配合普通高中课程标准实验教科书

導學評價

丛书主编 凯歌

数学

高中必修 5

适用于人教 A 版

责任编辑 李自典

星球地图出版社

新课标

丛书主编 凯歌

导学与评价

高中必修 5

数学

适用 人教A版

星球地图出版社

图书在版编目（CIP）数据

导学与评价：人教A版. 高中数学. 5：必修 / 凯歌编
—北京：星球地图出版社，2008.8
ISBN 978-7-80212-605-3
Ⅰ.导… Ⅱ.凯… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第104102号

丛书名	导学与评价（人教A版.数学.必修5）
丛书策划	金九州文化
丛书主编	凯 歌
责任编辑	李自典
出版发行	星球地图出版社
标准书号	ISBN 978-7-80212-605-3
社址	北京市北三环中路69号　　邮政编码 100088
联系电话	010—62052349
网址	www.starmap.com.cn
印刷厂	郑州文华印务有限公司
开本尺寸	880×1230　1/16
版次	2008年7月第1版
印次	2008年7月第1次印刷
印张	9.0
字数	406,900
定价	14.50元（书+检测题卷）

（如有印刷装订质量问题请与承印厂调换）
联系电话：010—62052349

主　编　田宝运

编　者　刘福明　　窦学法

曹仲会　　华明光

心愿

XINYUAN

国家基础教育课程改革已经全面启动，它给学科教材带来了实质性变革。自主、合作、探究、创新等新理念得到积极提倡和实行，教育、教学、考试也发生了重大变化，这引起全社会特别是教师和学生的广泛关注。为了帮助广大师生适应全新的课改理念，提高教育教学质量，我们由专家引领、一线教师执笔，特编写这套集新理念和新课标为一体、熔科学性与实用性为一炉的教辅丛书《导学与评价》。该丛书有以下特点：

1.最新的课改理念。丛书充分融入课改新理念和新课标要求，广泛汲取教育专家对课改的思想认识；着眼三维目标，注重人文、情感态度与价值观的渗透和融合；体现知识、能力、素质合一，方法、实践、创新一体。

2.全新的作者队伍。我们精心组织的所有作者全都来自新课标教材实验区，均为各地学科带头人，多为一线特高级教师；他们既有对新课标理念深刻的认识又有丰富的实际教育教学经验，他们用自己选择教辅、评判教辅的标准严格规范自己的写作。

3.科学的编排体例。丛书在体例设计时，充分遵循课改理念和吸收专家的教育智慧，充分考虑课堂教学的实际需要，注重学生自主学习和教师精要导学相结合，注重知识构建与能力提升相结合，注重素质培养、思维训练和考试能力相结合，从而达到科学性和实用性的完美统一。

【构筑知识桥梁】

总体解读章节或单元学习目标、重点难点和核心要求，概括说明，明确方向，激情导入，并提供教学方略。

【自主学习与知识构建】

学生自主梳理章节基础知识，整合知识结构，培养学生动手动脑的良好习惯，增强学生学习、思考的自觉性、积极性，并夯实基础。

【精要导学与方法策略】

阐述章节或单元重点知识、能力要点、思维体系，使学生立足基础，抓住关键，突破难点；精要讲解，言简意赅，重点突出，使学生准确把握核心内容，逾越思维障碍，走出思维误区；典型例题引导感悟，创设好题、新题，揭示思路方法和学习方略，讲练结合，学以致用，从而培养学生获取和解读信息、调动和运用知识、描述和阐释事物、论证和探讨问题的四维能力。

【迁移应用与探究创新】

针对重点知识和能力训练要求，精编习题，自练自查和探究创新相结合，梯度训练，循序渐进，以达到知识和能力的自然转化、过程和方法的有机统一、思维和素质的综合提升。

【回顾、思考、升华】

遵循系统性原理，整合、梳理章节知识，构建能力框架，把握规律；归纳专题考点，精选典型例题，充分体现基础能力和拓展综合要求；对近三年高考真题详尽解读，把握考查重点，明确能力发展方向。

4.新颖的成书模式。我们充分满足一线广大师生的需求，丛书各学科的“学生用书”将本章（单元）测试卷、综合测试卷独立成册，夹放在学科教辅书中，并提供“教师用书”，补充丰富的教学参考资料，方便老师们在教学过程中灵活使用。

编写一套师生满意的教辅资料是我们最大的心愿，为实现这个心愿，我们一直孜孜以求、精益求精。“精诚所至，金石为开”，我们这套教辅丛书，希望得到您的关注和厚爱！

《导学与评价》丛书编委会

星球地图出版社

二〇〇八年七月

DAOXUEYUPINGJIA
YUEDUSUOYIN

阅读索引

数学必修⑤(人教A版)

阅读索引

DAOXUEYUPINGJIA
YUEDUSUOYIN

第一章　解三角形

构筑知识桥梁
GOUZHUZHISHIQIAOLIANG

课程标准
KECHENGBIAOZHUN

· 知识与技能

通过对任意三角形边长和角度关系的探索，掌握正弦定理、余弦定理，并能解决一些简单的三角形度量问题. 能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

· 过程与方法

通过对任意三角形边角关系的探究，培养学生用方程的思想解决有关的三角形问题，培养学生综合运用知识的能力和解题的优化意识. 通过教师的正确引导，进一步培养学生把实际问题转化为数学问题，用数学方法解决实际问题的能力.

· 情感、态度与价值观

通过本章的学习，有助于培养学生的应用意识，提高学生认知事物的能力，激发学生的灵活性和创造性，使学生懂得解任意三角形的知识在实际问题中具有广泛的应用，懂得数学知识来源于现实生活，培养学生热爱生活、热爱自然的高尚情怀.

专题探究
ZHUANTITANJIU

本章知识在现实生活中有广泛的应用，如天文测量、航海测量、地理测量以及日常生活中的距离、高度、角度的测量等，解三角形的理论被用于解决许多测量问题. 而正弦定理和余弦定理揭示了关于一般三角形中的重要边角关系，它们是解三角形的两个重要定理，为解三角形提供了基本而重要的工具.

学法点津
XUEFADIANJIN

解三角形作为几何度量问题，要突出几何背景，注意数形结合思想的运用，具体解题时，要注意函数与方程思想的运用. 本章知识与初中学习的三角形的边、角关系有密切联系，学习时要注意与三角函数、平面向量等知识的联系，将新知识融入已有的知识体系提高综合运用知识的能力. 利用解三角形解相关的实际问题，关键是读懂题意，找出量与量之间的关系，根据题意作出示意图，将实际问题抽象成解三角形模型.

1.1　正弦定理和余弦定理

1.1.1　正弦定理

自主学习与知识构建

自主·预习·思考

1. 正弦定理:在一个三角形中,各边和它的对角的________相等,并且等于其外接圆直径,即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=$________.

2. 正弦定理可变形为$a=$________,$b=$________,$c=$________,也可变形为$a:b:c=$________.

3. 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做________.

4. 根据正弦定理,已知三角形中的两角和________,可求其余两边和另一角;已知三角形中的两边和________,可求其余两角和另一边.

5. 除教材给出的方法外,是否可以用其他方法证明正弦定理?

精要导学与方法策略

要点·剖析·突破

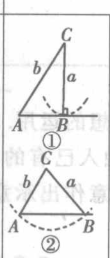
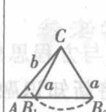
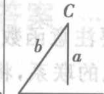
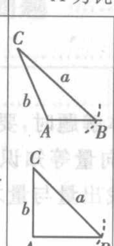
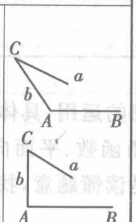
1. 正弦定理的应用极为广泛,它将三角形的边和角有机地联系起来,从而使三角形与几何产生联系,为求与三角形有关的量(如面积、外接圆、内切圆的半径等)提供了理论基础,也是判定三角形形状、证明三角形中有关等式的重要依据.

2. 解斜三角形的类型:

(1)已知两角与一边,用正弦定理,有解时,只有一解.

(2)已知两边及其中一边的对角,用正弦定理,可能有两解、一解或无解.

在△ABC中,已知a、b和A时,解的情况如下:

	A为锐角			A为钝角或直角	
图形					
关系式	①$a=b\sin A$ ②$a\geqslant b$	$b\sin A<a<b$	$a<b\sin A$	$a>b$	$a\leqslant b$
解的个数	一解	两解	无解	一解	无解

也可以如下判定:由"三角形中大边对大角"可知,若$a\geqslant b$,则$A\geqslant B$,从而B为锐角,有一解;若$a<b$,则$A<B$,此时,由正弦定理得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$:①$\sin B>1$,无解;②$\sin B=1$,一解;③$\sin B<1$,两解.

典题·引导·感悟

题型一　正弦定理的理解

例　在△ABC中,下列关系中一定成立的是　(　　)

A. $a<b\sin A$　　B. $a=b\sin A$

C. $a>b\sin A$　　D. $a\geqslant b\sin A$

引导:由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,∴ $\sin B=\frac{b}{a}\sin A$.

又∵ 在△ABC中,$0<\sin B\leqslant 1$,∴ $0<\frac{b}{a}\sin A\leqslant 1$.

∴ $a\geqslant b\sin A$.

答案:D

> **点拨**　在三角形中,判断边角之间的大小关系问题,可通过正弦定理转化为利用三角函数的有界性得到不等关系.

练一练　在△ABC中,一定成立的等式是　(　　)

A. $a\sin A=b\sin B$　　B. $a\cos A=b\cos B$

C. $a\sin B=b\sin A$　　D. $a\cos B=b\cos A$

题型二　正弦定理的简单应用

例1　已知在△ABC中,$a=\sqrt{3}$,$b=\sqrt{2}$,$B=45°$,求角A、C和边c.

引导:在△ABC中,已知两边和其中一边的对角解三角形,可先用正弦定理求出角A,利用$A+B+C=180°$,求得角C,进而求出边c.

解:由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∵ $a>b$,∴ $A=60°$或$A=120°$.

当$A=60°$时,$C=180°-45°-60°=75°$,

$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$;

当$A=120°$时,$C=180°-45°-120°=15°$,

$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

∴ $A=60°$,$C=75°$,$c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$或$A=120°$,$C=15°$,$c=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

> **点拨**　已知三角形的两边和其中一边的对角,求其余两角,此时解不确定,应注意分类讨论.

练一练　在△ABC中,已知$b=3$,$c=3\sqrt{3}$,$B=30°$,求角A、C和边a.

例2　在$\triangle ABC$中，若$a:b:c=1:3:5$，求$\dfrac{2\sin A-\sin B}{\sin C}$的值.

引导：由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$可得$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$，进而求得比值.

解：$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=1:3:5.$

不妨设$\sin A=x$，则$\sin B=3x$，$\sin C=5x$，

$\therefore \dfrac{2\sin A-\sin B}{\sin C}=\dfrac{2x-3x}{5x}=-\dfrac{1}{5}.$

> **点拨**　灵活应用正弦定理的变形，进行三角形的边角互化，利用比例的性质可使问题简单化.

练一练　已知$\triangle ABC$中三个内角的正弦之比为$4:5:6$，又三角形的周长为7.5，求其三边边长.

题型三　判断三角形的形状

例　在$\triangle ABC$中，三个内角A、B、C的对边分别是a、b、c，且$\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$.

求证：$\triangle ABC$是直角三角形.

引导：判断三角形的形状通常由三角形内角的关系确定，也可以由三角形的三边关系确定. 本题可考虑把边化为角，再找三角形角与角之间的关系，然后予以证明.

证明：根据正弦定理得$\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$，

$\therefore \sin A\cos A=\sin B\cos B$，即$\sin 2A=\sin 2B$.

$\therefore 2A=2B$或$2A=\pi-2B$.

又$\because \dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$，$\therefore b\neq a$，$\therefore A\neq B$.

$\therefore 2A=\pi-2B$，即$A+B=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{2}$.

$\therefore \triangle ABC$是直角三角形.

> **点拨**　已知三角形中的边角关系式，判断三角形的形状，可考虑使用正弦定理，把关系式中的边化为角，再进行三角恒等变换，求出三个角之间的关系式，然后给予判定. 在正弦定理的推广中，$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$是边化角的主要工具.

练一练　在$\triangle ABC$中，若$\dfrac{\cos A}{a}=\dfrac{\cos B}{b}=\dfrac{\cos C}{c}$，试判断$\triangle ABC$的形状.

思维·误区·警示

1. 已知三角形的两边及其中一边的对角，解三角形时，要注意解的个数的判断，做到不重不漏.

2. 正弦定理的另一个作用是能够进行边角互化，运用此法可根据条件判定三角形的形状或证明三角形中的公式，但要注意运用三角形和三角函数的有关知识.

迁移应用与探究创新

自练·自查·自评

1. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$A:B:C=1:2:3$，则$a:b:c$等于（　　）

A. $1:2:3$　　B. $2:3:4$

C. $3:4:5$　　D. $1:\sqrt{3}:2$

2. 在$\triangle ABC$中，已知$a=8$，$B=60°$，$C=75°$，则b等于（　　）

A. $4\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{6}$　　D. $\dfrac{32}{3}$

3. 在$\triangle ABC$中，$a\sin B=b\sin A$，则$\triangle ABC$是（　　）

A. 直角三角形　　B. 等边三角形

C. 钝角三角形　　D. 不能确定

4. 在$\triangle ABC$中，已知$a=5$，$B=105°$，$C=15°$，则此三角形的最大边的边长为________.

5. 已知$\triangle ABC$中，$c=10$，$A=45°$，$C=30°$，求a、b和B.

6. 已知$\triangle ABC$中，三边a,b,c所对的角分别是A,B,C且$a+c=2b$.
求证：$\sin A+\sin C=2\sin B$.

实践·探究·创新

1. 在$\triangle ABC$中，$a=5$，$b=3$，$C=120°$，则$\dfrac{\sin A}{\sin B}$的值为　(　　)

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{7}$　　D. $\frac{5}{7}$

2. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别是a,b,c，已知$A=\frac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，则c等于　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}-1$　　D. $\sqrt{3}$

3. 在$\triangle ABC$中，已知$2\sin A\cos B=\sin C$，那么$\triangle ABC$一定是　(　　)

A. 直角三角形　　B. 等腰三角形
C. 等腰直角三角形　　D. 正三角形

4. 在$\triangle ABC$中，若$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{b}$，则$\angle B$的值为　(　　)

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

5. 在$\triangle ABC$中，$A=60°$，$a=\sqrt{13}$，则$\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$等于　(　　)

A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{39}}{3}$　　C. $\frac{26\sqrt{3}}{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

6. 在$\triangle ABC$中，已知$BC=12$，$A=60°$，$B=45°$，则$AC=$______.

7. (1)在$\triangle ABC$中，已知$A=45°$，$B=30°$，$c=10$，求b；
(2)在$\triangle ABC$中，已知$A=45°$，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，求B.

8. 在$\triangle ABC$中，若$\sin A=2\sin B\cos C$，$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$. 试证明$\triangle ABC$为等腰直角三角形.

9. 如图1-1-1所示，D是直角$\triangle ABC$斜边BC上的一点，$AB=AD$，记$\angle CAD=\alpha$，$\angle ABC=\beta$.
(1)证明：$\sin\alpha+\cos 2\beta=0$；
(2)若$AC=\sqrt{3}DC$，求β.

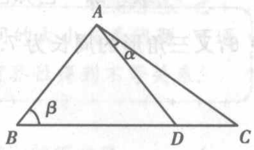


图 1-1-1

自我评价

通过以上的学习，你肯定收获多多，或许也有一些疑惑，你能把它记在下面吗？

____
____

1.1.2　余弦定理

自主学习与知识构建

自主·预习·思考

1. 余弦定理：三角形中任何一边的______等于其他两边的______减去这两边与它们的______的______，即

$a^2=$______，
$b^2=$______，
$c^2=$______.

2. 余弦定理的推论:

cos $A=$______________

cos $B=$______________

cos $C=$______________

3. 运用余弦定理可以解决两类解三角形问题.

(1)已知三边,求______________;

(2)已知__________和它们的__________,求第三边和其他两个角.

4. 小明是一位初中生,他在比例尺为 1∶4 300 000 的中国地图上量得 A 市距 B 市约 7.9 cm,B 市距 C 市约 4.4 cm,还测得 A 市到 B 市的直线与 B 市到 C 市的直线夹角为 81°. 现小明想知道 A 市到 C 市的实际距离,你能帮他算一算吗?

精要导学与方法策略

要点·剖析·突破

1. 余弦定理的理解

余弦定理揭示了任意三角形边角之间的客观规律,也是解三角形的重要工具. 在余弦定理中,每一个等式均含有四个量,利用方程的观点,可以知三求一. 余弦定理也为求三角形的有关量(如面积、外接圆、内切圆的半径等)提供了工具,它可以用来判定三角形的形状和证明三角形中的有关等式,在一定程度上,它比正弦定理的应用更加广泛.

2. 余弦定理适用的题型

(1)已知三边求三角,用余弦定理,只有一解;

(2)已知两边和它们的夹角,求第三边和其他的角,用余弦定理,必有一解.

3. 余弦定理用于判断三角形的形状

(1)在△ABC 中,若 $a^2<b^2+c^2$,则 $0°<A<90°$;反之,若 $0°<A<90°$,则 $a^2<b^2+c^2$.

(2)在△ABC 中,若 $a^2=b^2+c^2$,则 $A=90°$;反之,若 $A=90°$,则 $a^2=b^2+c^2$.

(3)在△ABC 中,若 $a^2>b^2+c^2$,则 $90°<A<180°$;反之,若 $90°<A<180°$,则 $a^2>b^2+c^2$.

典题·引导·感悟

题型一 已知三角形三边解三角形

例 已知△ABC 中,$a∶b∶c=2∶\sqrt{6}∶(\sqrt{3}+1)$,求△$ABC$ 各角的度数.

引导:由比例的性质可以引入一个字母 k,用 k 表示 a,b,c,再由余弦定理求各角.

解:∵ $a∶b∶c=2∶\sqrt{6}∶(\sqrt{3}+1)$,

∴ 令 $a=2k,b=\sqrt{6}k,c=(\sqrt{3}+1)k$.

由余弦定理得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6+(\sqrt{3}+1)^2-4}{2\times\sqrt{6}\times(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

∴ $A=45°$.

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{4+(\sqrt{3}+1)^2-6}{2\times2\times(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{2},$$

∴ $B=60°$.

∴ $C=180°-A-B=180°-45°-60°=75°$.

点拨 根据题目给出的条件 $a∶b∶c=2∶\sqrt{6}∶(\sqrt{3}+1)$,设 $a=2k,b=\sqrt{6}k,c=(\sqrt{3}+1)k$,为利用余弦定理求角创造条件,这是解答本题的关键一步. 应注意:在已知三边求三角时,一般先求小角,后求大角.

练一练 在△ABC 中,已知 $a=7,b=3,c=5$,求最大角和 $\sin C$ 的值.

题型二 已知两边和夹角解三角形

例 在△ABC 中,已知 $a=2,b=2\sqrt{2},C=15°$,求 A.

引导:本题中的条件是已知两边及其夹角,所以应从余弦定理入手.

解:由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=8-4\sqrt{3}$,

所以 $c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$,由正弦定理得 $\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{1}{2}$,

因为 $b>a$,所以 $B>A$,

又因为 $0°<A<180°$,∴ $A=30°$.

点拨 本题容易由 $\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{1}{2}$,得 $A=30°$ 或 150°.

练一练 在△ABC 中,已知 $a=8,B=60°,c=4(\sqrt{3}+1)$,解此三角形.

题型三 判断三角形的形状

例 在$\triangle ABC$中,已知$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$,且$2\cos A\sin B=\sin C$,试判断$\triangle ABC$的形状.

引导:判断三角形的形状时,一般有两种思路:一是利用三角形的三边关系,二是考虑三角形的内角关系,当然有时可将边和角巧妙地结合起来,同时考虑.

解法1:利用边的关系来判断.

由正弦定理得$\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{c}{b}$,

由$2\cos A\sin B=\sin C$,有$\cos A=\frac{\sin C}{2\sin B}=\frac{c}{2b}$.

由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\therefore \frac{c}{2b}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,即$c^2=b^2+c^2-a^2$,$\therefore a=b$.

又$\because (a+b+c)(a+b-c)=3ab$,

$\therefore (a+b)^2-c^2=3ab$.

$\therefore 4b^2-c^2=3b^2$,$\therefore b=c$,$\therefore b=c=a$.

$\therefore \triangle ABC$为等边三角形.

解法2:利用角的关系来判断.

$\because A+B+C=180°$,$\therefore \sin C=\sin(A+B)$.

又$\because 2\cos A\sin B=\sin C$,

$\therefore 2\cos A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$.

$\therefore \sin(A-B)=0$.

又A与B均为$\triangle ABC$的内角,$\therefore A=B$.

又由$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$得

$(a+b)^2-c^2=3ab$,

$\therefore a^2+b^2-c^2+2ab=3ab$,即$a^2+b^2-c^2=ab$.

由余弦定理得$\cos C=\frac{1}{2}$.又$0°<C<180°$,

$\therefore C=60°$,故$\triangle ABC$为等边三角形.

点拨 余弦定理和正弦定理一样,都是围绕着三角形进行边角互换的,所以在有关三角形的题目中,要有意识地考虑用哪个定理更合适,或是两个定理都要用.要抓住两个定理应用的信息.一般地,如果遇到的式子含角的余弦或是边的二次式,要考虑用余弦定理;反之,若遇到的式子含角的正弦或边的一次式,则大多用正弦定理;若是以上特征不明显,则两个定理都要考虑.

练一练 在$\triangle ABC$中,已知$\sin A=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$,试判断三角形的形状.

题型四 综合创新应用

例 在$\triangle ABC$中,A最大,C最小,且$A=2C$,$a+c=2b$.求此三角形的三边之比.

引导:要求三边之比,已知A与C的关系,可由正弦定理得$\cos C=\frac{a}{2c}$,再由余弦定理得出a、b、c的关系,结合$a+c=2b$的条件,使问题得到解决.

解:在$\triangle ABC$中,由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sin 2C}{\sin C}=2\cos C$,即$\cos C=\frac{a}{2c}$.

由余弦定理得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

$$\because 2b=a+c,\therefore \frac{a}{2c}=\frac{a^2-c^2+\frac{1}{4}(a+c)^2}{2a\cdot\frac{a+c}{2}}.$$

整理得$2a^2-5ac+3c^2=0$,解得$a=c$或$a=\frac{3}{2}c$.

$\because A>C$,$\therefore a>c$.

$\therefore a=\frac{3}{2}c$,$\therefore b=\frac{1}{2}(a+c)=\frac{5}{4}c$.

$\therefore a:b:c=\frac{3}{2}c:\frac{5}{4}c:c=6:5:4$.

故此三角形的三边之比为$6:5:4$.

点拨 在应用正、余弦定理解三角形时,常用到三角函数的有关公式,体现了它们之间的联系.本题中通过解方程求出a与c的关系,体现了余弦定理与方程的联系.

练一练 在$\triangle ABC$中,$BC=a$,$AC=b$,a、b是方程$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$的两根,且$2\cos(A+B)=1$,求AB的长.

思维·误区·警示

1.余弦定理的每一个等式中都包含四个不同的量,知道其中的三个量便可求出第四个量.识记余弦定理时应注意字母的轮换性,把握公式的特点.

2.运用余弦定理判断三角形的形状时,往往将角转化为边进行化简,化简的过程中注意不要随便约分,以免漏解.

迁移应用与探究创新

自练·自查·自评

1.在$\triangle ABC$中,若C为钝角,则下列结论成立的是 ( )

A.$a^2+b^2>c^2$

B.$a^2+b^2<c^2$

C. $a^2+b^2=c^2$

D. a^2+b^2 与 c^2 的关系不确定

2. 在$\triangle ABC$中，$B=60^\circ$，$b^2=ac$，则$\triangle ABC$是（　）

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 等腰三角形　　D. 等边三角形

3. 在$\triangle ABC$中，$AB=3$，$BC=\sqrt{13}$，$AC=4$，则边AC上的高为（　）

A. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$　B. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$　C. $\frac{3}{2}$　D. $3\sqrt{3}$

4. 在$\triangle ABC$中，$a=b+2$，$b=c+2$，最大角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，则三边边长分别为______.

5. 在$\triangle ABC$中，已知$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，求$\triangle ABC$的最大内角.

6. 在$\triangle ABC$中，求证：

$a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C)$.

实践·探究·创新

1. 在$\triangle ABC$中，已知$a^2=b^2+bc+c^2$，则角A等于（　）

A. $\frac{\pi}{3}$　B. $\frac{\pi}{6}$　C. $\frac{2}{3}\pi$　D. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2}{3}\pi$

2. 三角形的两边分别为5和3，它们夹角的余弦值是方程$5x^2-7x-6=0$的根，则三角形的另一边长为（　）

A. 52　B. $2\sqrt{13}$　C. 16　D. 4

3. 在$\triangle ABC$中，若$a\cos A+b\cos B=c\cos C$，则这个三角形一定是（　）

A. 等边三角形

B. 斜三角形

C. 以c为斜边的直角三角形

D. 以a或b为斜边的直角三角形

4. 已知等腰$\triangle ABC$的腰为底的2倍，则顶角A的正切值是（　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\sqrt{3}$　C. $\frac{\sqrt{15}}{8}$　D. $\frac{\sqrt{15}}{7}$

5. 在$\triangle ABC$中，$a=1$，$b=1$，$C=120^\circ$，则$c=$______.

6. $\triangle ABC$中，已知$\sin A=\frac{3}{5}$，$\sin A+\cos A<0$，$a=5\sqrt{3}$，$b=5$，求c.

7. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别是a,b,c，已知$b^2=ac$，且$a^2-c^2=ac-bc$.

(1)求角A的大小；

(2)求$\frac{b\sin B}{c}$的值.

8. 四边形$ABCD$中，$BC=a$，$DC=2a$，四个内角A、B、C、D的度数之比为$3:7:4:10$，求AB的长.

自我评价

通过以上的学习，你肯定收获多多，或许也有一些疑惑，你能把它记在下面吗？

____

____

____

1.2　应用举例

自主学习与知识构建

自主·预习·思考

1.距离问题

(1)测量从一个可到达的点到一个不可到达的点之间的距离问题(如图 1-2-1).

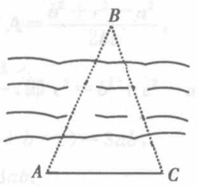


图 1-2-1

这实际上就是已知三角形的两个角和一边解三角形的问题,用__________________就可解决问题.

(2)测量两个不可到达的点之间的距离问题(如图 1-2-2).

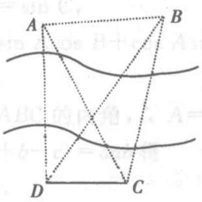


图 1-2-2

首先把求不可到达的两点 A、B 之间的距离转化为应用__________________求三角形的边长问题,然后把未知的 BC 和 AC 的问题转化为测量可到达的一点与不可到达的一点之间距离问题.

2.高度问题

测量底部不可到达的建筑物的高度问题.由于底部不可到达,这类问题不能直接用解直角三角形的方法解决,但常用__________________计算出建筑物顶部或底部到一个可到达的点之间的距离,然后转化为解直角三角形的问题.

3.角度问题

测量角度就是在三角形内,利用正弦定理和余弦定理,求角的__________________,然后求角,再根据需要求所求的角.

4.几何计算问题

在$\triangle ABC$中,边 BC,CA,AB 上的高分别记为 h_a,h_b,h_c,则 $h_a=$__________$=$__________,$h_b=$__________$=$__________,$h_c=$__________$=$__________.

5.某地出土一块类似三角形刀状的古代玉佩,其一角已破损(如图 1-2-3).现测得如下数据:$BC=2.57$ cm,$CE=3.57$ cm,$BD=4.38$ cm,$B=45°$,$C=120°$,为了复原,请计算原玉佩两边的长.(结果精确到 0.01 cm)

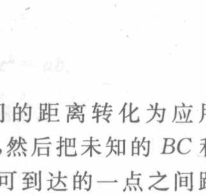


图 1-2-3

精要导学与方法策略

要点·剖析·突破

1.用正弦定理和余弦定理解三角形的常见题型有:测量距离问题、测量高度问题、计算面积问题、航行问题、物理问题等.

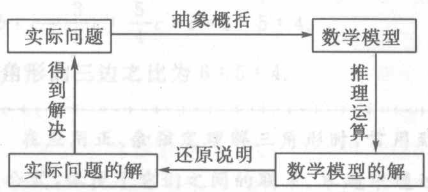
(1)测量距离问题:这类问题的情境一般属于"测量有障碍物相隔的两点间的距离",在测量过程中,要根据实际需要选取合适的基线长度,测量工具要有较高的精确度.

(2)测量高度问题:这类问题的情境属于"测量底(顶)部不能到达的物体的高度",测量中,要注意选取适当不同的测量点,使测量有较高的精确度.

(3)测量角度问题:这类问题的情境属于"根据需要,对某物体定位",测量数据越精确,定位精度越高.

2.(1)解三角形应用题的步骤:

解三角形在实际应用中非常广泛,如测量、航海、几何、物理等方面都要用到解三角形的知识,解题时应认真分析题意,做到算法简练,算式工整,计算准确.其解题的一般步骤是:①准确理解题意,分清已知与所求,尤其要理解应用题中的有关名词和术语;②画出示意图,并将已知条件在图形中标出;③分析与研究与问题有关的一个或几个三角形,通过合理运用正弦定理和余弦定理正确求解.



(2)解三角形应用题的基本思路:

实际问题$\xrightarrow{\text{画图}}$数学问题$\xrightarrow{\text{解三角形}}$数学问题的解$\xrightarrow{\text{检验}}$实际问题的解.

(3)与三角形有关的基本概念:

在解决与三角形有关的实际问题时,经常出现一些有关的名词、术语,如仰角、俯角、方位角、方向角、铅直平面等:

①铅直平面是指与海平面垂直的平面.

②仰角与俯角是指在同一铅直平面内,视线与水平线的夹角.当视线在水平线之上时,称为仰角.当视线在水平线之下时,称为俯角(如图 1-2-4 所示).

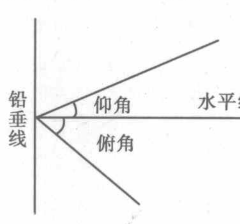


图 1-2-4

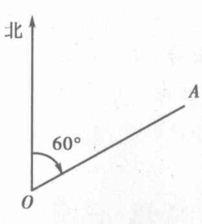


图 1-2-5

③方位角:从指北方向线顺时针到目标方向线的水平角,如方位角是 60°的图形如图 1-2-5 所示.

④方向角:相对于某一正方向的水平角,如北偏东 60°的图形,如图 1-2-5 所示.

典题·引导·感悟

题型一　测量距离问题

例　如图 1-2-6,某货轮在 A 处看灯塔 B 在货轮的北偏东 75°,距离为 $12\sqrt{6}$ n mile,在 A 处看灯塔 C 在货轮的北偏西 30°,距离为 $8\sqrt{3}$ n mile,货轮由 A 处向正北航行到 D 处时,再看灯塔 B 在北偏东 120°,求:(1)A 处与 D 处的距离;(2)灯塔 C 与 D 处的距离.

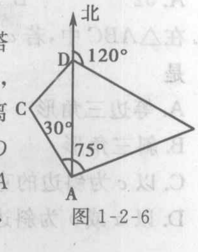


图 1-2-6

引导：(1)要求 AD 的长，在 $\triangle ABD$ 中，$AB=12\sqrt{6}$，$\angle B=45°$，可由正弦定理求解.(2)要求 CD 的长，在 $\triangle ACD$ 中，可由余弦定理解决.

解：(1)在 $\triangle ABD$ 中，$\angle ADB=60°$，$\angle B=45°$，

由正弦定理得 $AD=\dfrac{AB\sin B}{\sin\angle ADB}=\dfrac{12\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=24$(n mile).

(2)在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理得

$CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cos 30°$，解得 $CD=8\sqrt{3}$(n mile)

即 A 处与 D 处的距离为 24 n mile，灯塔 C 与 D 处的距离为 $8\sqrt{3}$ n mile.

点拨 利用正弦定理、余弦定理可以求得两个不可到达点之间的距离.

练一练 某炮兵阵地位于 A 点，两观察所分别位于 C、D 两点，已知 $\triangle ACD$ 为正三角形，且 $DC=\sqrt{3}$ km，当目标出现在 B 时，测得 $\angle BCD=75°$，$\angle BDC=45°$. 求炮兵阵地距目标的距离.

题型二 测量高度问题

例 如果要测量某铁塔 PO 的高度，但不能到达铁塔的底部，在只能使用简单的测量工具的前提下，你能设计出哪些测量方法？并提供每种方法的计算公式.

引导：要测量铁塔的高度，只能在铁塔底部所在平面上选取两点，量出两点间的距离，再测量出有关角，从而构造三角形求解.

解：测量方法一：

在地面上引一条基线 AB，这条基线和塔底在同一水平面上，且延长后不过塔底，测出 AB 的长，用经纬仪测出角 β、γ 和 A 对塔顶 P 的仰角 α 的大小，则可求出铁塔 PO 的高.

计算方法如下：

如图 1-2-7 所示，在 $\triangle ABO$ 中，由正弦定理得

$AO=\dfrac{AB\sin\gamma}{\sin[180°-(\beta+\gamma)]}=\dfrac{AB\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$.

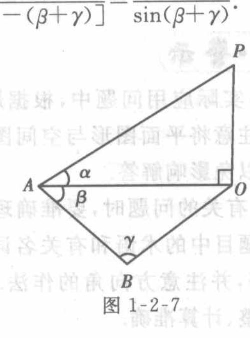


图 1-2-7

在 Rt$\triangle POA$ 中，$PO=AO\tan\alpha$，

$\therefore\ PO=\dfrac{AB\sin\gamma\tan\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}$.

测量方法二：

在地面上引一条基线 AB，这条基线与塔底在同一水平面上，并使 A、B、O 三点在一条直线上，测出 AB 的长和 A、B 对塔顶 P 的仰角 α、β，则可求出铁塔 PO 的高.

计算方法如下：

如图 1-2-8 所示，在 $\triangle PAB$ 中，由正弦定理得

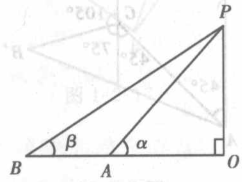


图 1-2-8

$PA=\dfrac{AB\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$，

在 Rt$\triangle POA$ 中，$PO=PA\sin\alpha$，

$\therefore\ PO=\dfrac{AB\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

测量方法三：

在地面上引一条基线 AB，这条基线与塔底在同一水平面上，且 AB 不过点 O. 测出 AB 的长、张角 $\angle AOB$(设为 θ)及 A、B 对塔顶 P 的倾角 α、β 的大小.

计算方法如下：

如图 1-2-9 所示，在 Rt$\triangle POA$ 中，$AO=PO\cot\alpha$，

在 Rt$\triangle POB$ 中，$BO=PO\cot\beta$，

在 $\triangle AOB$ 中，由余弦定理得

$OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\theta=AB^2$，

$\therefore\ PO=\dfrac{AB}{\sqrt{\cot^2\alpha+\cot^2\beta-2\cot\alpha\cdot\cot\beta\cdot\cos\theta}}$.

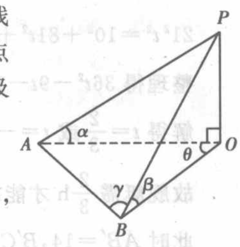


图 1-2-9

点拨 根据题意正确画出图形是解题的关键. 同时，空间图形和平面图形要区分开，以免影响解答.

练一练 如图 1-2-10，测量河对岸的塔高 AB 时，可以选与塔底 B 在同一水平面内的两个测点 C 与 D，现测得 $\angle BCD=\alpha$，$\angle BDC=\beta$，$CD=S$，并在点 C 测得塔顶 A 的仰角为 θ. 求塔高 AB.

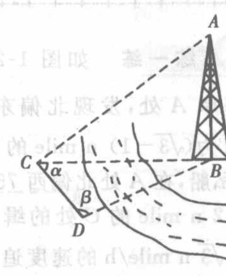


图 1-2-10

题型三　测量角度问题

例　某渔轮在航行中不幸遇险，发出呼救信号，我海军舰艇在 A 处获悉后，立即测出该渔轮在方位角为 $45°$，距离为 10 n mile的 C 处，并测得渔轮正沿方位角为 $105°$ 的方向，以 9 n mile/h的速度向小岛靠拢，我海军舰艇立即以 21 n mile/h 的速度前去营救，求舰艇的航向和靠近海轮所需要的时间.

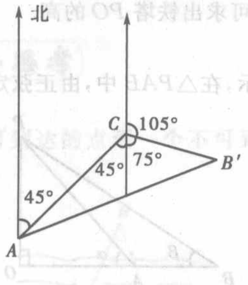


图 1-2-11

引导：首先根据题意画出图形，如图 1-2-11 所示，由题意可知 $AC=10$，$\angle ACB'$ 为 $120°$，再利用舰艇靠近海轮所需的时间与渔轮用的时间相同，若设相遇点为 B'，这样解 $\triangle AB'C$ 即可.

解：设所需时间为 t(h)，则 $AB'=21t$，$CB'=9t$.

在 $\triangle AB'C$ 中，根据余弦定理，有

$AB'^2=AC^2+B'C^2-2AC\cdot B'C\cdot\cos 120°$，可得

$21^2t^2=10^2+81t^2+2\times10\times9t\cdot\frac{1}{2}$，

整理得 $36t^2-9t-10=0$，

解得 $t=\frac{2}{3}$ 或 $t=-\frac{5}{12}$(舍去).

故舰艇需 $\frac{2}{3}$ h才能靠近渔轮.

此时 $AB'=14$，$B'C=6$.

由正弦定理得 $\frac{B'C}{\sin\angle CAB'}=\frac{AB'}{\sin 120°}$，

$\therefore \sin\angle CAB'=\frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，$\therefore \angle CAB'\approx21.8°$.

$\therefore$ 舰艇航行的方位角约为 $66.8°$.

点拨　解本题的关键是根据实际，找出等量关系，利用余弦定理列出方程.在画示意图时，要注意方向角的作法.

练一练　如图 1-2-12 所示，在海岸 A 处，发现北偏东 $45°$ 方向，距 A 为 $(\sqrt{3}-1)$ n mile 的 B 处有一艘走私船，在 A 处北偏西 $75°$ 方向，距 A 为 2 n mile 的 C 处的缉私船奉命以 $10\sqrt{3}$ n mile/h 的速度追截走私船，此时走私船正以 10 n mile/h 的速度从 B 处向北偏东 $30°$ 方向逃窜.问缉私船沿什么方向能最快追上走私船，并求出所需要的时间.

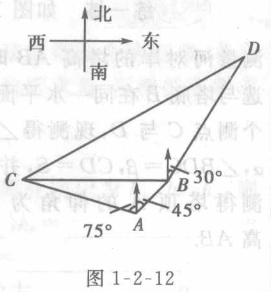


图 1-2-12

题型四　解决几何问题

例　如图 1-2-13 所示，半圆 O 的直径为 2，A 为直径延长线上的一点，$OA=2$，B 为半圆上任意一点，以 AB 为一边作等边三角形 ABC，当点 B 在什么位置时，四边形 $OACB$ 的面积最大.

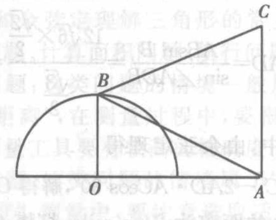


图 1-2-13

引导：四边形的面积由点 B 的位置唯一确定，而点 B 由 $\angle AOB$ 唯一确定，因此可设 $\angle AOB=\alpha$，再用 α 的三角函数来表示四边形 $OACB$ 的面积.

解：设 $\angle AOB=\alpha$，在 $\triangle AOB$ 中，由余弦定理得

$AB^2=1^2+2^2-2\times1\times2\cos\alpha=5-4\cos\alpha$，

于是，四边形 $OACB$ 的面积为

$S=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$

$=\frac{1}{2}\times2\times1\times\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}(5-4\cos\alpha)$

$=\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+\frac{5}{4}\sqrt{3}=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5}{4}\sqrt{3}$.

$\because 0<\alpha<\pi$，

$\therefore$ 当 $\alpha-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，$\alpha=\frac{5}{6}\pi$，即 $\angle AOB=\frac{5\pi}{6}$ 时，四边形 $OACB$ 的面积最大.

点拨　(1)熟悉各类图形的面积公式，合理设出未知量，把所求面积转化为所设未知量的函数.

(2)已知三角形的边和角，往往利用余弦定理，求未知边或寻求与未知边的关系.

练一练　已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $AB=2$，$BC=6$，$CD=DA=4$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

思维·误区·警示

1.在解三角形的实际应用问题中，根据题意正确画出图形是解题的关键，同时注意将平面图形与空间图形区别开来，要有画立体图形的意识，以免影响解答.

2.解决与测量角有关的问题时，要准确理解题意，分清已知与所求，尤其要理解题目中的术语和有关名词，如坡度、仰角、俯角、象限角、方位角等，并注意方向角的作法.演算过程中，要做到算法简练、算式工整、计算准确.