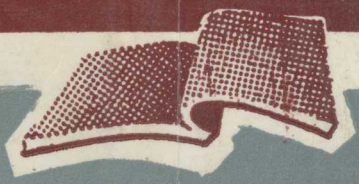
高等数学教案选编

陈连昌　编著



大连理工大学出版社

高等数学教案选编

陈连昌 编著

大连理工大学出版社

[辽] 新登字 16 号

高等数学教案选编

Gaodeng Shuxue Jiaoan Xuanbian

陈连昌 编著

大连理工大学出版社出版发行 (邮政编码: 116024)

安达市印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 6 1/8 字数: 130千字

1992 年 7 月第 1 版 1992 年 7 月第 1 次印刷

印数: 1— 2000 册

责任编辑: 张亚军 封面设计: 姜玉坤

责任校对: 单建兰

ISBN 7-5611-0658-0/O·94 定价: 3.10 元

写在前面

笔者所在的单位历来十分重视教学，最近要求笔者编写部分教案，以供教师，主要是供青年教师作参考，笔者在接受任务时，深感力不从心，完成任务时，更是不胜惶恐。

教师的教案，大体上应该相当于拍电影的“脚本”。拍电影笔者是外行，但是却可以想象脚本的重要性。当然，有些教师讲课时可能不用教案，直接看看教材甚至不看教材即可登台讲课。笔者也有过这样的经历，甚至认为有时的即兴讲课会迸发出更多的火花。但是作为工科院校象高等数学这样的基础课，讲课之前总该有个腹稿，或者说总该有个“脚本”。任何一个负责的教师，都应该通过教案的编写，精心设计、精心组织课堂教学。如果说，教材是知识的系统，那么讲课就既有要传授的知识，又要有一定的“表演艺术”。因此，教案应该体现教学内容和教学方法两个方面，它是从教材到登台讲课的桥梁。

教材的版本已是不少，但却未见任何一本教案出版。这可能是人们认为多此一举，也可能是由于教案在地位上的重要性、内容上的深刻性、应用上的灵活性和风格上的多样性，使人望而却步。诚然，在自己的教书生涯中，不能说一无所得，但是自己居然敢于鼓起勇气编写这本教案，一是要感谢领导的鞭策和同事们的帮助，二是笔者也想抛砖引玉，打破这种僵局。

教案这种东西，是因人而异的。比如，排球场上，打了一个

好球，运动员相互拍手，雀跃称快；足球场上，进了一个球，球员彼此拥抱，甚至发疯一样地滚在地上，确是风格各异。教案也是如此，不同的教师编写的教案，在风格上，乃至具体的形式上不应强求一律，应该各展所长，各领千秋。笔者在这里仅仅是提供一种模式，一种对于笔者个人适用的教案模式。

教材是教案的基础，教案应重点体现对教材内容的理解。笔者在每节教案的开头，多用引言给出问题的数学或实际背景，有的还给出必要的预备知识，保证顺利、自然地过渡到新的教学内容。教案中对主要内容的叙述，力求思路明确，重点突出，体现理论性、方法性，注意对学生思维能力的培养，由于篇幅或其它原因，不便于在教材中叙述，而又在讲课中需要向学生交待清楚或者需要重点强调的问题，在教案中多用注解的形式给出。有些注解的条款，对于前述内容具有补充或说明的意义；还有些注解的条款，则具有内容升华、画龙点睛的作用等等。笔者在这方面的写法上也是颇费苦心的。由于教材上的例题的选择已几经推敲，笔者基本上没有什么新的花样，因此在编写时大部分略去，只在有些地方作了必要的提示。在编写教案的过程中，还力求体现板书设计。板书在讲课中具有重要的作用，应该繁简适当。教材是书面语言，讲课在一定程度上又是“口头艺术”，因此，教案中的字句，有时难免失去教材中语言的准确性，但是它又写在纸上，就不免要多费些笔墨。

笔者编写这套教案的基本思想，是旨在强调培养学生独立分析与解决问题的能力。因此，用较多篇幅说明概念如何引进，论证如何分析，解题如何入手等等。希望通过教案介绍各种教学方法与技巧的运用。如主题转换的时机，抽象升华的节

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.

奏，正面解释与反面衬托，有关知识的预先铺垫，螺旋式的巩固加深，几何直观的借用，易混概念的区别与相近概念的类比等等。

这本教案是根据同济大学所编的高等数学教材而选写的，具体章节的选择，有的是随手拈来，有的则是笔者的偏爱。从总体上讲，多是偏重基本概念，基本理论。笔者一向认为，掌握基本知识，深入理解基本内容，就具备了求解问题的基本能力，有了这个基础，遇到什么问题都可"兵来将挡，水来土屯"。当然，这不是说偏于计算、应用的内容不重要，应用或计算本身就有加深理解内容和实际应用的重要价值，不过这不是本书编写的侧重点而已。

笔者东涂西抹，忽忽近50年。虽然教书无多，却还是深爱讲课这一行当。然而终是水平所限，奉献给同行读者的这本教案，必然漏洞百出，亟盼各位批评指正。

最后，笔者在此谨对张少南付院长的鼓励和段克东、莫经伦二同志的帮助表示诚挚的谢意。

笔者谨识

1992年2月

目　录

§1　绪　论　课 …… (1)
第一章　函数与极限 …… (2)
§2. 函数 …… (2)
§3. 数列的极限 …… (4)
§4. 函数的极限 …… (9)
§5. 无穷小与无穷大 …… (13)
§6. 函数的连续性与间断点 …… (14)
第二章　导数与微分 …… (19)
§7. 导数的概念 …… (19)
§8. 微分的定义 …… (23)
第三章　中值定理与导数的应用 …… (26)
§9. 中值定理 …… (26)
§10. 函数的极值及其求法 …… (33)
第四章　不定积分 …… (37)
§11. 不定积分的概念与性质 …… (37)
第五章　定　积　分 …… (41)
§12. 定积分概念 …… (41)
§13. 微积分基本公式 …… (47)
第六章　定积分的应用 …… (50)

§14. 定积分的元素法…… (50)
第七章　空间解析几何与向量代数 …… (53)
§15. 平面及其方程…… (53)
§16. 空间直线及其方程…… (58)
第八章　多元函数微分法及其应用 …… (66)
§17. 多元函数的基本概念…… (66)
§18. 偏导数…… (75)
§19. 全微分的定义…… (79)
§20. 隐函数的求导公式…… (84)
§21. 方向导数与梯度…… (90)
§22. 多元函数的极值及最大值、最小值 …… (97)
§23. 条件极值、拉格朗日乘数法…… (103)
第九章　重　积　分 …… (108)
§24. 二重积分的概念与性质 …… (108)
§25. 利用直角坐标计算二重积分 …… (112)
第十章　曲线积分与曲面积分…… (116)
§26. 对弧长的曲线积分 …… (116)
§27. 对坐标的曲线积分 …… (122)
§28. 格林公式 …… (133)
§29. 平面上曲线积分与路径无关的条件 …… (138)
§30. 二元函数的全微分求积 …… (141)
第十一章　无穷级数…… (145)
§31. 常数项级数的概念与性质 …… (145)
§32. 幂级数 …… (151)
第十二章　微分方程 …… (162)
§33. 微分方程的基本概念 …… (162)

§34. 可分离变量的微分方程 …… (165)
§35. 齐次方程 …… (170)
§36. 一阶线性微分方程 …… (173)
§37. 线性微分方程的解的结构 …… (176)
§38. 二阶常系数齐次线性微分方程 …… (181)

§1. 绪 论 课

1. 学习目的：

(1)数学本身发展的需要

初等数学——高等数学

(2)实际需要：许多工程技术问题的解决需要新的数学工具

(3)培养学生分析问题和解决问题能力的需要

(4)后继课程的需要

2. 高等数学明义　18世纪产生的微积分和解析几何是现代数学形成和发展的基础；

为高等数学课程的基本内容；

本课程应称之为高等数学基础.

注　①相对于初等数学的高等数学并非仅如本课程内容.

②现代数学颇多分支，内容颇为深奥.

3. 高等数学的研究对象：

初等数学　常量、数和代数式；

高等数学　变量和函数.

4. 高等数学的研究内容

初等数学　数或代数式的＋、－、×、÷……等运算

高等数学　函数的连续、微分、积分等运算

5. 高等数学的学习提示

常量→变量，形式逻辑→辩证逻辑

进度快. 听课、作题、自学中应注意的问题.

第一章　函数和极限

高等数学主要研究函数的微分、积分.

微分、积分是用极限定义的.因此,先介绍一下函数和极限.

§2. 函　　数

函数实质上是变量之间的对应,而变量又是在一定范围内变化的,即在某一集合内变化.

1. 集合的一般知识

(1)概念　具有某种特定性质的对象(一般记作 a,称为元素)的全体(可记作 M).

注　①集合是数学的一个最基本的概念,上述"定义"是描述性的.

②对任一元素 a,或 $a \in M$,或 $a \overline{\in} M$.

(2)集合的给定　i)列举:$A = \{1,2,3\}$

$$B = \{1,3,5,\cdots\}$$

ii)给出集合元素的充要条件:

$$B = \{x \mid x \text{是奇数}\}$$

(3)**例** 1　平面直角坐标系中的单位圆

$$M = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1, x, y \text{为实数}\}$$

例 2　数集　$\mathcal{N} = \{n \mid n \text{为自然数}\}$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.

$\mathscr{Z}=\{z \mid z$为整数$\}$

$\mathscr{Q}=\{x \mid x$为有理数$\}$

$\mathscr{R}=\{y \mid y$为实数$\}$

(4)子集　$A \subset B$,A的元都是B的元

集合的相等　若$A \subset B$且$B \subset A$,则称$A=B$

(即A,B的元素完全一致)

空集　不含任何元素的集,记为$\varnothing$

如$\varnothing=\{x \mid x^2+1=0, x \in R\}$

空集是任意集合的子集.

2. 数轴上的子集:

(1)数轴——实数集,记为$(-\infty,+\infty)$

注:数轴是有原点、方向、单位长度的直线,它建立了实数与数轴上的点的1—1对应关系.

(2)区间:开区间:$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$

闭区间:$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

半开(闭)区间:$[a,b)$,$(a,b]$

(3)有限区间:(a,b),$[a,b]$,$[a,b)$,$(a,b]$

无限区间:$[a,+\infty)$,$(a,+\infty)$

$(-\infty,b]$,$(-\infty,b)$

$(-\infty,+\infty)$

(4)邻域:设$a \in R$,$\delta>0$,称$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$为点$a$的$\delta$邻域

a:中心;δ:半径.

几何解释:$U(a,\delta)$表点a为中心,长度为2δ的开区间.

注:由$|x-a|<\delta$得$-\delta<x-a<\delta$

即$a-\delta<x<a+\delta$

去心邻域：$U(\hat{a},\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$

注 $|x-a|>0$ 表示 $x\neq a$.

下略

注 ①讲述数轴上的子集时，应作图给以几何表示；

②本节内容，学生并不陌生，宜从简.

§3. 数列的极限

1. 数列的概念

(1)**定义**：一列有次序的数(按某一法则)

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

项：数列中的每一个数

一般项：第 n 项 x_n

(2)例 $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

$2,1,8,\cdots,2^n,\cdots$

$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$

$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$

$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$

(3)几何表示：数列 x_n 可看作数轴上的一个动点

(4)$x_n=f(n)$，数列 x_n 可看作是自变量为正整数的函数

注 数列与函数不同在于 $x_n=f(n)$ 的有次序.

(5) 观察：前述例中

有的数列无限接近某一个常数

有的数列则不然.

2. 数列的极限的“通俗说法”

数列 x_n 当 n 无限增大($n \to \infty$)时，无限接近某一个数值 a，则称数值 a 为数列 x_n 的极限

(1)x_n 接近 a：可用 x_n 与 a 的距离，即 $|x_n - a|$ 刻划 x_n 接近 a 的程度

(2)x_n“无限”接近于 a：即 $|x_n - a|$ 可任意小

如果用一个固定的很小的正数，例如 $\frac{1}{10^{10}}$，

即 $|x_n - a| < \frac{1}{10^{10}}$ 来描述

仍不能刻划 x_n“无限”接近 a

那么用任意给定的正数 ε(不论多么小 —— 可以设想它越来越小.

当 n 增大到一定程度后($n > N$)

总有 $|x_n - a| < \varepsilon$

(3) $n > N$：用此限定数列变化的总趋势.

3. 数列的极限的定义

如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小，总存在正整数 N，使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n，不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立，那么就称常数 a 是数列 x_n 的极限，或者称数列 x_n 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

或

$$x_n \to a \quad (n \to \infty)$$

如果数列没有极限，则称数列是发散的.

注 ① ε 的任意性意味着无限接近；

②$N = N(\varepsilon)$

4. 数列的极限的几何解释：

点列 x_n 凝聚在点 a(附近)，即

对任意的开区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，$\exists N$，使当 $n > N$ 时，

$$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

5. **例 1** 证明数列

$$2, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$$

的极限是 1.

证 $\forall \varepsilon > 0$，要使

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$，

因此，取正整数 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n > N$ 时

恒有

$$\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1$

例 2 证明数列 $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ 的极限是 0.

证 $\forall \varepsilon > 0$，要使

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

只要 $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$ 或 $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

因此，取正整数 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$，则当 $n > N$ 时，恒

有

$$\left|\frac{(-1)^n}{n+1}-0\right|<\varepsilon$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=0.$$

例 3 设 $|q|<1$，证明等比数列

$$1,q,q^2,\cdots,q^{n-1},\cdots$$

的极限是 0.

证：略.

注 ①重要的是，$\forall\ \varepsilon>0$，找出相应的 N，即存在定义中的 N.

② 相应于 ε 的 N，不唯一，如例 2，也可取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 等.

6. 有界数列：对于数列 x_n，如果存在正数 M，使得对一切 x_n，都有

$$|x_n|\leqslant M$$

则称 x_n 是有界的，

如果不存在这样的 M，则称 x_n 是无界的.

$x_n=\frac{n}{n+1}$ 是有界的，可取 $M=1$

$x_n=2^n$ 是无界的，因 $n\to\infty$ 时，$2^n\to+\infty$.

无定义中的 M 存在.

7. 收敛数列的性质

(1)有界性：

定理 如果 x_n 收敛，则 x_n 一定有界.

证 设 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$，对 $\varepsilon=1$，$\exists\ N$，使当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n - a| < 1$$

即当 $n > N$ 时，

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leqslant |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

取 $M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|, 1 + |a|\}$，

则 $\forall\, x_n, |x_n| \leqslant M$

即 x_n 有界.

注 数列 收敛 $\rightarrow$ 有界

有界 未必 收敛

如 $x_n = (-1)^{n+1}$，有界而不收敛

(2)极限的唯一性

定理 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$

则 $a = b$

证 用反证法，若不然，$a \neq b$，不妨设 $a < b$，

取 $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$，

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\exists$ $_1$，使当 $n > N_1$ 时，恒有

$$|x_n - a| < \frac{b-a}{2}, \text{得 } x_n < \frac{a+b}{2}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$，$\exists$ N_2，使当 $n > N_2$ 时，恒有

$$|x_n - b| < \frac{b-a}{2}, \text{得 } x_n > \frac{a+b}{2}$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，

既 $x_n < \dfrac{a+b}{2}$，又 $x_n > \dfrac{a+b}{2}$

这矛盾证明了本定理.

注 ①讲授本节，要充分体现变量的观点.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.