普通高等教育"十一五"国家级规划教材

大学数学 微积分

（下册）

上海交通大学数学系
微积分课程组 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

ISBN 978-7-04-024864-7

9 787040 248647 >

定价 22.30元

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

大学数学
微 积 分

（下册）

上海交通大学数学系
微积分课程组 编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材"大学数学"系列教材之一，是在上海交通大学高等数学课程多年教学实践的基础上编写而成。

本书注重微积分的思想和方法，重视概念和理论的阐述与分析。结合教材内容，适当介绍一些历史知识，指出微积分发展的背景和线索，以提高读者对微积分的兴趣和了解。重视各种数学方法的运用和解析，如分析和综合法、类比法、特殊到一般法、数形结合法等等。探索在微积分中适度渗入一些现代数学的思想和方法。

本书内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数的微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、级数等5章。在内容的安排和阐述上力求朴素明了，深入浅出。例题精心选择，类型丰富，由易到难，解法中融入各种数学基本方法且加以点评，有助于使读者领会和掌握各种数学思维方法，也有利于读者自学。同时配以丰富的习题，易难结合，帮助读者通过练习巩固和加深对于微积分知识和方法的理解。

本书适用于高等学校理工类各专业，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

大学数学．微积分．下册／上海交通大学数学系微积分课程组编．—北京：高等教育出版社，2008.12
ISBN 978-7-04-024864-7

Ⅰ．大…　Ⅱ．上…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材　Ⅳ．O13　O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第170253号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	北京东光印刷厂		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008年12月第1版
印　　张	19.25	印　　次	2008年12月第1次印刷
字　　数	360 000	定　　价	22.30元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　24864-00

目　录

第7章　向量代数与空间解析几何

前面各章我们介绍的是一元函数的微积分，涉及的是单个自变量的函数．一元微积分的方法也可用于讨论多元函数，多元函数的自变量是多元数组或者称为向量．为此我们介绍向量代数与空间解析几何，其方法和内容将有助于多元微积分内容的展开．

本章将讨论向量的概念、运算及相应的几何意义，进而讨论空间直角坐标系下的平面、直线的方程以及它们的位置关系，另外介绍曲面和曲线方程，包括典型的二次曲面及其标准方程．

7.1　空间直角坐标系

在空间中选定一点 O 作为**原点**，过点 O 作三条两两垂直的数轴，分别标为 x 轴、y 轴、z 轴，通常把 x 轴和 y 轴置于水平面上，而让 z 轴取铅直向上方向，这样就构成了**空间直角坐标系**（见图 7.1）．x 轴、y 轴、z 轴分别称为横轴、纵轴、竖轴，统称为**坐标轴**．

我们规定坐标轴的正向依 x、y、z 的次序符合右手法则．所谓右手法则指的是：伸平右手，使大拇指与其他四指垂直，当四指从 x 轴的正向转到指向 y 轴正向（转动角度在 $0\sim\pi$ 之间）时，大拇指的指向是 z 轴的正向，如图 7.2 所示．在图 7.1 中，坐标轴的标号和指向可以改变，例如将 x,y,z，依次改为 z,x,y，只要依 x、y、z 的次序符合右手法则即可．

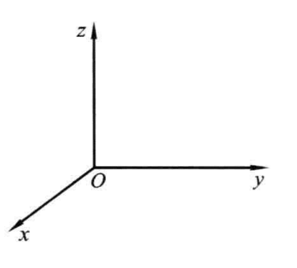


图 7.1

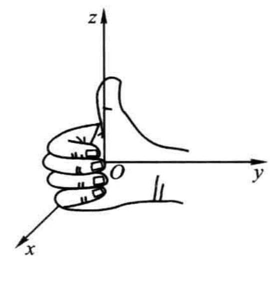


图 7.2

由任意两条坐标轴所确定的平面称为**坐标平面**. 三个坐标轴确定了三个坐标平面,包含 x 轴及 y 轴的坐标平面称为 xOy 坐标面,另外两个是 yOz 坐标面及 zOx 坐标面. 在上面建立的坐标系中,坐标轴、坐标平面都是两两垂直的,所以我们称它为三维空间直角坐标系.

三个坐标平面把空间分成八个部分,每一部分叫做一个**卦限**. xOy 坐标面上方和下方各有四个卦限,我们把 xOy 面上的第1,2,3,4象限上方的四个卦限依次称为第1,2,3,4卦限,而下方的四个卦限依次称为第5,6,7,8卦限.

设 M 为空间一已知点. 过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴,它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P、Q、R(图7.3),这三个点在 x 轴、y 轴、z 轴的坐标依次为 x,y,z. 于是空间一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z);反过来,给定一个有序数组 (x,y,z),我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P,在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q,在 z 轴上取坐标为 z 的点 R,然后通过 P、Q 与 R 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面,这三个平面的交点 M 便是由有序数组 (x,y,z) 所确定的唯一点. 这样,就建立了空间的点 M 和有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系,即为

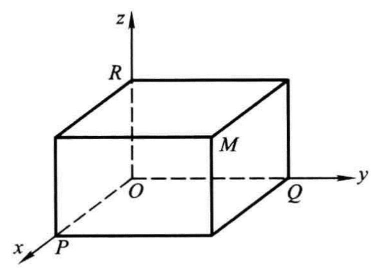


图7.3

$$点\ M \longleftrightarrow (x,y,z).$$

这组数 x,y,z 就叫做点 M 的坐标,并依次称 x,y 和 z 为点 M 的横坐标,纵坐标和竖坐标. 坐标为 x,y,z 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$.

对于空间中两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,我们定义它们的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

不难看出这个定义与我们通常理解的距离是完全一致的. 这样建立了空间直角坐标系的空间就成为具有度量(距离)的几何空间,记为 $\mathbf{R}^3$.

例7.1　求点 $M(1,-2,3)$ 关于点 $P(-1,4,1)$ 的对称点 N.

解　设点 N 的坐标为 (x,y,z),根据点与坐标的关系可知,M,P,N 的横坐标是过它们而垂直于 x 轴的平面与 x 轴的交点 M_x,P_x,N_x 的坐标,由 P 是线段 MN 的中点可知 P_x 是线段 M_xN_x 的中点,同理 M,P,N 的纵坐标和竖坐标也有这样的结论,于是

$$\frac{x+1}{2}=-1,\frac{y-2}{2}=4,\frac{z+3}{2}=1,$$

解得:$x=-3,y=10,z=-1$,从而得到点 $N(-3,10,-1)$.

7.2 向量及其线性运算

7.2.1 向量的概念

在中学物理学中我们就知道,有些物理量仅由数值大小来度量,例如时间,距离,质量和温度等,称之为**数量**或**标量**;而另一些物理量不仅有大小而且有方向,例如力、速度和加速度等,称之为**向量**或**矢量**.

为区别于数量,通常用粗体字母或带箭头的字母表示向量,例如 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{i}$, $\vec{F}$ 等.

由于向量有大小和方向两个要素,而具备这两个要素的最简单的几何图形是有向线段,因此我们用有向线段来表示向量. 如果向量$\boldsymbol{v}$ 用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示,其长度表示向量$\boldsymbol{v}$ 的大小,称为向量$\boldsymbol{v}$ 的**模**,记为 $|\boldsymbol{v}|$,A 到 B 的指向表示向量$\boldsymbol{v}$ 的方向,那么我们称 $\overrightarrow{AB}$ 为$\boldsymbol{v}$ 的一个**几何表示**(如图 7.4).

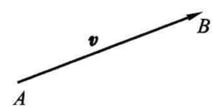


图 7.4

我们规定长度是零的向量为**零向量**,记为 $\mathbf{0}$ 或$\vec{0}$. 零向量的方向规定为任意的,即可根据情况任意指定.

显然,两条有向线段,只要它们长度相等,指向相同,即使处在不同位置,它们仍然表示相同的向量. 也就是说,虽然向量的几何表示不唯一,但起点不同而大小、指向均相同的有向线段都表示同一个向量. 因此我们讨论的向量被称为**自由向量**,它具有**平移不变性**.

从而我们规定:

如果两个向量大小相等,方向相同,则称这两个向量**相等**.

也基于此,为方便起见,我们有时不把有向线段和它表示的向量做严格区分,而常把有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 也称为向量 $\overrightarrow{AB}$,A 叫做向量的**起点**,B 叫做向量的**终点**.

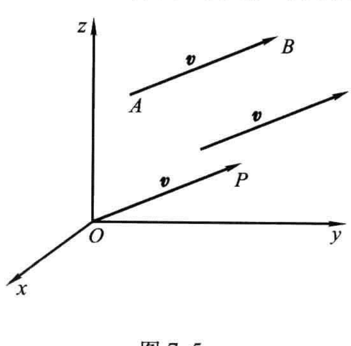


图 7.5

我们考察建立了空间直角坐标系的三维空间中的向量$\boldsymbol{v}$,它可以表示为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 或者与其大小、指向均相同的其他有向线段,它们均表示向量$\boldsymbol{v}$,但其中仅有一个有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 起点在原点 O(如图 7.5). 这样,向量$\boldsymbol{v}$ 就唯一地对应了一个起点在原点的有向

线段 $\overrightarrow{OP}$，而 $\overrightarrow{OP}$ 又可以唯一对应于其终点 P. 由于点 P 与其坐标的一一对应，这意味着向量 $\boldsymbol{v}$ 可以与三维有序数组建立起一一对应：

$$\text{向量}\boldsymbol{v} \quad \longleftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} \quad \longleftrightarrow \quad P\text{点} \quad \longleftrightarrow \quad P\text{点坐标}$$

由此，我们给出下面的向量定义.

定义 7.1　一个三元有序实数组 (a,b,c) 称为一个**三维向量**；全体三维向量的集合记作 V_3. 而一个二元有序实数组 (a,b) 称为一个**二维向量**；全体二维向量的集合记作 V_2，其中实数 a,b,c 称为向量的**分量**，也称为向量的**坐标**.

由定义 7.1 的引进可知，向量 $\boldsymbol{v}$ 通过表示它的起点在原点的有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的终点坐标 (a,b,c) 唯一确定，故可记为

$$v=(a,b,c).$$

反过来点 P 也可以通过向量 $\boldsymbol{v}$ 的坐标来唯一确定，故向量 $\boldsymbol{v}=(a,b,c)$ 称为点 $P(a,\ b,c)$ 的**定位向量**.

给定向量 $\boldsymbol{v}=(a,b,c)$，因为它是点 $P(a,b,c)$ 的定位向量，所以向量 $\boldsymbol{v}$ 的模为

$$|\boldsymbol{v}|=|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

二维向量的情形是类似的.

注意向量的坐标与点的坐标表示形式均为三元数组，在叙述时有时需作必要的说明以避免混淆.

三维向量 (a_1,a_2,a_3) 和二维向量 (a_1,a_2) 的这种表示形式称为行向量形式，也可以将它们表示为列向量形式：

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

本教材中的向量将以行向量形式表示.

7.2.2　向量的线性运算

定义 7.2　设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$. 向量 $(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3).$$

向量的上述运算称为**加法运算**.

对于二维向量，则有

$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2).$$

图 7.6 给出了三维向量加法运算的几何解释：从图中可以看出，若向量 $\overrightarrow{OA}$

$=\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，与向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$首尾相接，则向量$\overrightarrow{OB}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$正是它们的和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，所以我们得到：

向量加法运算满足**三角形法则**.

若在依三角形法则进行加法运算 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$的图 7.7 中，过点 O 作向量$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$，那么从图 7.7 看出，以 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}$为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线$\overrightarrow{OB}$为和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，所以我们也有：

向量加法运算满足**平行四边形法则**.

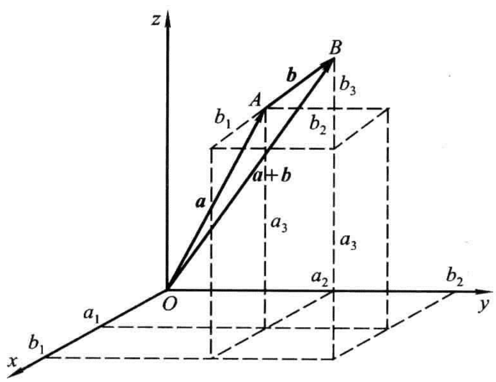


图 7.6

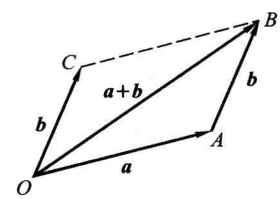


图 7.7

用三角形法则或平行四边形法则求得两向量的和向量的结果是一致的. 但当两个向量具有相同方向或相反方向时，它们无法构成一个平行四边形，故平行四边形法则失效，而三角形法则依然有效.

若向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，则称向量$(-a_1,-a_2,-a_3)$为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$.

有了负向量，我们可以定义向量的减法：

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\xlongequal{\text{def}}\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

从而若向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，那么

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3).$$

若 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$为空间两点，则借助于 7.6 不难看出向量

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

这说明三维向量$\boldsymbol{v}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$是起点为 A 终点为 B 的向量.

对于二维向量，上述运算法则和类似结论显然也同样成立.

例 7.2 已知 $A(1,-1,2)$，$B(2,1,4)$是空间两点，求向量$\overrightarrow{AB}$和它的模.

解 $\overrightarrow{AB}=(2-1,1+1,4-2)=(1,2,2)$,

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3.$$

向量的加法运算满足如下的运算律:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,

(2) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$,

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$,

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$,

这些运算律容易利用加法的定义予以证明,我们留给读者作为练习.

定义 7.3 设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\lambda$ 为实数,向量$(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$称为**数量 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积**或**数乘向量**,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,即

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_1,a_2,a_3)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3),$$

数量 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 之间的上述运算称为**数乘运算**.

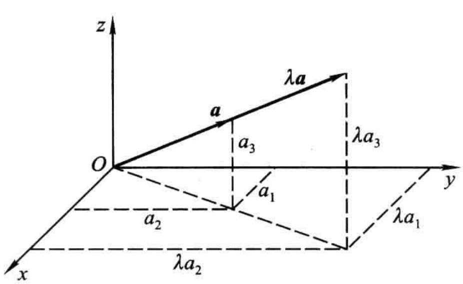
对于二维向量,则有

$$\lambda(a_1,a_2)=(\lambda a_1,\lambda a_2).$$

由定义可知,数乘向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模为

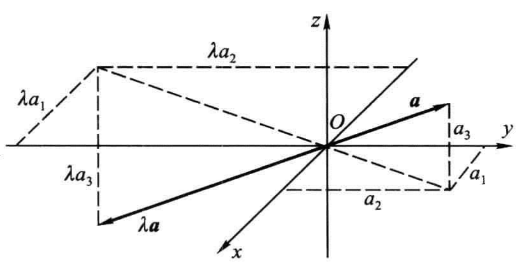
$$|\lambda\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\lambda a_1)^2+(\lambda a_2)^2+(\lambda a_3)^2}=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|,$$

图 7.8 和图 7.9 给出了数乘向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的几何解释. 当 $\lambda>0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向,当 $\lambda<0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反;而 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的大小(模)则总是 $\boldsymbol{a}$ 大小(模)的 $|\lambda|$ 倍.



(λ>0)

图 7.8



(λ<0)

图 7.9

若向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反,则称它们相互**平行**,记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行,将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点移至同一点时,它们的终点与起点在同一直线,故平行向量也称为**共线**向量. 由于零向量 $\boldsymbol{0}$ 可以任取方向,故它与任何向量都平行.

由数乘的上述性质可得如下结论:

命题 7.1 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}$,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

证 必要性:设 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,而当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时,λ 取正值,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时,λ 取负值,则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向,且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,$$

故有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,则取 $\lambda=0$,从而有 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

充分性:若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a},\lambda\in\mathbf{R}$,则由数乘的性质知:若 $\lambda=0$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,从而 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;若 $\lambda\neq0$,则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向或反方向,从而 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则根据命题 7.1 可以得到向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件:

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

当 $\lambda=-1$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 大小相同、方向相反,正是我们介绍过的负向量,因此

$$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}=(-a_1,-a_2,-a_3).$$

向量的数乘运算满足如下的运算律:

(1) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,

(3) $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$,

(4) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

这些性质也容易依据向量的数乘运算的定义直接加以证明.对于二维向量的数乘,运算法则和类似结论也同样成立.

向量的加法和数乘称为向量的**线性运算**.向量集合 V_3(或 V_2)在赋予线性运算后称为三维(或二维)**向量空间**或**线性空间**.

若向量的模为 1,则称其为**单位向量**. 如果向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则显然 $\boldsymbol{a}$ 方向上的单位向量为$\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$,记为 $\boldsymbol{a}^0$,若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,就有

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}(a_1,a_2,a_3).$$

这样得到 $\boldsymbol{a}$ 方向上的单位向量的做法称为 $\boldsymbol{a}$ 的**单位化**.

在 V_3 中,有三个重要的单位向量:

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\quad \boldsymbol{j}=(0,1,0),\quad \boldsymbol{k}=(0,0,1),$$

它们的方向分别与 x 轴、y 轴、z 轴的正向相同.

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,则立即有

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}.$$

这说明任意一个三维向量都可由 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ **线性表示**. 我们把 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 称为 V_3 中的一组**基**. 又因 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 均为单位向量,故称之为**标准基**.

在二维的情形,$\boldsymbol{i}=(1,0)$,$\boldsymbol{j}=(0,1)$是 V_2 的一组标准基.

例 7.3 设 $\boldsymbol{a}=(1,-1,-2)$,$\boldsymbol{b}=(1,0,-4)$,求

(1) $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$;

(2) 用标准基 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示向量 $\boldsymbol{c}$;

(3) 求与 $\boldsymbol{c}$ 同方向的单位向量.

解 (1) $\boldsymbol{c}=3(1,-1,-2)-2(1,0,-4)=(1,-3,2)$;

(2) $\boldsymbol{c}=(1,-3,2)=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{c}^0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{c}|}\boldsymbol{c}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,-3,2)=\left(\dfrac{\sqrt{14}}{14},-\dfrac{3\sqrt{14}}{14},\dfrac{\sqrt{14}}{7}\right)$.

例 7.4 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点,点 M 位于 M_1,M_2的连线上,使得

$$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\,\overrightarrow{MM_2},$$

求点 M 的坐标(x,y,z).

解 $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$,$\overrightarrow{MM_2}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$,故有

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z),$$

从而

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),\ y-y_1=\lambda(y_2-y),\ z-z_1=\lambda(z_2-z),$$

解得点 M 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

上述 M 的坐标公式称为**定比分点公式**.

例 7.5 设四边形 $ABCD$ 的对角线相互平分,证明四边形 $ABCD$ 为平行四边形(见图 7.10).

证 设对角线 AC,BD 的交点为 O,由于 $ABCD$ 的对角线相互平分,故有

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO},$$

于是

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC},$$

即

$$\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{DC},\ |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|,$$

所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

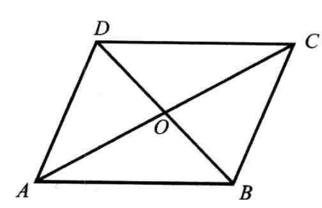


图 7.10

若将向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的起点移至同一点

时,这些向量的起点和终点均在同一平面上,则称向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是**共面的**.由此即得:任意两个向量是共面的.

命题 7.2 若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面,而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,则存在实数 λ 与 μ,使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

证 由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线可知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均非零向量,取一定点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,则 $OABC$ 共面,过点 C 作 OA 的平行线交 OB 所在的直线于 F,作 OB 的平行线交 OA 所在的直线于 E(图 7.11),则依向量加法有

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF},$$

又因 $\overrightarrow{OE}/\!/\overrightarrow{OA}$,由命题 7.1 知存在实数 λ,使得

$$\overrightarrow{OE}=\lambda\overrightarrow{OA}=\lambda\boldsymbol{a},$$

同理,存在实数 μ,使得

$$\overrightarrow{OF}=\mu\overrightarrow{OB}=\mu\boldsymbol{b},$$

从而 $\overrightarrow{OC}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

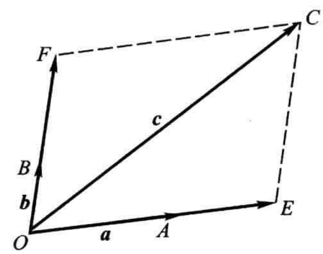


图 7.11

进而我们有以下结论.

命题 7.3 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是不共面的三个向量,那么对任一向量 $\boldsymbol{d}$,存在实数 λ,μ,ν,使得

$$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}.$$

证明留给读者,其方法类似证命题 7.2 的方法.

我们称 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的**线性组合**. 命题 7.3 意味着 V_3 中任一向量均可表示为三个不共面向量的线性组合,所以三个不共面向量也构成 V_3 的一组基.

7.3 向量的数量积和向量积

7.3.1 向量的数量积

定义 7.4 设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的对应分量乘积之和为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**,记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

对于二维向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$,$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)=a_1b_1+a_2b_2,$$