内蒙古民族师范学院

自然科学论文选

1980—1987

内蒙古民族师范学院科研处

说　　明

一、今年九月二十日是我院建校三十周年，我们编写了《社会科学论文选》（1985—1987）、《社会科学蒙文论文选》（1985—1987）、《自然科学论文选》（1980—1987）、《科研成果目录汇编》（1984—1987）四部书。时值校庆，以作纪念。

二、三本论文选均收录了我院教师近几年来在国家及省（区）级各专业理论刊物和学术会议上发表的论文，绝大部分荣获我院及省（区）级优秀论文奖。

三、《科研成果目录汇编》收录了近四年在国内外公开出版或发表的著作、教材、论文、译文和通过技术鉴定的应用研究成果，以及部分较成熟的校内使用的蒙文教材，共计五百三十项。

四、四部书的编辑出版，打开了我院的一个窗口，展示了教学、科研人员近几年的劳动结晶，一定程度上也反映了我院教学、科研的实际水平。

五、我处的邢桂兰、崔晓光、季宪臣、邢彭龄、梁西昆、包国祥、布玉贵同志参加了四部书的收集、整理、编辑工作。

同时编辑四本书，工作量很大。由于人手少，时间紧，涉及的内容广、作者人数多，错误和遗漏在所难免，敬请批评指正。

一九八八年八月

目　录

数　学

物　理

化　学

体　　育

强仿紧、仿紧和弱仿紧T_1扩张

董 笑 咏　王 世 坤

（内蒙民族师院数学系）

*Reed*在〔1〕中证明了：对给定T_1空间(X, T)，在它的主扩张的等价类的集合与聚点生成的相容*Lodato* n-邻近的集合之间存在一一对应关系。本文在此基础上，给出三种特的n-邻近：s-邻近、p-邻近和ω-邻近，它们分别和(X, T)的强仿紧、仿紧和弱仿紧主扩张的等价类集合之间有一一对应关系。

在讨论之前，介绍本文经常用到的符号和定义。其余无特别说明的概念与符号均导自〔1〕

设$\mathscr{A}$和$\mathfrak{B}$是拓扑空间X的子集族，λ是X的子集族的集合，并设A、$B\subset X$．

（1）$\mathscr{A}<\mathfrak{B}\Leftrightarrow$每一$\mathfrak{B}$中的集合包含$\mathscr{A}$中的集合。

（2）$\mathscr{A}\vee\mathfrak{B}=\{A\cup B\ :\ A\in\mathscr{A},\ B\in\mathfrak{B}\}$．

（3）$c_\lambda(A)=\{x\in X:\ \{A, \{x\}\}\in\lambda\}$．

（4）$c_\lambda(\mathscr{A})=\{c_\lambda(A)\ :\ A\in\mathscr{A}\}$．

（5）$cl_x\mathscr{A}=\{cl_xA:\ A\in\mathscr{A}\}$．

定义1、X上的n-邻近（*nearness*）是X的子集族的集合υ满足。

N 1)、$\bigcap\mathscr{A}\neq\Phi\Rightarrow\mathscr{A}\in\upsilon$．

N 2)、若$cd\in\upsilon$且$\mathscr{A}<\mathfrak{B}$、则$\mathfrak{B}\in\upsilon$．

N 3)、若$\mathscr{A}\vee\mathfrak{B}\in\upsilon$，则$\mathscr{A}\in\upsilon$或$\mathfrak{B}\in\upsilon$．

N 4)、若$\mathscr{A}\in\upsilon$，则$\Phi\bar{\in}\mathscr{A}$．

一个υ-聚点是指一个υ的极大元。

定义2．设υ为集合X上的n-邻近且设T为X上的拓扑。

a)、υ是和T相容的当且仅当c_υ是由T确定的闭包算子，即对$\forall A\subset X$，$c_\upsilon(A)=\mathrm{cl}_xA$

b)、υ是*Lodato*的当且仅当只要$C_\upsilon(\mathscr{A})\in\upsilon$即有$\mathscr{A}\in\upsilon$．

c)、设$x\subset\upsilon$，我们说υ是x生成的当且仅当υ的每个元都含于x的某个元中，υ称为聚点生成的当且仅当υ的每个元都含于某一υ-聚点中。

定义3．　$k=(e, y)$称为(X, T)的扩张，如果$e: X\rightarrow y$是嵌入且$e(X)$是y的稠密子空间。

如果$\{\mathrm{cl}_ye(A): A\subset X\}$对$y$的闭集是一个基，即对$\forall F\subset y$，F为y中闭集，$\exists\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(X)$使$F=\bigcap\mathrm{cl}_ye(\mathscr{A})=\bigcap_{A\in\mathscr{A}}\mathrm{cl}_ye(A)$，则称$k$为主扩张。这里$\Gamma(X)$表示$X$的所有子集的集合。

对$k=(e\cdot y)$，定义$T_r(k)=\upsilon_k=\{\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(X):\bigcap\mathrm{cl}_y(\mathscr{A})\neq\Phi\}$．这时可验证$\upsilon_k$是$X$

上n-邻近，且$\forall y\in \mathrm{y}$，$\{A\subset X : y\in \mathrm{cl}_y e(A)\}$是$\upsilon_k$的极大元（[1．p 196]），以下对两者不作区分。

设υ是与T_1空间X拓扑相容的$Lodato$ n-邻近，并设y_υ是所有υ-聚点的集合，对$A\subset X$，定义$A^\upsilon=\{\sigma\in \mathrm{y}_\upsilon : A\in\sigma\}$．以$\{A^\upsilon : A$是$X$中闭集$\}$作为$\mathrm{y}_\upsilon$的闭集的基导入拓扑$\Gamma_\upsilon$．对$x\in X$，令$e_\upsilon(x)=\sigma_x=\{A\subset X : x\in \mathrm{cl}_x A\}$。定义$Ext(\upsilon)=k_\upsilon=(e_\upsilon, \mathrm{y}_\upsilon)$．可以验证$k_\upsilon$是$X$的主扩张，且$\forall A\subset X$．$A^\upsilon=(\mathrm{cl}_x A)^\upsilon=\mathrm{cl}_y e(A)$．（见[1]）

一、强仿紧扩张。

1.1 定义．$\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(X)$．$\mathscr{A}\in s(X)$是指存在$\mathscr{A}_0\subset\mathscr{A}$，$\mathscr{A}_0=\{A_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$，其中$\Lambda$是序数$|\Lambda|\geqslant\aleph_0$，使得对$\alpha\in\Lambda$，$X\setminus(A_0\cup A_\alpha)\neq\Phi$．

1.2 引理．给定集族$\mathscr{A}$，则集族$\{X\setminus A : A\in\mathscr{A}\}$是星有限的当且仅当$\mathscr{A}\bar{\in}s(X)$。

证：若$\{X\setminus A : A\in\mathscr{A}\}$是星有限的而$\mathscr{A}\in s(X)$，则存在$\mathscr{A}_0=\{A_\alpha : \alpha\in\Lambda\}\subset\mathscr{A}$，$\Lambda$是序数且$|\Lambda|\geqslant\aleph_0$，使$\forall\alpha\in\Lambda$，$(X\setminus A_0)\cap(X\setminus A_\alpha)=X\setminus(A_0\cup A_\alpha)\neq\Phi$，与$\{X\setminus A : A\in\mathscr{A}\}$星有限矛盾。反之，若$\mathscr{A}\bar{\in}s(X)$而$\{X\setminus A : A\in\mathscr{A}\}$不是星有限的，则存在$A_0\in\mathscr{A}$使$\{A\in\mathscr{A} : (X\setminus A_0)\cap(X\setminus A)\neq\Phi\}$为无限集，即$\mathscr{A}_0=\{A\in\mathscr{A} : X\setminus(A_0\cup A)\neq\Phi\}$为无限集，与$\mathscr{A}\bar{\in}s(X)$矛盾。

1.3 引理．空间X是强仿紧的当且仅当若子集族$\mathscr{A}$满足$\forall\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$，$\mathrm{cl}_x\mathscr{A}_0\bar{\in}s(X)$蕴含$\cap\mathrm{cl}_x\mathscr{A}_0\neq\Phi$，则$\cap\mathrm{cl}_x\mathscr{A}\neq\Phi$.

证：$\Rightarrow$设X为强仿紧，$\mathscr{A}$为具有所设性质的子集族，若$\cap\mathrm{cl}_x\mathscr{A}=\Phi$，则集族$\{X\setminus\mathrm{cl}_x A : A\in\mathscr{A}\}$构成$X$的开覆盖，由$X$是强仿紧的故存在星有限开加细$\{B_\alpha : \alpha\in\Gamma\}$，$\forall B_\alpha$，$\exists A\in\mathscr{A}$，使$B_\alpha\subset X\setminus\mathrm{cl}_x A$即$X\setminus B_\alpha\supset\mathrm{cl}_x A\supset A$，从而$\{X\setminus B_\alpha : \alpha\in\Gamma\}>\mathscr{A}$．由引理1.2，$\{X\setminus B_\alpha : \alpha\in\Gamma\}\bar{\in}s(X)$但$\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}(X\setminus B_\alpha)=X\setminus\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha)=\Phi$，与条件矛盾，故应有$\cap\mathrm{cl}_x\mathscr{A}\neq\Phi$．

$\Leftarrow$若X不是强仿紧的，则存在开覆盖$\{B_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$不具有星有限开加细。令$\mathscr{A}=\{X\setminus B_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$。设$\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$，$\mathrm{cl}_x\mathscr{A}_0\bar{\in}s(X)$，则集$\{X\setminus\mathrm{cl}_X A : A\in\mathscr{A}_0\}$是星有限的，且$\forall A\in\mathscr{A}_0$，$X\setminus\mathrm{cl}_X A\subset B_\alpha$对某个$\alpha\in\Lambda$成立，故这个集族不能构成覆盖，从而$\cap\mathrm{cl}_x\mathscr{A}_0\neq\Phi$，由条件有$\cap\mathrm{cl}_x\mathscr{A}=\cap\mathscr{A}\neq\Phi$，从而$\{B_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$不是覆盖，产生矛盾。

1.4 定义．空间X上一个n-邻近υ称为s-邻近，如果$\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(X)$使得$\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$且$\mathrm{cl}_x\mathscr{A}_0\bar{\in}s(X)$蕴含$\mathscr{A}_0\in\upsilon$时则有$\mathscr{A}\in\upsilon$

1.5 命题．设$k=(e, y)$是T_1空间X的强仿紧主T_1扩张，则υ_k是与X拓扑相容的聚点生成的$Lodato$ s-邻近。

证：由[1]中定理1.8知只要证明υ_k是s-邻近即可。设$\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(X)$满足$\forall\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$，$\mathrm{cl}_X\mathscr{A}_0\bar{\in}s(X)$，有$\mathscr{A}_0\in\upsilon_k$．若$\mathscr{A}\bar{\in}\upsilon_k$，则$\cap\mathrm{cl}_y e(\mathscr{A})=\Phi$。由引理1.3，存在$\mathfrak{B}>\mathrm{cl}_y e(\mathscr{A})$，$\mathrm{cl}_y\mathfrak{B}\bar{\in}s(\mathrm{y})$，使$\cap\mathrm{cl}_y\mathfrak{B}=\Phi$，从而有$e^{-1}(\mathrm{cl}_y\mathfrak{B})\in\upsilon_k$。此时显然有$e^{-1}(\mathrm{cl}_y\mathfrak{B})>\mathscr{A}$，从而$e^{-1}(\mathrm{cl}_y\mathfrak{B})\in s(X)$。设$\mathfrak{B}_0\subset\mathfrak{B}$，$\mathfrak{B}_0=\{B_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$，$\Lambda$是序数且$|\Lambda|\geqslant\aleph_0$，对$\forall\alpha\in\Lambda$，$X\setminus e^{-1}(\mathrm{cl}_y B_0)\cup e^{-1}(\mathrm{cl}_y B_\alpha)\neq\Phi$，从而$\mathrm{y}\setminus\mathrm{cl}_y B_0\cup\mathrm{cl}_y B_\alpha\neq\Phi$。与$\mathrm{cl}_y\mathfrak{B}\bar{\in}s(\mathrm{y})$矛盾。故应有$cd\in\upsilon_k$从而$\upsilon_k$是$s$-邻近。

1.6 命题．设υ是T_1空间X上与拓扑相容的聚点生成$Lodato$ s-邻近，则$k_\upsilon=(e_\upsilon, \mathrm{y}_\upsilon)$是强仿紧主$T_1$扩张。

证：显然，只要对y_ρ的闭集的基证明满足引理1.3的条件即可。记y_ρ为y，设$\rho=\{c_a:a\in\Gamma\}$ $\rho^\circ=\{\mathrm{cl}_y e_\rho(c_a):a\in\Gamma\}$满足$\forall\rho_0>\rho^\circ\,\mathrm{cl}\rho_0\bar{\in}s(y)$，有$\bigcap\mathrm{cl}_y\rho_0\neq\Phi$，往证$\bigcap\rho^\circ\neq\Phi$。设$\mathscr{A}>\rho$，$\mathrm{cl}_X\mathscr{A}\bar{\in}s(z)$，若$\mathscr{A}\bar{\in}\upsilon$，则$\bigcap\mathrm{cl}_y e_\rho(\mathscr{A})=\Phi$．显然，$\mathrm{cl}_y e_\rho(\mathscr{A})>\rho^\circ$，从而$\mathrm{cl}_y e_\rho(\mathscr{A})\in s(y)$故存在$\mathscr{A}_0=\{A_a:a\in A\}\subset\mathscr{A}$，其中$A$是序数且$|A|\geq\aleph_0$，使对$\forall a\in A$，$y\setminus[\mathrm{cl}_y e_\rho(A_0)\cup\mathrm{cl}_y e_\rho(A_a)]\neq\Phi$。但这是一y中开集，故$X\setminus[e_\rho^{-1}\mathrm{cl}_y e_\rho(A_a)\cup e_\rho^{-1}\mathrm{cl}_y e_\rho(A_0)]\neq\Phi$，即$X\setminus(\mathrm{cl}_X A_0\cup\mathrm{cl}_X A_a)\neq\Phi$，从而有$\mathrm{cl}_X\mathscr{A}\in s(X)$产生矛盾，故有$\mathscr{A}\in\upsilon$，由$\upsilon$是s-邻近，$\rho\in\upsilon$，由$\upsilon$是聚点生成的，设$\sigma$为聚点使$\rho\subset\sigma$，则$\sigma\in\bigcap\rho^\circ$。从而y是强仿紧的。

1.7 定理．设X为固定的T_1空间，则映射 Ext 是从由聚点生成的与X拓扑相容$Lodato$ s-邻近的集到X的强仿紧主T_1扩张的等价类的集上的双射。映射Ext和T_1在这两个集合上是互逆的。

证：由命题1.5，1.6及〔1〕中推论1.20立得。

二、仿紧扩张

2.1 定义．设υ为X上的n-邻近，$\mathscr{A}$为X的子集族，$\mathscr{A}\in P(X)$是指存在$x\in X$，对任何x的邻域V_x，集合$\{A\in\mathscr{A}:V_x\not\subset A\}$是无限集。

2.2 引理．设$\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(X)$，集合$\{X\setminus A:A\in\mathscr{A}\}$局部有限当且仅当$\mathscr{A}\bar{\in}P(X)$．

证：设$\{X\setminus A:A\in\mathscr{A}\}$局部有限，则$\forall x\in X$，$\exists x$的邻域$V_x$，使集合$\{A\in\mathscr{A}:V_x\not\subset A\}=\{A\in\mathscr{A}:V_x\cap(X\setminus A)\neq\Phi\}$为有限集，从而$\mathscr{A}\bar{\in}P(X)$．反之，若$\mathscr{A}\bar{\in}P(X)$，由定义此时$\forall x\in X$，$\exists V_x$使$\{A\in\mathscr{A}:V_x\not\subset A\}$为有限集，从而$\{X\setminus A:A\in\mathscr{A}\}$局部有限。

2.3 引理．X是仿紧的当且仅当若$\mathscr{A}$使得$\forall\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$，$\mathrm{cl}_X\mathscr{A}_0\bar{\in}P(X)$蕴含$\bigcap\mathrm{cl}_X\mathscr{A}_0\neq\Phi$，则$\bigcap\mathrm{cl}_X\mathscr{A}\neq\Phi$．

证：设X为仿紧空间，$\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(X)$满足$\forall\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$，$\mathrm{cl}_X\mathscr{A}_0\bar{\in}P(X)$有$\bigcap\mathrm{cl}_X\mathscr{A}_0\neq\Phi$．若$\bigcap\mathrm{cl}_X\mathscr{A}=\Phi$．则$\{X\setminus\mathrm{cl}_X A:A\in\mathscr{A}\}$是$X$的开覆盖，由$X$仿紧，故存在局部有限开加细$\{X\setminus B_a:a\in A\}$．其中$B_a$为$X$中闭集。从而$\forall a\in A$，$X\setminus B_a\subset X\setminus\mathrm{cl}_X A\subset X\setminus A$对集$A\in\mathscr{A}$成立，即有$A\subset B_a$．这样$\mathfrak{B}=\{B_a:a\in A\}>\mathscr{A}$，由引理2.2 有$\mathfrak{B}\bar{\in}P(X)$，但$\bigcap\mathrm{cl}_X\mathfrak{B}=\bigcap\mathfrak{B}=\Phi$，产生矛盾，故有$\bigcap\mathrm{cl}_X\mathscr{A}=\Phi$．

反之，设X满足题设条件，往证X是仿紧的。设$\{X\setminus A_a:A_a\in\mathscr{A}\}$是$X$的开覆盖，则$\bigcap\mathscr{A}=\Phi$．由假设，此时存在$\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$，$\mathrm{cl}_X\mathscr{A}_0\bar{\in}P(X)$有$\bigcap\mathrm{cl}_X\mathscr{A}_0=\Phi$．于是集族$\{X\setminus\mathrm{cl}_X A:A\in\mathscr{A}_0\}$是$X$的开覆盖，由引理2.2，$\{X\setminus\mathrm{cl}_X A:A\in\mathscr{A}_0\}$是局部有限的。由$\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$，故$\forall A\in\mathscr{A}_0$，$\exists A_a\in\mathscr{A}$，使$A_a\subset A$，从而$A_a\subset\mathrm{cl}_X A$即$X\setminus\mathrm{cl}_X A\subset X\setminus A_a$，这样集$\{X\setminus\mathrm{cl}_X A:A\in\mathscr{A}_0\}$是$\{X\setminus A_a:A_a\in\mathscr{A}\}$的加细。

2.4 定义．对X的子集族$\mathscr{A}$，定义$c\mathscr{A}=\{S:X\setminus S\bar{\in}\mathscr{A}\}$．$c\mathscr{A}$称为$\mathscr{A}$的对偶。如果$\mathscr{A}$是网格，则$c\mathscr{A}$是滤子；反之若$\mathscr{A}$是滤子则$c\mathscr{A}$是网格，进一步的情况见〔2〕。

2.5 引理．设υ是T_1空间X上相容的$Lodato$ n-邻近，且设σ是υ-聚点，则$c\sigma=e_\upsilon^{-1}(\mathscr{N}_\sigma)$这里$\mathscr{N}_\sigma$表示$\sigma$在$y_\upsilon$中的邻域系。

这个定理的证明可在〔1〕中找到。

2.6 定义．设υ为X上n-邻近，称X的子集族$\mathscr{A}$属于$P^*(X)$是指存在υ-聚点σ，$\forall S\in c\sigma$有

$\{A\in\mathscr{A}:S\subseteq A\}$为无限集

2.7 定义．$\mathfrak{X}$上n-邻近υ称为p-邻近，如果$\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(\mathfrak{X})$使得$\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$且$\mathrm{cl}_X\mathscr{A}_0\bar{\in}P^*(X)$蕴涵$\mathscr{A}_0\in\upsilon$，则有$\mathscr{A}\in\upsilon$．

2.8 命题．设$k=(e,\mathrm{y})$是T_1空间$\mathfrak{X}$的仿紧主T_1扩张．则υ_k是与$\mathfrak{X}$拓扑相容的聚点生成的$Lodato$ p-邻近。

证：由〔1〕中定理1.8，只要证明υ_k是p-邻近即可。设$\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(\mathfrak{X})$满足$\forall\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$，$\mathrm{cl}_X\mathscr{A}_0\bar{\in}P^*(\mathfrak{X})$，有$\mathscr{A}_0\in\upsilon_k$．若$\mathscr{A}\bar{\in}\upsilon_k$，则$\bigcap\mathrm{cl}_\mathrm{y}e(\mathscr{A})=\Phi$．由y是仿紧的，故存在$\mathscr{A}_0>\mathrm{cl}_\mathrm{y}e(\mathscr{A})$，$\mathrm{cl}_\mathrm{y}\mathscr{A}_0\bar{\in}P(\mathrm{y})$，使$\bigcap\mathrm{cl}_\mathrm{y}\mathscr{A}_0=\Phi$，即$e^{-1}(\mathrm{cl}_\mathrm{y}\mathscr{A}_0)\bar{\in}\upsilon_k$．显然．$e^{-1}(\mathrm{cl}_\mathrm{y}\mathscr{A}_0)>\mathscr{A}$,从而$e^{-1}(\mathrm{cl}_\mathrm{y}\mathscr{A}_0)\in P^*(X)$．故存在$y\in\mathrm{y}$，$N\in c y$，有$\{A\in\mathscr{A}_0:N\subseteq e^{-1}(\mathrm{cl}_\mathrm{y}A)\}$为无限集。但由$\mathrm{cl}_\mathrm{y}\mathscr{A}_0\bar{\in}P(\mathrm{y})$，故$\exists U\in\mathcal{N}_y$，$\{A\in\mathscr{A}_0:U\subseteq\mathrm{cl}_\mathrm{y}A\}$为有限集。由于当$U\subset\mathrm{cl}_\mathrm{y}A$时显然有$e^{-1}(U)\subset e^{-1}(\mathrm{cl}_\mathrm{y}A)$，从而$\{A\in\mathscr{A}_0:e^{-1}(U)\subseteq e^{-1}(\mathrm{cl}_\mathrm{y}A)\}$为有限集。但由引理2.5，$e^{-1}(U)\in c y$，产生矛盾，故$\mathscr{A}\in\upsilon_k$从而$\upsilon$是$p$-邻近。

2.9 命题．设$\mathfrak{X}$为T_1空间，υ为当$\mathfrak{X}$拓扑相容的聚点生成的$Lodato$ p-邻近，则$k_\upsilon=(e_\upsilon,\mathrm{y}_\upsilon)$是仿紧主$T_1$扩张。

证：显然只要证明对y_υ的开基作成的覆盖存在局部有限开加细即可，对偶的只要证明y_υ的闭集的基满足引理2.3的条件即可。记y_υ为y．

设$\rho=\{C_\alpha:\alpha\in\Gamma\}$，$\rho^\upsilon=\{\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_\upsilon(C_\alpha):\alpha\in\Gamma\}$满足条件：$\forall\rho_0>\rho^\upsilon\,\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_0\bar{\in}P(\mathrm{y})$，有$\bigcap\mathrm{cl}_\mathrm{y}\rho_0\neq\Phi$．往证$\bigcap\rho^\upsilon\neq\Phi$．对$\mathscr{A}>\rho$，$\mathrm{cl}_x\mathscr{A}\in P^*(\mathfrak{X})$，若$\mathscr{A}\bar{\in}\upsilon$，则$\bigcap\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_\upsilon(\mathscr{A})=\Phi$．显然，$\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_\upsilon(\mathscr{A})>\rho^\upsilon$，从而$\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_\upsilon(\mathscr{A})\in P(\mathrm{y})$，即$\exists\,y\in\mathrm{y}$，$\forall N\in\mathcal{N}_y$，$\{A\in\mathscr{A}:N\subseteq\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_\upsilon(A)\}$为无限集。但当$N$为$y$的开邻域且$N\subseteq\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_\upsilon(A)$时，$N\cap(\mathrm{y}\setminus\mathrm{cl}_\mathrm{y}e(A))\neq\Phi$．这是y中开集，从而$e_\upsilon^{-1}(N)\subseteq\mathrm{cl}_X A$．从而当$N$为$y$的任意邻域时，有$\{A\in\mathscr{A}:e_\upsilon^{-1}(N)\subseteq\mathrm{cl}_x A\}$为无限集。由引理2.5有$\mathrm{cl}_X\mathscr{A}\in P^*(\mathfrak{X})$与假设矛盾，故应有$\mathscr{A}\in\upsilon$，从而$\rho\in\upsilon$．令$\sigma$为$\upsilon$-聚点，使$\rho\subset\sigma$，则$\sigma\in\bigcap\rho^\upsilon$．

2.10定理．设$\mathfrak{X}$为固定的T_1空间，则映射Ext是从与$\mathfrak{X}$拓扑相容的聚点生成的$Lodato$ p-邻近的集合到$\mathfrak{X}$的仿紧主T_1扩张的等价类的集合上的双射，Ext与T_υ在这两个集合上是互逆的。

证：由命题2.8，2.9及〔1〕推论1.20立得。

三、弱仿紧扩张

3.1 定义．空间$\mathfrak{X}$上子集族称为属于$W(\mathfrak{X})$，如果存在$\mathscr{A}_0\subset\mathscr{A}$，$|\mathscr{A}_0|\geq\aleph_0$，使$\mathfrak{X}\setminus\bigcup\mathscr{A}_0\neq\Phi$．

3.2 引理．集族$\{\mathfrak{X}\setminus A:A\in\mathscr{A}\}$是点有限的当且仅当$\mathscr{A}\in W(\mathfrak{X})$．

证：由定义3.1，这是显然的。

3.3 引理．空间$\mathfrak{X}$是弱仿紧的充要条件为若$\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(\mathfrak{X})$使得$\forall\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$，$\mathrm{cl}_x\mathscr{A}_0\bar{\in}W(\mathfrak{X})$蕴涵$\bigcap\mathrm{cl}_x\mathscr{A}_0\neq\Phi$，则$\bigcap\mathrm{cl}_x\mathscr{A}\neq\Phi$．

这个引理的证明与引理2.3的证明类似，略。

3.4 定义．设υ为$\mathfrak{X}$上n-邻近，$\mathscr{A}$为$\mathfrak{X}$的子集族，称$\mathscr{A}\in W^*(\mathfrak{X})$是指存在$\upsilon$-聚点$\sigma$及$\mathscr{A}_0\subset\mathscr{A}$，$|\mathscr{A}_0|\geq\aleph_0$，使$\{\mathfrak{X}\setminus A:A\in\mathscr{A}_0\}\subset c\sigma$．

3.5 定义．X上n-邻近v称为ω-邻近。如果$\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(Z)$使得$\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$，$\mathrm{cl}_X\mathscr{A}_0\bar{\in}W^*(X)$蕴涵$\mathscr{A}_0\in v$，即有$\mathscr{A}\in v$．

3.6 命题．设$k=(e,\mathrm{y})$是T_1空间X的弱仿紧T_1主扩张，则v_k是与Z拓扑相容的聚点生成的*Lodato* w-邻近。

证：由〔1〕中定理1.8，只要证明v_k是w-邻近即可。设$\mathscr{A}\subset\beta(Z)$满足$\forall\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$，$\mathrm{cl}_x\mathscr{A}_0\in W^*(X)$有$\mathscr{A}_0\in v_k$，若$\mathscr{A}\bar{\in}v_k$，则$\bigcap\mathrm{cl}_\mathrm{y}e(\mathscr{A})=\Phi$由y弱仿紧，从而存在$cd_0>\mathrm{cl}_\mathrm{y}e(\mathscr{A})$，$\mathrm{cl}_\mathrm{y}\mathscr{A}_0\bar{\in}W(\mathrm{y})$使$\bigcap\mathrm{cl}_\mathrm{y}\mathscr{A}_0=\Phi$，即$e^{-1}(\mathrm{cl}_\mathrm{y}cd_0)\bar{\in}v_k$．显然$e^{-1}(\mathrm{cl}_\mathrm{y}\mathscr{A}_0)>\mathscr{A}$，故$e^{-1}(\mathrm{cl}_\mathrm{y}\mathscr{A}_0)\in W^*(X)$，从而$\exists y\in\mathrm{y}$及$\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}_0$，$|e^{-1}(\mathrm{cl}_\mathrm{y}\mathscr{A}_1)|\geqslant\aleph_0$，使$\{X\setminus e^{-1}(\mathrm{cl}_\mathrm{y}A):A\in\mathscr{A}_1\}\subset cy$，但由于$\mathrm{cl}_\mathrm{y}\mathscr{A}_0\bar{\in}W(\mathrm{y})$，$\{\mathrm{y}\setminus\mathrm{cl}_\mathrm{y}A:A\in\mathscr{A}_0\}$是点有限的，从而$\mathscr{A}_2=\{A\in\mathscr{A}_0:y\in\mathrm{y}\setminus\mathrm{cl}_\mathrm{y}A$是有限集，即$\{A\in\mathscr{A}_0\ e^{-1}(\mathrm{y}\setminus\mathrm{cl}_\mathrm{y}A)\in cy\}$是有限集，即$\{A\in\mathscr{A}_0:X\setminus e^{-1}(\mathrm{cl}_\mathrm{y}A)\in cy\}$是有限集，这与$\mathscr{A}_1$的存在矛盾故$\mathscr{A}\in v_k$，即$v_k$为$w$-邻近。

3.7 命题．设v是T_1空间X上拓扑相容的聚点生成*Lodato* w-邻近，则$k_v=(e_v,\mathrm{y}_v)$是Z的弱仿紧主T_1扩张。

证：与2.9类似只要对y_v的闭集的基证明其满足引理3.3的条件即可。以下以y记y_v．

设$\rho=\{C_a:a\in\Gamma\}$，$\rho^v=\{\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_v(C_a):a\in\Gamma\}$满足$\forall\rho_0>\rho^v$，$\mathrm{cl}_\mathrm{y}\rho_0\bar{\in}W(\mathrm{y})$有$\bigcap\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_0\neq\Phi$，往证$\bigcap e^v\neq\Phi$．$\mathscr{A}>\rho$，$\mathrm{cl}_z\mathscr{A}\bar{\in}W^*(X)$，若$c\mathscr{A}\bar{\in}v$，则$\bigcap\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_v(\mathscr{A})=\Phi$．此时显然有$\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_v(\mathscr{A})>\rho^v$，从而$\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_v(\mathscr{A})\in W(\mathrm{y})$．故存在$y\in\mathrm{y}$及$\mathscr{A}_0\subset\mathscr{A}$，$|\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_v(\mathscr{A}_0)|\geqslant\aleph_0$，使$y\in\mathrm{y}\setminus\bigcup\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_v(\mathscr{A}_0)=\bigcap\ (\mathrm{y}\setminus\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_v(A))$，这样$A\in\mathscr{A}_0$，$\mathrm{y}\setminus\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_v(A)$是$y$在y中开邻域，从而有$X\setminus\mathrm{cl}_XA=e_v^{-1}(\mathrm{y}\setminus\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_v(A))\in cy$．由于当$\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_v(A)\neq\mathrm{cl}_\mathrm{y}e_v(B)$时$\mathrm{cl}_XA\neq\mathrm{cl}_XB$故有$|\mathrm{cl}_X\mathscr{A}_0|\geqslant\aleph_0$，这与$\mathrm{cl}_X\mathscr{A}\bar{\in}W^*(X)$矛盾，因而有$\mathscr{A}\in v$，由$v$是$w$-邻近，$\rho\in v$．设$\sigma$是$v$-聚点，使$\rho\subset\sigma$．则$\sigma\in\bigcap\rho^v$．

3.8 定理．设X为固定的T_1空间，则映射Ext是从与X拓扑相容的聚点生成*Lodato* w-邻近集合到X的弱仿紧主T_1扩张的等价类的集合上的双射，映射Ext和T_v在这两个集合上是互逆的。

证：由命题3.6，3.7和〔1〕中推记1.20即得。

本文在写作过程中得到笔者的老师方嘉琳教授热心指导，谨此致谢。

参考文献：

1．Reed. *Nearnesses, Proximities and T_1-compactifications*. Trans Amer Math. Soc. Vol 236 (1978) 193—207．

2．Thcon. *Proximity structures and grills*. Math Ann. 206 (1973) 35—62．

3．兜玉之宏、永见启应、拓扑空间论。

强仿紧、仿紧和弱仿紧 T_1 扩张

在本文中我们提出三种特殊的 n 邻近，称为 s 邻近．p 邻近和 ω 邻近．我们得到在强仿紧扩张与 s 邻近、仿紧扩张与 p 邻近及弱仿紧扩张与 ω 邻近之间的一一对应．

定义 1　设 $\mathfrak{P}(X)$ 是拓扑空间 X 的所有子集的族且 $\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(X)$． $\mathscr{A}\in S(X)$ 当且仅当存在 $\mathscr{A}_0=\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}\subset\mathscr{A}$ 使对每一 $\alpha\in\Lambda$，$X\backslash(A_0\cup A_\alpha)\neq\phi$，在此 Λ 是序数 $|\Lambda|\geqslant\aleph_0$．

定义 2　空间 X 上 n 邻近 ν 称为 s 邻近，如果 $\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(X)$ 使得 $\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$ 且 $cl_X\mathscr{A}_0\bar{\in}S(X)$ 蕴涵 $\mathscr{A}_0\in\nu$，我们有 $\mathscr{A}\in\nu$．

定理 1　设 X 为固定的 T_1 空间，则映射 Ext 是从聚点生成的相容 Lodato s 邻近的集合到 X 的主 T_1 强仿紧扩张的(等价类的)集合上的双射．映射 Ext 和 Tr 在这两个集合上是互逆的．

定义 3　设 ν 是 X 上 n 邻近且 $\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(X)$． $\mathscr{A}\in P^*(X)$ 当且仅当存在 ν 聚点 σ，对每一 $S\in c\sigma$，$\{A\in\mathscr{A}:S\not\subset A\}$ 是无限集．

定义 4　X 上 n 邻近 ν 称为 p 邻近，如果 $\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(X)$ 使得 $\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$ 且 $cl_X\mathscr{A}_0\bar{\in}P^*(X)$ 蕴涵 $\mathscr{A}_0\in\nu$，我们有 $\mathscr{A}\in\nu$．

定理 2　设 X 是一固定 T_1 空间，则映射 Ext 是从聚点生成的相容 Lodato p 邻近的集合到 X 的主 T_1 仿紧扩张的(等价类的)集合上的双射．映射 Ent 和 Tr 在这两个集合上是互逆的．

定义 5　设 ν 是 X 上 n 邻近且 $\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(X)$，$\mathscr{A}\in W^*(X)$ 当且仅当存在 ν 聚点 σ 及 $\mathscr{A}_0\subset\mathscr{A}$ 使 $|\mathscr{A}_0|\geqslant\aleph_0$ 且 $\{X\backslash A:A\in\mathscr{A}_0\}\subset c\sigma$．

定义 6　X 上 n 邻近 ν 称为 ω 邻近，如果 $\mathscr{A}\subset\mathfrak{P}(X)$ 使得 $\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$ 且 $cl_X\mathscr{A}_0\bar{\in}W^*(X)$ 蕴涵 $\mathscr{A}_0\in\nu$，则 $\mathscr{A}\in\nu$．

定理 3　设 X 是一固定的 T_1 空间，则映射 Ext 是从聚点生成的相容 Lodato ω 邻近的集合到 X 的主 T_1 弱仿紧扩张的（等价类的）集合上的双射．映射 Ext 和 Tr 在这两个集合上是互逆的．

董英永　王学棠

（内蒙民族师范学院数学系，通辽）

LETTERS

STRONGLY PARACOMPACT, PARACOMPACT AND WEAKLY PARACOMPACT T_1-EXTENSION

Received May 29, 1984.

In this letter we raise three special nearnesses called s-nearness, p-nearness and w-nearness. We obtain one to one correspondence between strongly paracompactification and s-nearness, paracompactification and p-nearness and weakly paracompactification and w-nearness respectively.

Definition 1. Let $\mathfrak{B}(X)$ be a family of all the subsets of a topological space X and $\mathscr{A}\subset\mathfrak{B}(X)$, $\mathscr{A}\in S(X)$ iff there exists an $\mathscr{A}_0=\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}\subset\mathscr{A}$ such that for each $\alpha\in\Lambda$, $X\setminus(A_0\cup A_\alpha)\neq\phi$, here Λ is an ordinal number and $|\Lambda|\geqslant\aleph_0$.

Definition 2. A nearness ν on a T_1-space X is called an s-nearness if for each $\mathscr{A}\subset\mathfrak{B}(X)$ such that $\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$ and $cl_x\mathscr{A}_0\bar{\in}S(X)$ imply $\mathscr{A}_0\in\nu$, we have $\mathscr{A}\in\nu_0$.

Theorem 1. *Let X be a fixed T_1-space. The map Ext is a bijection from the set of cluster-generated compatible Lodato s-nearnesses to the set of (equivalence classes of) principal T_1-strongly paracompactifications of X. The maps Ext and Tr are inverse on these two sets.*

Definition 3. Let ν be a nearness on X and $\mathscr{A}\subset\mathfrak{B}(X)$, $\mathscr{A}\in P^*(X)$ iff there exists a ν-cluster σ, for each $S\in c\sigma$ the set $\{A\in\mathscr{A}:S\not\subset A\}$ is an infinite set.

Definition 4. A nearness ν on X is called p-nearness, if for each $\mathscr{A}\subset\mathfrak{B}(X)$ such that $\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$ and $cl_x\mathscr{A}_0\bar{\in}P^*(X)$ imply $\mathscr{A}_0\in\nu$, we have $\mathscr{A}\in\nu$.

Theorem 2. *Let X be a fixed T_1-space. The map Ext is a bijection from the set of cluster-generated compatible Lodato p-nearnesses to the set of (equivalence classes of) principle T-paracompactifications of X. The maps Ext and Tr are inverse on these two sets.*

Definition 5. Let ν be a nearness on X and $\mathscr{A}\subset\mathfrak{B}(X)$ $\mathscr{A}\in W^*(X)$ iff there exists a ν-cluster σ and an $\mathscr{A}_0\subset\mathscr{A}$ such that $|\mathscr{A}_0|\geqslant\aleph_0$ and $\{X\setminus A:\ A\in\mathscr{A}_0\}\subset c\sigma$.

Definition 6. A nearness ν on X is called w-nearness if for each $\mathscr{A}\subset\mathfrak{B}(X)$ such that $\mathscr{A}_0>\mathscr{A}$ and $cl_x\mathscr{A}_0\bar{\in}W^*(X)$ imply $\mathscr{A}_0\in\nu$, we have $\mathscr{A}\in\nu$.

Theorem 3. *Let X be a fixed T_1-space. The map Ext is a bijection from the set of cluster-generated compatible Lodato w-nearnesses to the set of (equivalence classes of) principle T_1-weakly paracompactifications of X. The maps Ext and Tr are inverse on these two sets.*

Dong Xiaoyong (董笑咏)
and Wang Shikun (王世堃)
(Department of Mathematics, Nei Monggol Teachers' College for Nationalities, Tongliao)

正则空间的超空间中初始m-紧与局部初始m-紧的等价性

董笑咏　王世坤

（内蒙民族师院数学系）

设m $\geqslant\aleph_0$. 拓扑空间Z称为初始m-紧，如果每一基数不超过m的开覆盖都有有限子覆盖。Z称为局部初始m-紧，如果对Z中每一点x，存在它的一个邻域V，使$\overline{V}$作为Z的子空间是初始m-紧的，其中$\overline{V}$表示V在Z中的闭包。容易验证：

1．Z是初始m-紧的当且仅当每一基数不超过m的具有有限交性质的闭集族有非空交。

2．当Z是初始m-紧时则它的任何闭子集也是初始m-紧的。

下面介绍一些概念与记号。设（Z，Γ）为拓扑空间，以2^Z表示Z中所有非空闭集的全体。若$U_1,\cdots,U_n$为Z的非空子集，则以$\langle U_1,\cdots,U_n\rangle$表示集$\{E\in 2^Z: E\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i,\ E\cap U_i\neq\Phi,\ i=1,2,\cdots,n\}$．若$U_i$些为非空开集，则以所有形如$\langle U_1,\cdots,U_n\rangle$的集合为基在$2^Z$中导入拓扑称为有限拓扑，记为$2^\Gamma$. 我们用到如下结论，它们可在〔1〕或〔2〕中找到：

〔1〕$\langle U_1,\cdots,U_n\rangle\subset\langle V_1,\cdots,V_m\rangle\Leftrightarrow\bigcup_{i=1}^{n}U_i\subset\bigcup_{j=1}^{m}V_j$，且对$1\leqslant j\leqslant m$，存在$1\leqslant i\leqslant n$使$U_i\subset V_j$．

〔2〕若Z为T_1空间则$\mathrm{cl}_{2^Z}\langle E_1,\cdots,E_n\rangle=\langle\overline{E}_1,\cdots,\overline{E}_n\rangle$．

以下我们约定（Z，Γ）为正则空间，Z为无限集，这时（2^Z，2^Γ）为$Hauodocff$空间〔1〕．

引理1．在2^Z中若$Z\in\langle U_1,\cdots,U_m\rangle$，其中$U_1,\cdots,U_m$为$Z$中开集，则存在$Z$中开集$V_1,\cdots,V_n$，使$Z\in\langle V_1,\cdots,V_n\rangle\subset\langle U_1,\cdots,U_m\rangle$且$\{\overline{V}_1,\cdots,\overline{V}_n\}$是$Z$的既约覆盖。

证：显然，$Z\subset\bigcup_{i=1}^{m}U_i\subset\bigcup_{i=1}^{m}\overline{U}_i$．若$\{\overline{U}_1,\cdots,\overline{U}_m\}$不是既约覆盖，我们可设$U_i$若为有限集则为单点集。实际上，若$U_1,\cdots,U_k$（$k<m$）为有限集，则$\bigcup_{i=1}^{k}U_i$也是有限集。令$\bigcup_{i=1}^{k}U_i=\{x_j: j=1,2,\cdots,n\}$，$V_j=\{x_j\}$，$j=1,\cdots,n$则容易看出$V_j$皆为开集。令$V_{n+i}=U_{k+i}$ $i=1,2,\cdots,m-k$，则$\mathcal{V}=\langle V_1,V_2,\cdots,V_{n+m-k}\rangle\subset\langle U_1,\cdots,U_m\rangle$且$Z\in\mathcal{V}$，就$\mathcal{V}$的论即可。

取$x_i\in U_i$，使当$i\neq j$时$x_i\neq x_j$．由Z是T_2的，可选取x_i的邻域$V(x_i)$使当$i\neq j$时$V(x_i)\cap V(x_j)=\Phi$．令$W'(x_i)=U_i\cap V(x_i)$，则$W'(x_i)\subset U_i$而且$W'(x_i)$是x_i的邻域。由Z正则，可选取开集$W(x_i)$使$x_i\in W(x_i)\subset\overline{W(x_i)}\subset W'(x_i)$．令$V_i=U_i\setminus\bigcup_{j\neq i}\overline{W(x_j)}$，则$V_i$为开集且$W(x_i)\subset V_i\subset U_i$．

我们有$Z\subset\bigcup_{i=1}^{m}V_i$．实际上，对任何$x\in Z$，存在某个$U_i$使$x\in U_i$．

i）如果$x\bar{\in}\bigcup_{j\neq i}\overline{W(x_j)}$则$x\in V_i$．

ii）如果$x\in\bigcup_{j\neq i}\overline{W(x_j)}$，这时由 $\{\overline{W(x_i)}: i=1,\cdots,m\}$ 两两不交，故存在唯一$j\neq i$ 使$x\in\overline{W(x_j)}\subset W'(x_j)\subset U_j$，即$x\in U_j\setminus\bigcup_{i\neq j}\overline{W(x_i)}=V_j$。

这样，有$Z\in\langle V_1,\cdots,V_m\rangle\subset\langle U_1,\cdots,U_m\rangle$。显然 $\{\overline{V}_1,\cdots,\overline{V}_m\}$ 为Z的覆盖，而且当$i\neq j$时$x_i\bar{\in}V_j$，故 $\{\overline{V}_1,\cdots,\overline{V}_m\}$ 为既约覆盖。

引理2．设$\mathscr{F}$是 2^Z 中闭集，$z\in V$，V为Z中开集。若$\mathscr{F}\cap\langle Z,\overline{V}\rangle=\Phi$，则集$\mathscr{F}'=\{E\cup\{z\}: E\in\mathscr{F}\}$为 2^Z 中闭集。

证：设$F\in 2^Z$，$F\bar{\in}\mathscr{F}'$

1）$z\bar{\in}F$，则$F\in\langle Z\setminus\{z\}\rangle$且$\langle Z\setminus\{z\}\rangle\cap\mathscr{F}'=\Phi$。

ii）$z\in F$，如果$F=\{z\}$，则$F\in\langle V\rangle$且$\langle V\rangle\cap\mathscr{F}'=\Phi$。若$F\setminus\{z\}\neq\Phi$，由$Z$为正则空间，存在$Z$中开集$W$使$z\in W\subset\overline{W}\subset V$，分两种情况讨论。

a） $(F\setminus\{z\})\cap\overline{W}\neq\Phi$，设$y\in(F\setminus\{z\})\cap\overline{W}$，则$y\in V\setminus\{z\}$，$F\in\langle Z,V\setminus\{z\}\rangle$ 且 $\langle Z,V\setminus\{z\}\rangle\cap\mathscr{F}'=\Phi$。

b） $(F\setminus\{z\})\cap\overline{W}=\Phi$，此时显然$F\setminus\{z\}$为$Z$中闭集，而且$F\setminus\{z\}\bar{\in}\mathscr{F}$. 因否则将有$F\in\mathscr{F}'$产生矛盾。由$\mathscr{F}$在 2^Z 中闭，故存在Z中开集$W_1,\cdots,W_n$使$F\setminus\{z\}\in\langle W_1,\cdots,W_n\rangle\cap\mathscr{F}=\Phi$，显然我们可设$\bigcup_{i=1}^{n}W_i\subset Z\setminus\overline{W}$. 这样即有$F\in\langle W_1,\cdots,W_n,W\rangle$。如果$\langle W_1,\cdots,W_n,W\rangle\cap\mathscr{F}'\neq\Phi$，则存在$E\in\mathscr{F}$，使$E\cup\{z\}\in\langle W_1,\cdots,W_n,W\rangle$。由于对 $1\leqslant i\leqslant n$，$z\bar{\in}W_i$ 故对 $1\leqslant i\leqslant n$，$E\cap W_i\neq\Phi$，又$E\cap W=\Phi$，故有$E\subset\bigcup_{i=1}^{n}W_i$，从而$E\in\langle W_1,\cdots,W_n\rangle$即$\langle W_1,\cdots,W_n\rangle\cap\mathscr{F}\neq\Phi$ 产生矛盾。

综合上述即得$\mathscr{F}'$为 2^Z 中闭集。

定理1．设$\mathbf{m}\geqslant\aleph_0$,则下述等价：

1） 2^Z 是初始**m**-紧的。

2） 2^Z 是局部初始**m**-紧的。

3）存在Z在 2^Z 中的邻域W，$\mathrm{cl}_{2^Z}W$是初始**m**-紧的。

证：1）⇒ 2）；2）⇒ 3）是明显的，故只证 3）⇒ 1）。

这时显然存在Z中开集$V_1,\cdots,V_n$，使$Z\in\langle V_1,\cdots,V_n\rangle$且$\langle\overline{V}_1,\cdots,\overline{V}_n\rangle$是初始**m**-紧的。由引理1，我们可设 $\{\overline{V}_1,\cdots,\overline{V}_n\}$ 是Z的既约覆盖。

若 2^Z 不是初始**m**-紧的。则存在 2^Z 中具有有限交性质的闭集族$\mathscr{F}=\{\mathscr{F}_a: a\in\Lambda\}$，$|\Lambda|=\mathbf{m}^*\leqslant\mathbf{m}$. 使$\cap\mathscr{F}=\Phi$。以$\omega^*$表示基数为$\mathbf{m}^*$的最小序数，则$\Lambda$与$\{a: a<\omega^*\}$有相同基数. 所以不妨认为$\Lambda$即是 $\{a: a<\omega^*\}$，这样，$\mathscr{F}=\{\mathscr{F}_a: a<\omega^*\}$。令

$$H_0=\mathscr{F}_0;\quad H_a=\bigcap_{\beta<a}\mathscr{F}_\beta,\quad 0<a<\omega^*$$

这时有两种情况：

A）$\exists\ a<\omega^*$，$H_a=\Phi$。但 $\beta<a$，$H_\beta\neq\Phi$。此时显然a不小于第一个无限序数。

B）$\forall\ a<\omega^*$，$H_a\neq\Phi$。此时应有$\bigcap_{a<\omega^*}H_a=\Phi$。

设A）成立，令$H=\{H_\beta: \beta<a\}$，它是递降非空闭集列。当然具有有限交性质，且 $|H|\leqslant\mathbf{m}$。但$\cap H=H_a=\Phi$。我们构造H''。

由于 $\{\overline{V}_1,\cdots,\overline{V}_n\}$ 是Z的覆盖，故存在$\overline{V}_i$，使对$\forall\beta<a$，都有$H_\beta\cap\langle Z,\overline{V}_i\rangle\neq\Phi$. 这是因为否则将存在$\beta_0<a$使$H_{\beta_0}\cap(\bigcup_{i=1}^{n}\langle Z,\overline{V}_i\rangle)=\Phi$，但显然$\bigcup_{i=1}^{n}\langle Z,V_i\rangle=2^Z$，这将导致$H_{\beta_0}=\Phi$，与所设相反。我们不妨设对$\forall\beta<a$，$H_\beta\cap\langle Z,V_1\rangle\neq\Phi$。令

$$H^1=\{H_\beta^1=H_\beta\cap\langle Z,\overline{V}_1\rangle:\beta<a\}$$

显然这是一个递降非空闭集列。如果存在 $2\leqslant i\leqslant n$ 使 $\forall\beta<a$ 有 $H_\beta^1\cap\langle Z,V_i\rangle\neq\Phi$，则令 $H_\beta^2=H_\beta^1\cap\langle Z,V_i\rangle$，$H^2=\{H_\beta^2:\beta<a\}$．由于 $\langle\overline{V}_1,\cdots,\overline{V}_n\rangle=\langle\overline{V}_{i_1},\cdots,\overline{V}_{i_n}\rangle$ 其中 $i_1\cdots i_n$ 是 $1\cdots n$ 的任一排列，我们不妨设 i 即是 2．这样 $H^2=\{H_\beta^2=H_\beta^1\cap\langle Z,V_2\rangle:\beta<a\}$．

如果可以重复这种方法至多到 $k\leqslant n$，则令

$$H^j=\{H_\beta^j=H_\beta^{j-1}\cap\langle Z,\overline{V}_j\rangle:\beta<a\}\quad j=2,\cdots,k.$$

显然，对 $j\leqslant k$，H^j 是递降非空闭集列，且 $H_\beta^j\subset H_\beta$．

若 $k=n$．即得到 $H^n=\{H_\beta^n=H_\beta^{n-1}\cap\langle Z,\overline{V}_n\rangle:\beta<a\}$．

若 $k<n$，则有对 $1\leqslant s\leqslant r=n-k$，$\beta_s<a$，$H_{\beta_s}^k\cap\langle Z,\overline{V}_{k+s}\rangle=\Phi$．由于 $\{\overline{V}_1,\cdots,\overline{V}_n\}$ 是既约覆盖，可选取 $z_i\in V_{k+i}\setminus\bigcup\limits_{j\neq k+i}\overline{V}_j$，$i=1,2,\cdots,r$．设 $\beta_1<a$ 是使 $H_\beta^k\cap\langle Z,V_{k+1}\rangle=\Phi$ 的最小序数 β，令

$$H_\beta^{k+1}=\{E\cup\{z_1\}:E\in H_\beta^k\cap H_{\beta_1}^k\}$$

$$H^{k+1}=\{H_\beta^{k+1}:\beta<a\}$$

显然 $H_\beta^k\cap H_{\beta_1}^k$ 为 2^z 中非空闭集，且 $(H_\beta^k\cap H_{\beta_1}^k)\cap\langle Z,\overline{V}_{k+1}\rangle=\Phi$，由引理 2 H_β^{k+1} 为 2^z 的非空闭集。容易验证，H^{k+1} 是递降非空闭集列且对 $2\leqslant s\leqslant r$，$\exists\beta_s<2$，使 $H_{\beta_s}^{k+1}\cap\langle Z,\overline{V}_{k+s}\rangle=\Phi$．

重复上述方法：$2<s<r$，设 $\beta_s<a$ 是使 $H_\beta^{k+s-1}\cap\langle Z,V_{k+s}\rangle=\Phi$ 的最小序数，令

$$H_\beta^{k+s}=\{E\cup\{z_s\}:E\in H_\beta^{k+s-1}\cap H_{\beta_s}^{k+s-1}\}$$

$$H^{k+s}=\{H_\beta^{k+s}:\beta<a\}$$

则容易验证：

（＊）H^{k+s} 是递降非空闭集列，$|H^{k+s}|<\mathrm{m}$，$s=1,2,\cdots,r$．

（＊＊）$H_{\beta_{s+1}}^{k+s}\cap\langle Z,\overline{V}_{k+s+1}\rangle=\Phi$，$s=0,1,\cdots,r-1$．

显然有 $H_\beta^{k+r}=\{E\cup\{z_r\}:E\in H_\beta^{k+r-1}\cap H_{\beta_r}^{k+r-1}\}\subset\langle\overline{V}_1,\cdots,\overline{V}_n\rangle$

$$H^n=H^{k+r}=\{H_\beta^{k+r}:\beta<a\}$$

由 $\langle\overline{V}_1,\cdots,\overline{V}_n\rangle$ 初始m-紧，$\cap H^n\neq\Phi$．设 $H\in\cap H^n$，则 $H\in\langle\overline{V}_1,\cdots,\overline{V}_n\rangle$ 考虑 $H\setminus\{z_r\}$．分两种情况：

i）$(H\setminus\{z_r\})\cap\overline{V}_n\neq\Phi$．

ii）$(H\setminus\{z_r\})\cap\overline{V}_n=\Phi$．

若i）成立，则 $(H\setminus\{z_r\})\in\langle Z,\overline{V}_{k+r}\rangle$，但 $\forall\beta<a$，$H\setminus\{z_r\}\in H_\beta^{k+r-1}\cap H_{\beta_r}^{k+r-1}\subset H_\beta^{k+r-1}$ 即对 $\forall\beta<a$ $H_\beta^{k+r-1}\cap\langle Z,V_{k+r}\rangle\neq\Phi$，与（＊＊）矛盾，从而有

ii）$(H\setminus\{z_r\})\cap\overline{V}_r=\Phi$．$H\setminus\{z_r\}\in\langle V_1,\cdots,V_{k+r-1}\rangle$ 且 $H\setminus\{z_r\}\in H_\beta^{k+r-1}$ 对 $\forall\beta<a$ 成立。

重复上述推理应有 $H\setminus\{z_1,\cdots,z_r\}\in\langle\overline{V}_1,\cdots,\overline{V}_k\rangle$，而且 $\forall\beta<a$ $H\setminus\{z_1,\cdots,z_r\}\in H_\beta^k\subset H_\beta$，即 $\bigcap\limits_{\beta<a}H_\beta\neq\Phi$．但由 $H_\beta=\bigcap\limits_{r<\beta}\mathscr{F}_r$，从而有 $\bigcap\limits_{\beta<a}H_\beta=\bigcap\limits_{\beta<a}(\bigcap\limits_{r<\beta}\mathscr{F}_r)=\bigcap\limits_{\beta<a}\mathscr{F}_\beta=H_a$，即 $H_a\neq\Phi$．与A）矛盾。所以应有B）成立。但重复上述推理可得 $\bigcap\limits_{a<\omega}H_a\neq\Phi$ 即 $\cap\mathscr{F}\neq\Phi$ 与所设矛盾，故 2^z 是初始m-紧的。

本文得到笔者的老师方嘉琳教授的热情指导，谨此致谢。

正则空间的超空间中初始 m 紧性与局部初始 m 紧的等价性

设 $\mathbf{m} \geqslant \aleph_0$，拓扑空间 X 称为初始 $\mathbf{m}$ 紧的，只要每一个基数不超过 $\mathbf{m}$ 的开覆盖有有限子覆盖。在本文中设 X 为正则空间，2^X 表示 X 中所有非空闭子集合，赋与有限拓扑。

引理 1　在 2^X 中 $X \in \langle U_1, \cdots, U_m \rangle$，其中 U_i 在 X 中开。那么存在 X 中开集 $V_1, \cdots, V_n$，使 $X \in \langle V_1, \cdots, V_n \rangle \subset \langle U_1, \cdots, U_m \rangle$ 且 $\{\bar{V}_1, \cdots, \bar{V}_n\}$ 为 X 的既约覆盖。

引理 2　设 $\mathscr{F}$ 为 2^X 中闭集，$z \in V$，V 在 X 中开。若 $\mathscr{F} \cap \langle X, \bar{V} \rangle = \phi$，则集 $\mathscr{F}' = \{E \cup \{z\}; E \in \mathscr{F}\}$ 为 2^X 中闭集。

定理 1　设 $\mathbf{m} \geqslant \aleph_0$，则下述等价

1）2^X 是初始 $\mathbf{m}$ 紧的；

2）2^X 是局部初始 $\mathbf{m}$ 紧的；

3）存在 X 在 2^X 中邻域 $\mathscr{W}$ 使 $d_s x \mathscr{W}$ 是初始 $\mathbf{m}$ 紧。

董英咏　王世堃
（内蒙民族师范学院数学系，通辽）

参考文献：

1．方嘉琳，超空间论，东北一般拓扑研究会资料。
2．*E. Michacl, Topolgies on spaces of subsets, Trans Amer Math. Soc.* 71 (1951) 152—182.
3．*K. Kuratowski and A. Mostowski, Set Theory*

INITIAL m-COMPACTNESS AND LOCALLY INITIAL m-COMPACTNESS ARE EQUIVALENT IN HYPERSPACE OF REGULAR SPACE

Received July 5, 1984.

Let $\boldsymbol{m} \geqslant \aleph_0$, and a topological space X is said to be initial $\boldsymbol{m}$-compact as long as every open cover of which the cardinal number not exceed the $\boldsymbol{m}$ has finite subcover. In this letter, suppose that X is a regular space, 2^X denotes all nonempty closed subset with finite topology in X.

Lemma 1. *In 2^X, let $X \in \langle U_1 \cdots, U_m \rangle$. Here U_i is open in X, then there exist open sets $V_1, \cdots V_n$ in X such that $X \in \langle V_1, \cdots V_n \rangle \subset \langle U_1, \cdots, U_m \rangle$, and $\{\overline{V}_1, \cdots, \overline{V}_n\}$ is an irreducible cover of X.*

Lemma 2. *Let $\mathscr{F}$ be a closed set in 2^X. V is an open set in X and $z \in V$. If $\mathscr{F} \cap \langle X, \overline{V} \rangle = \phi$, then the set $\mathscr{F}' = \{E \cup \{z\} : E \in \mathscr{F}\}$ is closed in 2^X.*

Theorem 1. *Let $\boldsymbol{m} \geqslant \aleph_0$, then the following are equivalent.*

(i) *2^X is initial $\boldsymbol{m}$-compact;*

(ii) *2^X is locally initial $\boldsymbol{m}$-compact;*

(iii) *there is a neighborhood $\mathscr{W}$ of X in 2^X such that $\mathrm{Cl}_{2^X}\mathscr{W}$ is initial $\boldsymbol{m}$-compact.*

Dong Xiaoyong (董笑咏) and Wang Shikun (王世堃)

(*Department of Mathematics, Neimenggu Teachers' College for Nationalities, Tongliao*)

关于Давыдов定理的推广

张　益　谦

一、引　言

设给定函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n(|z|<1)$，其中 a_n 是复数。我们使用下列符号：

$$S_n=a_0+a_1+\cdots\cdots+a_n=S_n^{(0)}$$

$S_n^{(p)}(p>-1)$ 定义如下：

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n^{(p)}x^n=\frac{1}{(1-x)^{p+1}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$\sigma_n^{(p)}=\frac{S_n^{(p)}}{\binom{n+p}{p}}\quad\binom{n+p}{p}=\frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(p+1)}\quad(n=0,1,\cdots)$$

$\overline{G}$—z 平面上的闭凸集（闭凸域，直线，射线，线段，点）

G_ε—包含$\overline{G}$在其内的凸区域，且 G_ε 的边界点与$\overline{G}$的距离 $\xi\leqslant\varepsilon$。

Cesaro（齐查罗）求和：如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^{(p)}=S$，就说级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 用 p阶 Cesaro 方法[$(c;p)$—法]可求和，其和为 S，记作 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overset{(c;p)}{=\!=\!=}S$。

条件(A)：如果函数 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 解析，在闭圆 $|z-x_0|\leqslant 1-x_0$（任意 x_0，$0\leqslant x_0<1$）连续，则称函数 $f(z)$ 满足条件(A)。

条件(B)：如果函数 $f(z)$ 在圆 $|z-x_0|<1-x_0$ 有界，在点 $z=1$ 有放射边界值：

$$f(1)=\lim_{z\to 1}f(z),$$

则称 $f(z)$ 满足条件(B)。

定义1：如果对任意 $\varepsilon>0$，都有 $\lambda(\varepsilon)>1$ 序列 $[n_k,m_k](k=1,2,\cdots)$，n_k、m_k 是自然数，使得：

$$S_{n_k+i}\in G_\varepsilon,\quad i=1,2,\cdots,m_k-n_k,$$

$$\frac{m_k}{n_k}\geqslant\lambda(\varepsilon)>1\quad(k=1,2,\cdots),\quad\lim_{k\to\infty}n_k=+\infty$$

则称集合$\overline{G}$为关于序列$\{S_n\}$的(C)—集。

特别，如果(C)—集是点，我们就说这点是关于$\{S_n\}$的(C)—点。