21世纪高等院校创新教材

概率论与数理统计学习与提高

胡端平　罗　进　主编

科学出版社
www.sciencep.com

·21 世纪高等院校创新教材·

概率论与数理统计学习与提高

胡端平　罗　进　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是与《概率论与数理统计及其应用》(第二版)配套的辅助教材，也可与其他概率统计教材配套使用．全书内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、抽样分布理论、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析、附录．各章分为内容提要、题型归类与解题方法、习题及提示三大部分．附录给出了2006~2008年全国研究生入学统一考试数学试卷中概率论与数理统计部分的试题及其解答．

本书适合“概率论与数理统计”课程的学习者和考研者阅读参考．

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习与提高/胡端平，罗进主编．—北京：科学出版社，2009

（21世纪高等院校创新教材）

ISBN 978-7-03- 023919-8

I. 概…　II. ①胡…②罗…　III. ①概率论－高等学校－教学参考资料 ②数理统计－高等学校－教学参考资料　IV. O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第004156号

责任编辑：江　兰／责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超／封面设计：苏　波

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009年2月第　一　版　开本：B5（720×1000）

2009年2月第一次印刷　印张：14 3/4

印数：1—6000　字数：289 000

定价：24.50元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

“学而时习之，不亦说乎？”本书是为正在学习或已经学过“概率论与数理统计”的工科本科生写的，旨在使他们能较深刻地掌握概率论与数理统计的基本理论、解题技巧和应用于实际问题的方法.

概率论与数理统计是工科本科生的必修课，也是工程技术、经济管理等专业研究生考试的必考科目. 随着社会和科学技术的发展，各种纷繁的随机现象和数据需要我们去收集、整理、分析，揭示它们的规律，并以此作为决策的依据. 各种随机现象和各种信息数据错综复杂的关系挑战着人类的智慧，而概率论与数理统计向我们提供了基本方法，它直接关系到工科本科生教育的教学质量和可持续发展问题.

在教学实践中，学生对学习概率论与数理统计普遍感到困难，其原因有以下几点：一是所需要的数学知识较多，例如分析学、代数学和组合论等；二是思维方式不同于传统的恒等变形、演绎推理的数学方法；三是应用的广泛性和复杂性.

在本书的编写过程中，我们充分考虑了学生学习该课程存在的问题，具有较强的针对性.

本书内容编排依照目前通行的教材进行，是学生学习该课程的有力参考书. 每章内容分为三块：内容提要、题型归类与解题方法、习题及提示. 同时，对历年考研题进行了解答. 该书信息量大，收集并解答了通行教材和辅导书上的习题.

本书第一章由胡端平编写，第二章由彭章艳编写，第三至六章由罗进编写，第七、八章由刘任河编写，全书由胡端平修改统稿.

百密必有一疏，书中错误之处，敬请不吝指教.

编　者

2008 年 9 月

目　　录

第一章　随机事件与概率

§1　内 容 提 要

1. 基本内容

1.1　随机试验

称满足以下三个条件的试验 E 为随机试验：

(1) 在相同条件下可以重复试验；

(2) 每次试验的结果不止一个，但所有的结果已知；

(3) 每次试验之前不能确定出现哪个结果.

1.2　样本空间，样本点

随机试验 E 所产生的所有结果组成的集合称为 E 的样本空间，记做 S. S 中的元素称为样本点.

1.3　随机事件

(1) 样本空间 S 的(某些)子集称为随机事件，常用 $A,B,C,\cdots$表示.

(2) S 称为必然事件.

(3) $\varnothing$称为不可能事件.

(4) $e \leftarrow S$. 称单点集$\{e\}$为基本事件.

1.4　事件之间的关系与事件的运算

(1) 包含关系. 若 A 发生必然导致 B 发生，则称 B 包含 A 或 A 含于 B，记做$A\subset B$.

(2) 相等关系. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记做 $A=B$.

(3) 事件的和. 事件 A 与 B 至少有一个发生(A 发生或 B 发生)的事件称为 A 与 B 的和或并，记做 $A\cup B$.

设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，其中至少有一个发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和或并，记做 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\triangleq\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$ 为一列随机事件，其中至少有一件发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和或并，记做$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

(4) 事件的积. 事件 A 与 B 同时发生的事件称为 A 与 B 的积或交,记做$A\cap B$.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积或交,记做 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\triangleq\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

一列事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$同时发生的事件称为这列事件的积或交,记做$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

(5) 互不相容. 对于事件 A 与 B,若 $A\cap B=\varnothing$(即 A 与 B 不可能同时发生),则称 A 与 B 互不相容或互斥.

(6) 事件的差. 事件 A 发生且事件 B 不发生的事件称为事件 A 与 B 的差,记做 $A-B$.

称 $\overline{A}\triangleq S-A$ 为事件 A 的逆事件(即 A 不发生的事件).

图 1.1 所示为事件的关系和运算的文氏图.

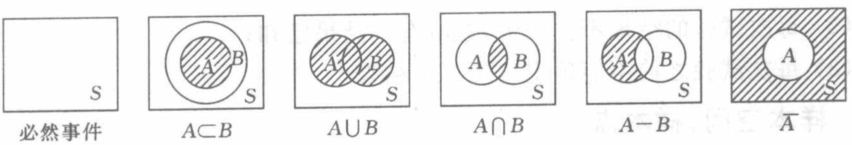

图 1.1

1.5 随机事件的算律

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A,AB=BA$(记 $A\cap B=AB$).

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$.

(3) 积对和的分配律:$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$.

和对积的分配律:$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$.

(4) $A\cup A=A,AA=A$.

(5) $\overline{\overline{A}}=A$.

(6) $A\cup\overline{A}=S,A\overline{A}=\varnothing$.

(7) $A-B=A\overline{B}$.

(8) 若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B,AB=A$.

(9) 莫根律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$,

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i,$$

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n,\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n.$$

1.6 频 率

(1) 定义. 称事件 A 在 n 次试验中出现的次数 n_A 为 A 发生的频数,称$f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率.

(2) 性质.

① $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

② $f_n(S)=1$;

③ 设事件 A,B 不相容,则 $f_n(A \cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

1.7 概　率

(1) 定义. 设 S 为样本空间,对于每一个随机事件 A 赋予一个实值 $P(A)$,如果 $P(A)$ 满足以下三个条件,则称 $P(A)$ 为 A 的概率:

① $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

② $P(S)=1$;

③ $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是一列两两互斥的随机事件,有 $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

注　由于事件 A 为 S 的子集,故 $P(A)$ 为 S 子集的函数.

(2) 性质.

① $P(\varnothing)=0$;

② $P(\bar{A})=1-P(A)$;

③ 若 $A \subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$, $P(A) \leqslant P(B)$;

④ $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,更一般地,

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_i A_j)+\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) - \cdots+(-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n);$$

⑤ $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$, $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

注　性质④称为加法公式.

1.8 古典概率

设样本空间 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$,且每个基本事件的概率相等,即 $P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})=\frac{1}{n}$,则称为古典概型,对于任何随机事件 $A \subset S$,有

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中样本函数}}{n}.$$

1.9 条件概率

(1) 定义. 设事件 A 与 B, $P(A)>0$,称

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

(2) 性质.

① $0 \leqslant P(B|A) \leqslant 1$；

② $P(S|A)=1$；

③ $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 为一列两两互斥的随机事件，有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \mid A\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n \mid A).$$

注　以上三条，说明 $P(B|A)$（在固定 A 的情况下）为概率，故有关概率的性质对条件概率也成立. 读者试着叙述并给出证明.

1.10　乘法公式

设 $P(A)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

设 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

1.11　全概率公式与贝叶斯公式

(1) 分划. 设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为两两互斥的 n 个事件，且 $S=B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$，则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 S 的一个分划或剖分. 分划可推广到 S 的可数无穷分划，即 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 为一列两两互斥的随机事件且 $S=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$，则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 为 S 的一个可数无穷的分划. S 的一个分划也称为完备组.

(2) 全概率公式. 设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个分划，$P(B_i)>0\ (1 \leqslant i \leqslant n)$，则对任一事件 A，有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i);$$

若 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 为 S 的一个分划且 $P(B_n) > 0\ (n=1,2,\cdots)$，则对任何随机事件 $A \subset S$，有

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)P(A \mid B_n).$$

(3) 贝叶斯公式. 设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是 S 的一个分划，$P(B_i) > 0\ (1 \leqslant i \leqslant n)$，则对任一事件 A，$P(A) > 0$，有

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)}.$$

设 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 是 S 的一个分划，$P(B_n) > 0\ (n=1,2,\cdots)$，则对任一事件 A，$P(A) > 0$，有

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k)P(A \mid B_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A \mid B_k)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)P(A \mid B_n)}.$$

1.12　独立性

(1) 定义. 如果 $P(AB)=P(A)P(B)$. 则称 A 与 B 相互独立.

设 A,B,C 为三个事件，如果以下三式成立，则称 A,B,C 两两独立：

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(AC)=P(A)P(C),\quad P(BC)=P(B)P(C).$$

如果以下四式成立，则称三个事件 A,B,C 相互独立：

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),\quad P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

注　n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 独立是指对任何 k $(1\leqslant k\leqslant n)$，有 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$ 成立，其中 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的任何 k 个元素的组合.

(2) 性质.

① 若 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立；

② 若 $P(A)>0$，则 A 与 B 相互独立$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$.

2. 重点与难点

重点　掌握事件的表示与算律；掌握概率的定义与性质；掌握条件概率的意义，会计算事件的条件概率，熟悉事件独立性的概念与应用；会用加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式 4 个公式；会计算基本的古典概型.

难点　利用概率的性质进行推理和计算；将实际问题用事件表示；古典概率的计算.

§2　题型归类与解题方法

1. 样本空间与随机事件

1.1　样本空间的描述

例 1.1　写出下列随机试验的样本空间：

(1) E_1 抛三枚硬币，$S_1=\{$(正正正)，(正正反)，(正反正)，(反正正)，(正反反)，(反正反)，(反反正)，(反反反)$\}$；

(2) E_2 连续抛一枚硬币，直至出现正面为止，$S_2=\{$(正)，(反正)，(反反正)，$\cdots$，(反反$\cdots$反正)，$\cdots\}$；

(3) E_3 记录一个班的一次数学考试平均成绩(百分制)，$S_3=\left\{\dfrac{i}{n}\,\middle|\, i=0,1,2,\cdots,100n\right\}$；

(4) E_4 在单位圆内任掷一点,求点的坐标,$S_4=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$(假设单位圆的圆心在原点).

评点 (1) 样本空间本质上是集合,即满足某些特性的事物的全体. 因此,样本空间的描述就是集合的描述,其描述法有枚举法与特性刻划法两种. 例如 S_1,S_2 为枚举法,S_3,S_4 为特性刻划法;

(2) 样本空间分有限空间与无穷空间;

(3) 对实验的不同理解,可能造成不同的样本空间. 如例中的 E_1 就有下面不同的理解:

1) 三枚硬币不可辨,抛三枚硬币依次将每枚硬币抛下(相当于将一枚硬币连续抛三次),这种抛法有序,则样本如 S_1,有 8 个样本点;

2) 三枚硬币不可辨,将它们一次抛下,这种抛法无序,则样本空间 $S_{12}=\{\{$正,正,正$\}$,$\{$正,正,反$\}$,$\{$正,反,反$\}$,$\{$反,反,反$\}\}$,有 4 个样本点;

(1) 属于不可辨有序.

(2) 属于不可辨无序. 还有另外两种情形,即可辨有序和可辨无序,我们只给出样本点数.

(3) 三枚硬币可辨(不妨分为红蓝黄三种),有序掷三次,样本空间为 S_{13},样本点数 48. 这是由于第一次先从三枚硬币中取一枚,有三种取法,取定后投下,有正反两种,故第一次有 6 种方案;同理第二次投掷有 4 种方案;第三次投掷有两种方案,由乘法原理,共有 $6\times4\times2=48$ 种不同的结果.

(4) 可辨无序,样本点数 8. 这是由于三个正或三个反各一种;含一个正有三种不同的正(红,蓝,黄);含两个正即含一个反有三种不同的结果,由加法原理,共有 $2+3+3=8$ 种不同的结果.

1.2 随机事件的表示

例 1.2 设 A,B,C 为三个事件,将下列事件用 A,B,C 表示:

(1) D_1:A 出现,B,C 都不出现;

(2) D_2:三事件中恰有一个发生;

(3) D_3:三事件中恰有两个发生;

(4) D_4:三事件都不发生;

(5) D_5:三事件至少有一件发生;

(6) D_6:三事件中不多于一件发生;

(7) D_7:不多于两件发生;

(8) D_8:至少两件发生;

(9) D_9:A,B 中至少一个发生,C 不发生.

解 (1) $D_1=$只有 A 发生$=A\overline{B}\overline{C}$.

(2) $D_2=$只有 A 发生或只有 B 发生或只有 C 发生$=A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$.

(3) $D_3=$只有 A,B 发生或只有 A,C 发生或只有 B,C 发生$=AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$.

(4) 方法一　$D_4=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

方法二　$\bar{D}_4=$三事件中至少发生一件$=A\cup B\cup C\Rightarrow D_4=\overline{A\cup B\cup C}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

(5) 方法一　$D_5=A\cup B\cup C$.

方法二　$\bar{D}_5=\{$三事件中无一件发生$\}=\{$三事件都不发生$\}=D_4\Rightarrow D_5=\bar{D}_4=\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$
$=\bar{\bar{A}}\cup\bar{\bar{B}}\cup\bar{\bar{C}}=A\cup B\cup C$.

(6) $D_6=\{$三事件中最多发生一件$\}=\{$三事件无一件发生$\}$或$\{$三事件恰发生一件$\}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup D_2$.

(7) 方法一　$D_7=\{$三事件中最多发生两件$\}=\{$三事件都不发生$\}$或$\{$三事件中恰发生一件$\}$或$\{$三事件中恰发生两件$\}=D_1\cup D_2\cup D_3$.

方法二　$\bar{D}_7=\{$三事件中最少发生三件$\}=\{$三事件都发生$\}=ABC\Rightarrow D=\overline{ABC}$.

(8) $D_8=\{$恰有两事件发生$\}$或$\{$三事件都发生$\}=D_3\cup D_2$.

(9) $D_9=(A\cup B)\bar{C}$.

评点　(1) 诸事件中至少或至多 k 件发生的事情往往用恰好 i 件发生的事件表示. 例如$\{n$ 件事件中至少发生 k 件$\}=A,B_i=\{n$ 件事件中恰好发生 i 件$\}$ $(0\leqslant i\leqslant n)$，则 $A=B_0\cup B_1\cup\cdots\cup B_k$；

(2) 求某随机事件 A，有时考虑它的逆事件 $\bar{A}$ 显得容易些.

1.3　事件的关系

例 1.3　指出下面事件 A 与 B 的关系：

(1) 检查两件产品，$A=\{$至少有一件不合格$\}$，$B=\{$两次检查结果不同$\}$；

(2) 设 T 表示轴承寿命，$A=\{T>5000\ \text{h}\}$，$B=\{T>8000\ \text{h}\}$.

解　方法一　(1) $B\subset A$. 这是由于 B 发生即两件产品有一件不合格$\Rightarrow A=\{$至少有一件不合格$\}$发生.

方法二　设 C_1,C_2 为这两件产品为合格的事件，则 $A=\{(C_1,\bar{C}_2),(\bar{C}_1,C_2),(\bar{C}_1,\bar{C}_2)\}$，$B=\{(C_1,\bar{C}_2),(\bar{C}_1,C_2)\}$，从而 $B\subset A$. 或 $A=C_1\bar{C}_2\cup\bar{C}_1C_2\cup\bar{C}_1\bar{C}_2=C_1\bar{C}_2\cup\bar{C}_1(C_2\cup\bar{C}_2)=C_1\bar{C}_2\cup\bar{C}_1$，$B=C_1\bar{C}_2\cup\bar{C}_1C_2$，由于 $\bar{C}_1C_2\subset\bar{C}_1$，故 $B\subset A$.

(2) $B\subset A$. 这是由于当轴承寿命 $T>8000$ h 时，则必然有 $T>5000$ h，即 B 发生导致 A 发生.

例 1.4　证明：(1) $AB\subset A(B)$；

(2) 若 $A\subset B$，则 $AB=A$.

证　(1) 方法一　AB 发生$\Rightarrow A,B$ 同时发生$\Rightarrow A$ 发生，即 $AB\subset A$.

方法二(按集合的包含关系证明)　$\forall x\in A,B\Rightarrow x\in A,x\in B\Rightarrow x\in A$，从而 $AB\subset A$.

(2) 方法一　由(1)知 $AB\subset A$,下证当 $A\subset B$ 时,$A\subset AB$. 若 A 发生导致 B 发生$\Rightarrow A,B$ 同时发生,即 $A\subset AB$.

方法二　由 $A\subset B$,有 $\forall x\in A\Rightarrow x\in B\Rightarrow x\in AB$,即 $A\subset AB$.

例 1.5　证明:$A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup AB$.

证　方法一　$A\cup B$ 发生即 A 或 B 发生,则必导致下列三事件之一发生:A 发生 B 不发生,B 发生 A 不发生,A 与 B 同时发生,即 $A-B,B-A,AB$. 从而 $A\cup B\subset(A-B)\cup(B-A)\cup AB$.

反之,若 $A-B$ 发生即 A 发生 B 不发生$\Rightarrow A$ 发生,有 $A-B\subset A$,同理 $B-A\subset B$. 同时,$AB\subset A$,故$(A-B)\cup(B-A)\cup AB\subset A\cup B$.

方法二　用集合的方法证明. $\forall x\in A\cup B$,即 $x\in A$ 或 $x\in B$,当 $x\in A$ 时,而 $A=(A-B)\cup AB\Rightarrow x\in(A-B)\cup AB$;同理,当 $x\in B$ 时,$x\in(B-A)\cup AB$,从而

$$A\cup B\subset(A-B)\cup AB\cup(B-A)\cup AB=(A-B)\cup(B-A)\cup AB.$$

反之,

$$A-B\subset A,B-A\subset B,AB\subset A\Rightarrow(A-B)\cup(B-A)\cup AB\subset A\cup B.$$

方法三　利用事件或集合的运算性质.

$$\begin{aligned}\text{等式右边}&=A\bar{B}\cup B\bar{A}\cup AB=A\bar{B}\cup B\bar{A}\cup AB\cup AB\\&=(A\bar{B}\cup AB)\cup(B\bar{A}\cup AB)=A(\bar{B}\cup B)\cup(\bar{A}\cup A)B\\&=A\cup B=\text{左边}.\end{aligned}$$

评点　事件的关系有包含、相等、互斥、互逆 4 种. 讨论或证明时,一般有三种方法:用事件关系与运算的定义;用集合关系与运算的定义;用事件或集合的运算性质.

2. 概率的定义与性质

2.1　概率的计算

例 1.6　设 $P(A)=0.4,P(A\cup B)=0.7$.

(1) 若 A 与 B 互斥,则 $P(B)=$__________;

(2) 若 A 与 B 独立,则 $P(B)=$__________.

解　由于 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

(1) 由 $AB=\varnothing$ 有 $0.7=0.4+P(B)\Rightarrow P(B)=0.3$.

(2) 由 $P(AB)=P(A)P(B)$有

$$\begin{aligned}0.7&=0.4+P(B)-P(A)P(B)=0.4+P(B)-0.4P(B)\\&=0.4+0.6P(B)\Rightarrow P(B)=0.5.\end{aligned}$$

例 1.7　设 A,B,C 三事件满足 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=P(BC)=0$,

$P(AC)=\dfrac{1}{8}$,求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

解　A,B,C 至少有一个发生为事件 $A\cup B\cup C$.

$$P(A\cup B\cup C)=(P(A)+P(B)+P(C))-(P(AB)+P(AC)+P(BC))+P(ABC)$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}+P(ABC)=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.$$

这是由 $ABC\subset AB$ 有 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$.

例 1.8　设 A,B 两事件 $P(A)=0.6,P(B)=0.7$. 问:

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取最大值,最大值是多少?

(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取最小值,最小值是多少?

解　(1) 由 $P(AB)\leqslant\min(P(A),P(B))=0.6$,故当 $P(AB)=P(A)$ 时,$P(AB)$ 取最大值 0.6.

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=1.3-P(AB)\leqslant 1$,故当 $P(A\cup B)=1$ 时,$P(AB)$ 取最小值 0.3.

例 1.9　设 $P(A)=\dfrac{1}{3},P(B)=\dfrac{1}{2}$,当(1)$A$ 与 B 互斥;(2)$A\subset B$;(3)$P(AB)=\dfrac{1}{6}$时,求 $P(B\overline{A})$.

解　由于

$$P(B\overline{A})=P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB).$$

(1) 由 $AB=\varnothing$,有

$$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=P(B)=\frac{1}{2}.$$

(2) 由 $A\subset B$,则 $AB=A$,有 $P(AB)=P(A)$. 于是

$$P(B\overline{A})=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

(3) 由 $P(AB)=\dfrac{1}{6}$,有

$$P(B\overline{A})=P(B)-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

评点　等式 $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$ 很重要. 主要是将 $A-B$ 转化为包含差 $A-AB$.

2.2　证明不等式或等式

例 1.10　证明:(1) $P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$;

(2) $P(A_1A_2\cdots A_n)\geqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)-(n-1)$.

证　(1) $1\geqslant P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\Rightarrow P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

(2) 归纳法. 当 $n=2$ 时,由(1)知不等式成立. 归纳假设 $n=k$ 时不等式成立,

$$P(A_1\cdots A_k)\geqslant P(A_1)+\cdots+P(A_k)-(k-1),$$

当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}P(A_1+\cdots A_kA_{k+1})&\geqslant P(A_1A_2\cdots A_k)+P(A_{k+1})-1\\&\geqslant(P(A_1)+\cdots+P(A_k)-(k-1))+P(A_{k+1})-1\\&=P(A_1)+\cdots+P(A_{k+1})-((k+1)-1),\end{aligned}$$

由归纳法证毕.

例 1.11 设 A,B 为两随机事件，证明：

$$P(AB)=1-P(\bar{A})-P(\bar{B})+P(\bar{A}\bar{B}).$$

证 右 $=P(A)-(1-P(B))+P(\overline{A\cup B})=P(A)+P(B)-1+1-P(A\cup B)$

$=P(A)+P(B)-(P(A)+P(B)-P(AB))=P(AB)=$ 左.

注 这里用到 $P(\bar{A})=1-P(A)$ 和 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$.

3. 古典概率

3.1 盒中取球或抽签模型

例 1.12 盒中有 a 只白球，b 只黑球，从中取 m 只，求恰有 c 只白球的概率.

解 (1) 不返回抽样. 从 $a+b$ 个球中取 m 个球，有 C_{a+b}^m 种取法.

设 $A=\{m$ 个球中恰有 c 只白球$\}=\{$恰有 $m-c$ 只黑球且恰有 c 只白球$\}$，先从 a 只白球中取 c 只，有 C_a^c 种取法，再从 b 只黑球中取 $m-c$ 只，有 C_b^{m-c} 种取法，由乘法原理知 A 含的样本点数为 $C_a^cC_b^{m-c}$，故

$$P(A)=\frac{C_a^cC_b^{m-c}}{C_{a+b}^m}.$$

(2) 有返回抽样. 即每次取一只球记下颜色后放入盒中再取下一只，直到 m 次结束. 每次有 $a+b$ 种取法. 共进行 m 次，故样本空间的点数 $n=(a+b)^m$.

下面计算 A 中含样本点数，先从 a 只白球中取 c 只，有 a^c 种取法，再从 b 只黑球中取 $m-c$ 只，有 b^{m-c} 种，故 A 含样本点的数目为 a^cb^{m-c}. 从而

$$P(A)=\frac{a^cb^{m-c}}{(a+b)^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^c\left(\frac{b}{a+b}\right)^m.$$

评点 (1) 该题往往是在(1)的情况下给出解答.

(2) 白球，黑球可以代表产品中合格与不合格产品.

推广 盒中有第 i 种颜色的球 n_i 只 $(1\leqslant i\leqslant k,n=n_1+n_2+\cdots+n_k)$，从中取 m 只球，求恰有第 i 种颜色的有 m_i 只 $(1\leqslant i\leqslant k)$的概率.

从 n 只球中取 m 只，有 C_n^m 种. A 为满足条件取出方案的集合，下面求 A 含的样本点数. 分别从第 i 种颜色的球中取 m_i 只，有 $C_{n_i}^{m_i}$ 种取法 $(i=1,2,\cdots,k)$，由乘法原理知，所有的取法有 $C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}\cdots C_{n_k}^{m_k}$ 种方法，故

$$P(A)=\frac{C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}\cdots C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m}.$$

其中，$m=m_1+\cdots+m_k$；$n=n_1+\cdots+n_k$.

例 1.13　40 件产品中，有 10 件次品，其余为正品. 从中任取 5 件，求至少有 4 件次品的概率.

解　A_k 为所取产品中恰有 k 件次品的事件，$k=0,1,2,3,4$. 由上例知

$$P(A_k)=\frac{C_{10}^kC_{30}^{5-k}}{C_{40}^5},$$

所求概率

$$\begin{aligned}P&=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)\\&=\frac{1}{C_{40}^5}(C_{10}^0C_{30}^5+C_{10}^1C_{30}^4+C_{10}^2C_{30}^3+C_{10}^3C_{30}^2+C_{10}^4C_{30}^1).\end{aligned}$$

评点　在求某事件至少(至多)发生 m 次的概率，往往先求恰好发生 k 次的概率 $P(A_k)$ $(0\leqslant k\leqslant m)$，再求 $P_m=\sum\limits_{k=0}^{m}P(A_k)$.

例 1.14　盒中有 n 只签，有 r 只中奖的签，有 $m(\leqslant n)$ 个人依次从盒中抽签(每人一签)，求第 k 个人抽到中奖签的概率.

解　(1) 无放回抽样. m 个人依次抽一签相当于从 n 个元素中取 m 个的一个排列，有 $P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$ 种. $A_k=\{$第 k 个人抽到中奖签$\}$. 先将 r 只中奖签中取一只给第 k 个人，有 r 种. 剩下的 $m-1$ 个人依次从 $n-1$ 只签中抽取，有 P_{n-1}^{m-1} 种取法，从而 A_k 的样本点数为 rP_{n-1}^{m-1} 种. 故

$$P(A_k)=\frac{rP_{n-1}^{m-1}}{P_n^m}=\frac{r}{n}\quad(1\leqslant k\leqslant m).$$

此概率与 k 无关，说明抽签是公平的.

(2) 有放回抽样. 第 1 个人有 n 种取法，第 2 个有 n 种取法，…，第 m 个人有 n 种取法，从而总共有 n^m 种取法.

A_k 如(1). 先从 r 只中奖签中取一只给第 k 个人后放回，有 r 种取法，剩下 $m-1$个人从 n 只签中有放回抽取有 n^{m-1} 种，从而 A_k 的样本点数为 rn^{m-1}，故

$$P(A_k)=\frac{rn^{m-1}}{n^m}=\frac{r}{n}.$$

推广　n 只签中有一等奖 r_1 个，二等奖 r_2 个，三等奖 r_3 个. m 个人依次从中抽签. 同理，第 k 个人抽到 i 等奖的概率为$\frac{r_i}{n}$ $(i=1,2,3)$.

3.2　分球入盒

例 1.15　将 n 只球分入 N $(N\geqslant n)$只盒中，每只球的等概率$\frac{1}{N}$被分到每只盒