overrightarrow{P_1 P} = \lambda \overrightarrow{P P_2}$, λ 叫做点 P 分有向线段 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 所

成的比,点 P 叫做 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的定比分点.

若点 P 在线段 P_1P_2 上,则点 P 叫做 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的内分点.

若点 P 在线段 P_1P_2 (或 P_2P_1) 的延长线上,则点 P 叫做 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的外分点.

2. P 点在 l 上的不同位置与 λ 的不同数值之间的对应关系如下表

P 点位置		$\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$
内分点	P 在 P_1, P_2 之间	$0 < \lambda < +\infty$
外分点	P 在线段 P_1P_2 的延长线上	$-\infty < \lambda < -1$
	P 在线段 P_2P_1 的延长线上	$-1 < \lambda < 0$
端点	P 与 P_1 重合	$\lambda = 0$
	P 与 P_2 重合	λ 不存在

3. 定比分点公式

(1) 定比分点坐标公式 若 P_1, P_2 两点坐标为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 点 $P(x, y)$ 分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 成定比 λ , $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2} (\lambda \neq -1)$,

则 P 点坐标

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{cases}$$

(2) 定比分点向量公式 O 为平面内任一点, $\overrightarrow{OP_1} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OP_2} = \mathbf{b}$, P 分 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 为定比 $\lambda (\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2})$,

如图 5-8, 则

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{1 + \lambda} \mathbf{a} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \mathbf{b}.$$

4. 中点公式

(1) 坐标公式 设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 则 P_1P_2 的中点 $P(x, y)$ 的坐标是

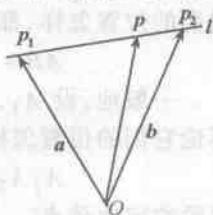


图 5-8

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{cases}$$

(2) 向量公式 在图 5-8 中, 若 P 为 P_1P_2 的中点时, 有

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

5. 三角形的重心公式

(1) 坐标公式 若 $\triangle ABC$ 的各顶点坐标分别为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, 则 $\triangle ABC$ 的重心 $G(x, y)$ 的坐标是

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \end{cases}$$

(2) 向量公式 $\triangle ABC$, O 是平面内任一点, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

6. 两点注意

(1) 点比分点公式中的实数 λ 值, 必须是起点到分点、分点到终点的有向线段的数量比(不是长度比);

(2) 起点、终点、分点可根据题目条件灵活选择, 但用定比分点公式, 必须首先确定起点、终点、分点, 不同的起点、分点对应不同的 λ 值.

§ 5.4 平面向量的数量积

向量的夹角 两个非零向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 则 $\angle AOB = \theta$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) 叫做向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角.

显然, 当 $\theta = 0$ 时, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 同向;

当 $\theta = 180^\circ$ 时, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 反向.

两向量垂直 如果 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角是 90° , 我们说 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 垂直, 记作 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. 规定零向量与任一向量垂直.

向量的数量积 已知两个非零向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 它们的夹角为 θ . 则数量 $|\mathbf{a}|$

$|a| \cdot |b| \cos \theta$ 叫做 a 与 b 的数量积(或内积,点积),物理学上常称为标量积.记作 $a \cdot b$,即

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \theta.$$

【注意】(I)两向量的数量积是个数量,而不是向量,其符号由夹角决定.

(II) $|b| \cos \theta$ 叫做向量 b 在 a 方向上的投影.当 θ 为锐角时,它是正值;当 θ 为钝角时,它是负值;当 $\theta = 90^\circ$ 时,它是 0;当 $\theta = 0^\circ$ 时,它是 $|b|$;当 $\theta = 180^\circ$ 时,它是 $-|b|$.

数量积的几何意义

数量积 $a \cdot b$ 等于 a 的长度 $|a|$ 与 b 在 a 的方向上的投影 $|b| \cos \theta$ 的乘积.

数量积的性质

设 a, b 都是非零向量, e 是单位向量, θ 是 a 与 e 的夹角,则

$$(1) e \cdot a = a \cdot e = |a| \cos \theta.$$

$$(2) a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0.$$

$$(3) \text{当 } a \text{ 与 } b \text{ 同向时, } a \cdot b = |a| \cdot |b|;$$

$$\text{当 } a \text{ 与 } b \text{ 反向时, } a \cdot b = -|a| \cdot |b|.$$

$$\text{特别地, } a \cdot a = |a|^2 \text{ 或 } |a| = \sqrt{a \cdot a}.$$

$$(a \cdot a \text{ 可以简写成 } a^2)$$

$$(4) \cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$$

$$(5) |a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|$$

数量积的运算律 已知向量 a, b, c 和实数 λ, μ , 则

$$(1) \text{交换律} \quad a \cdot b = b \cdot a;$$

$$(2) \text{结合律} \quad \lambda a \cdot b = \lambda(a \cdot b) = a \cdot (\lambda b);$$

$$(\lambda a) \cdot (\mu b) = \lambda \mu a \cdot b$$

$$(3) \text{分配律} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

【注意】对于向量 a, b, c :

$$(1) a \cdot b = b \cdot c \quad a = c;$$

$$(2) (a \cdot b)c \neq a(b \cdot c);$$

$$(3) \text{当 } a \neq 0 \text{ 时, } a \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0.$$

数量积的坐标表示 设 $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$, 则

$$(1) a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2;$$

$$(2) a^2 = |a|^2 = x_1^2 + y_1^2;$$

$$(3) |a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2};$$

$$(4) \cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}};$$

$$(5) a \perp b \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0.$$

平面内两点间的距离公式

如果表示向量 a 的有向线段的起点和终点的坐标分别为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 则

$$|a| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

三角形的中线长公式

如图 5-9, AO 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线, 则

$$\begin{aligned} |AB|^2 + |AC|^2 \\ = 2[|AO|^2 + |OC|^2]. \end{aligned}$$

平移 如果点 $P_0(x, y)$ 按向量 $a = (h, k)$ 平移至 $P'(x', y')$, 则

$$\begin{cases} x' = x + h, \\ y' = y + k. \end{cases}$$

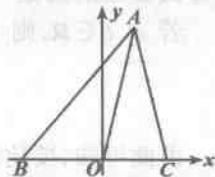


图 5-9