新课标

高中数学

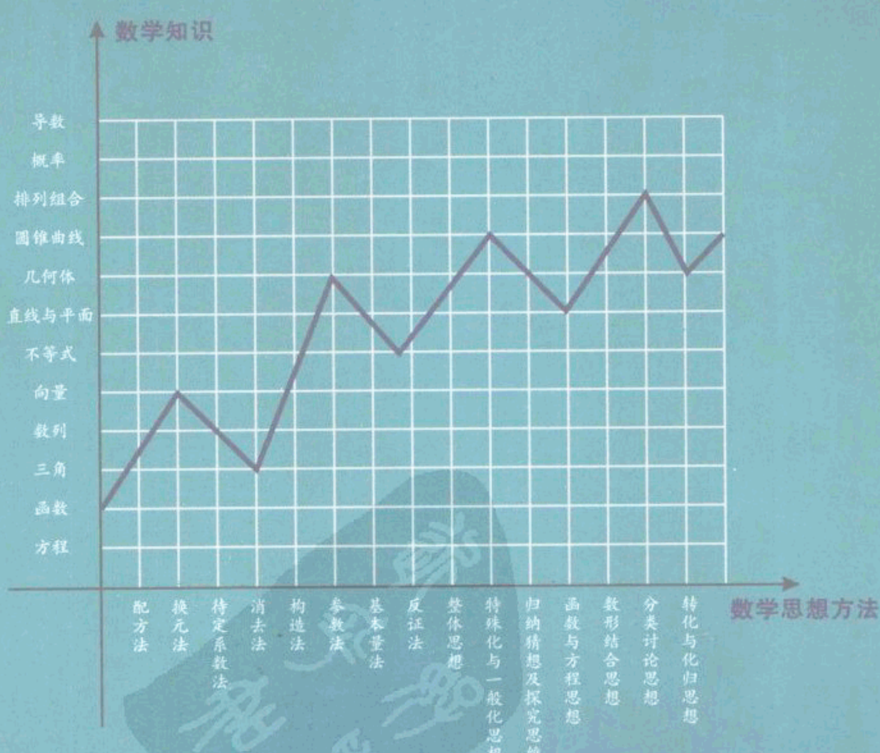
GAO ZHONG SHU XUE

坐标新思维

ZUO BIAO XIN SI WEI

主编 吴四周

1



武汉出版社

与高中生谈数学的学习

同学们，欢迎你们在茫茫书海中选择了本书，希望它能够成为你们学习高中数学的好帮手.

在大家使用这本书学习数学之前，对于什么是数学，如何才能学好数学等问题，我有一些观点与你们交流.

什么是数学？对于这个问题有人作过一项调查，调查的结果是：76%的学生认为数学就是计算、公式、法则、证明；20%的学生认为数学就是“烦、没意思、成绩不及格”的代名词；4%的学生认为数学使人聪明、有趣、有用.这个结果很有代表性，反映了同学们对数学的本质缺乏正确全面的认识.下面我们从三个方面谈谈对这个问题的认识.

这句话形象地说明了数学是研究思维、培养和发展思维的一门科学.数学中的逻辑思维、形象思维、辩证思维、归纳思维、演绎思维、转化思维、逆向思维、类比思维等可以说是无时不有，无处不在.没有思维就没有数学.想必同学们对我国古代“曹冲称象”、“司马光砸缸”、“鲁班发明锯”这三个故事耳熟能详.我们在为他们的聪明才智惊叹的同时，仔细想一想这三个故事所蕴含的思维本质，不正是数学中的“等价转化思维”、“正难则反的逆向思维”、“联想与类比思维”的运用吗？可见，数学在形成人类理性思维和促进个人发展的过程中发挥着独特的、不可替代的作用.

数学是科学界的通用语言，用数学语言所表达的数量关系、数学规律、思想方法是一切科学技术的基础.自然科学中的规律，如牛顿的力学定律和万有引力定律以及爱因斯坦的质能方程 $E=mc^2$，从本质上讲就是数学规律.经济学中的很多规律也是用数学的表达方式来描述的，马克思为完成《资本论》还深钻数学.数学是科学的皇后，是通向科学大门的钥匙.

数学作为理性的化身，它的内容、思想、方法和语言已经融入人们的日常工作和生活中.当今的时代是以计算机为代表

的信息文明时代,作为数学产物的计算机技术已广泛应用到国民生产的各个领域和部门,以数学为特征的各种产品,如“数字电视”、“数码相机”、“数字通讯”等等已成为人们的消费时尚.可以说信息时代就是数学时代.数学对人类文明作出了巨大的贡献.

由上对数学本质的认识,我们深刻地感受到:数学素养是现代公民必须具备的基本素养.那么,如何才能学好数学呢?

首先应树立信心,培养学习数学的兴趣. 经过初中三年的学习,学生已经基本熟练掌握了初中数学知识,并对其中的一些数学思想、方法有所体会.但高中知识无论从深度还是广度都比初中有所加强,在学习中感到有一定的困难是正常的.这时树立信心是最重要的,不要着急,要有耐心,把基本的东西想清楚,逐步培养自己对数学的兴趣,这样你会慢慢地喜欢数学,同时她也会给你带来乐趣.

其次应养成良好的思维习惯,**强化问题意识**. 在高中数学的学习中,同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力,提高思考问题的能力,还应保持永不满足的好奇心,大胆地发现问题、提出问题、养成“问题意识”和交流的习惯,这对你们将来的发展是非常重要的.

最后我祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功!

吴四周

本书理念与特色

教育部颁布的《普通高中数学课程标准(实验)》,从2004年秋季在广东等四省开始实施到2009年全国实行.这标志着我国基础教育真正进入一个崭新的课改时代.面对这一新的形式,飞舟图书策划中心积极探索,勇于实践,同时组织广大飞舟特约教研员反复调研,多方论证.这本全面诠释数学教学新理念,对高中生有独特学习价值的书终于和大家见面了.我们坚信:本书全新的编写理念会带给你的定是耳目一新之感.敬请关注下面介绍.

一、创设"数学坐标新思维"理念引领学生学数学

在数学的学习过程中,你是否有过如下的困惑:老师讲的数学概念、定理、例题一听就懂,一看就会,但自己为何总是一做就错,一放就忘呢?做了大量的数学习题,数学成绩为何还是没多大提高?面对如此困惑,既值得我们学生深思,也同样值得我们教师深思.问题的根源在哪里?新课标对此作出了明确的回答:教学不能仅停留于对教材的复述,要有提炼加工,要探索学生的认知规律,要努力揭示知识的形成过程和数学思想方法的孕育.作为学生,对数学知识与数学思想方法要亲历自己的思路探究、思维加工过程.做题不能追求数量,而要讲究质量.要学会以点带面,多角度理解数学问题,要学会总结解题规律,剖析解题误区,只有这样才能跳出题海怪圈.

为了实践新课标,本中心经过多年的教研探索,创设了"数学坐标新思维"的教学理念,在解决学生面临的困惑,引领学生学好数学等方面收到了相当不错的效果.所谓"数学坐标新思维"理念,就是借鉴数学中的"坐标"概念,使数学思维形象化、网络化.若把数学知识设定为坐标纵轴,把数学思想方法设定为坐标横轴,那么每一个数学问题就可看作是数学知识与数学思想方法的交汇点.如:

问题1 解方程 $x^2+2x-7=0$.

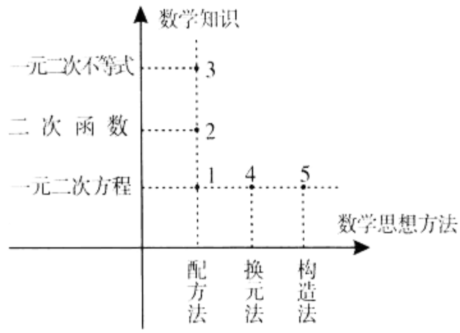
问题2 求二次函数 $y=x^2+x-7(x\leqslant-\frac{1}{2})$ 的最小值.

解关于 x 的不等式 $x^2+x-a>0$.

解方程 $(x-2)^4+2(x-2)^2-3=0$.

已知 $p^2-p-1=0$，$\frac{1}{q^2}-\frac{1}{q}-1=0$，求 $\frac{pq+1}{q}$ 的值.

坐标思维图可表示为



通过构建坐标思维图，把问题 1~5 之间的内在联系揭示出来了，从而使数学知识、思维、方法实现三位一体，纵横贯通.学生只要长期坚持这种思维训练，解题能力定会得到显著提高.

学习始于疑问.在本书中，我们一有机会就提问题，以问题为中心，引导学生在“思考”、“探究”、“反思”等活动中去发现问题、提出问题、解决问题.在解题过程中我们需要经常反思以下问题：

(1)本题的条件和结论是什么？本题考查了哪些知识点？

(2)你见过与本题有关的问题吗？能否想到一个更特殊的问题？更一般的问题？一个类似的问题？

(3)如果适当改变本题的条件或结论，问题将会出现怎样的变化？

(4)解题中运用了哪些数学思想方法？

(5)本题还有没有别的解法？

(6)你能检验解题结果吗？能说出你解题过程中的思维回路吗？

(7)能否把这一结果或方法迁移到别的问题上去？

(8)能否把结果或方法加以引申、推广？命题的逆命题成立吗？

同学们一定要学会反思.反思是训练思维、优化思维品质的极好方法，是掌握数学知识、提高数学素养的有效途径.

随着初中数学新课标的实行,义务教育阶段要求有所降低,但高中阶段的出口要求并没有降低,于是初中数学与高中数学出现了衔接问题,其主要表现在以下几个方面:

(1)关于配方法,新课标只要求“会用配方法解简单的数字系数的一元二次方程”. 但配方法在高中数学求二次函数的值域等方面有着十分广泛的应用.

(2)分解因式方面减少了公式,乘法公式只有两个(平方差、完全平方公式),没有立方和、差公式.要求降低,只要求用提公因式法、公式法分解因式.对十字相乘法、分组分解法新课标不作要求而在高中数学中证明函数的单调性、解方程(组)、不等式、三角恒等变换等均经常用到.

(3)一元二次方程根的判别式、根与系数关系(韦达定理)、二元二次方程组在新课标中已消失,而高中的直线与圆锥曲线的综合应用常常涉及到.

(4)新课标只要求学生会求有理数的绝对值,规定绝对值符号内“不含字母”. 那“绝对值符号内含字母”的怎么办? 现行的初、高中教材均未对它负责,这严重影响高中的不等式、函数、方程等含参问题的解答.

(5)根式的运算比较薄弱,特别是分母有理化已不作要求,这样对代数恒等变换和求圆锥曲线标准方程都有影响.

(6)多项式相乘仅指一次式相乘,这会对高中阶段二项式定理及其相关内容的教学带来诸多不便.

多年的教学经验告诉我们,对高一学生来说,不仅存在初、高中数学知识的衔接问题,更为重要的是,还存在初中的数学思维方式与高中的数学思维方式的衔接问题.主要表现为静止性思维突出,缺乏运动性思维;思维表面化,缺乏深刻性和变通性;对常见数学思想缺乏理解与认识.针对这一现状,本书第一部分设定为“数学思想方法”篇,编写思路为用高中常见数学思想方法分析、归纳并增补与高中密切相关的初中内容,使高一学生从　　　　　　尽快上升到高中数学的学习层面上来.

新课标高中数学内容分为必修和选修两部分,模块教学要求小步走,螺旋式上升.但这样一来章、节之间有紧密逻辑衔接关系的知识被分散到不同的模块中,使知识体系被打乱,导致有些问题教师讲不清,学生也学不透.现行几种高中新课标教材版本共同存在的课程体系问题主要有:

(1)一元二次不等式是初、高中数学衔接的重要内容,在集合、函数中有着十分广泛的应用,但这部分内容在《数学5》才出现.

（2）高一学习逻辑语言，可以使学生的数学思维更有序、推理更严密、表达更清楚，且集合中的“交”、“并”、“补”与逻辑语言中的“且”、“或”、“非”有着不可割裂的天然联系，可新课标教材却把逻辑语言作为选修内容.

（3）在《数学 2》“立体几何初步”中，三垂线定理及其逆定理被删除，但练习中却常常要用到该定理，因而学生只有一次次地重复论证三垂线定理，这是不是更加重了学生的负担呢？

（4）圆本来是圆锥曲线的一种，可新课标教材将它与椭圆、双曲线、抛物线“骨肉”分离. 在学习完圆的方程后，当学生问到二元二次方程的一般形式表示哪些曲线？教师怎么回答？一年后学生再来学习和探讨这类问题，他们的兴趣和激情锐减，教学效果肯定会大打折扣.

针对新课标教材的这些问题，本书打破模块之间时间上的先后次序，适当作了一些调整，以完善数学知识体系使其更符合学生的认知规律.

五、新颖的编写体例与独特的编写风格

本书在编写体例上打破大多数教辅图书三段式的编写模式：知识梳理→例题讲解→习题训练.大胆创新，编写体例设计为菜单模式.在“数学思想方法篇”部分，以初中知识为载体，讲解十五种常见数学思想方法；在“高中数学专题篇”部分，以数学知识、方法为主线，把高中数学分解成 100 个专题（本套书共 4 册，本册只讲 15 个专题）.不受各地版本与教学进度的限制，学生可自主选择专题学习探究.对于每个专题，精心设计几道承载该专题知识与方法的典型例题，然后以“坐标新思维”理念引导学生思考、探究、归纳与反思，最后针对每道例题设计“一对一”的迁移训练题，希望学生通过迁移训练“跳一跳可以摘到桃子”，从而实现思维坐标的迁移.

六、整合学习交流互动平台

为了更好实践新课标要求的自主、探究与合作交流的学习方式，同时实现本书倡导的“坐标新思维”的教学理念，本中心推出教研与学习交流网站——咸宁飞舟网.同学们在数学学习过程中如有疑问，请登陆 www.hbxnfz.com，飞舟特约教研员将在网上为你答疑解惑.

本书是我们全体参编人员智慧与汗水的结晶，希望广大高中学子能真正从中受益.并希望大家在学习过程中提出宝贵的改进意见.

本书编委会

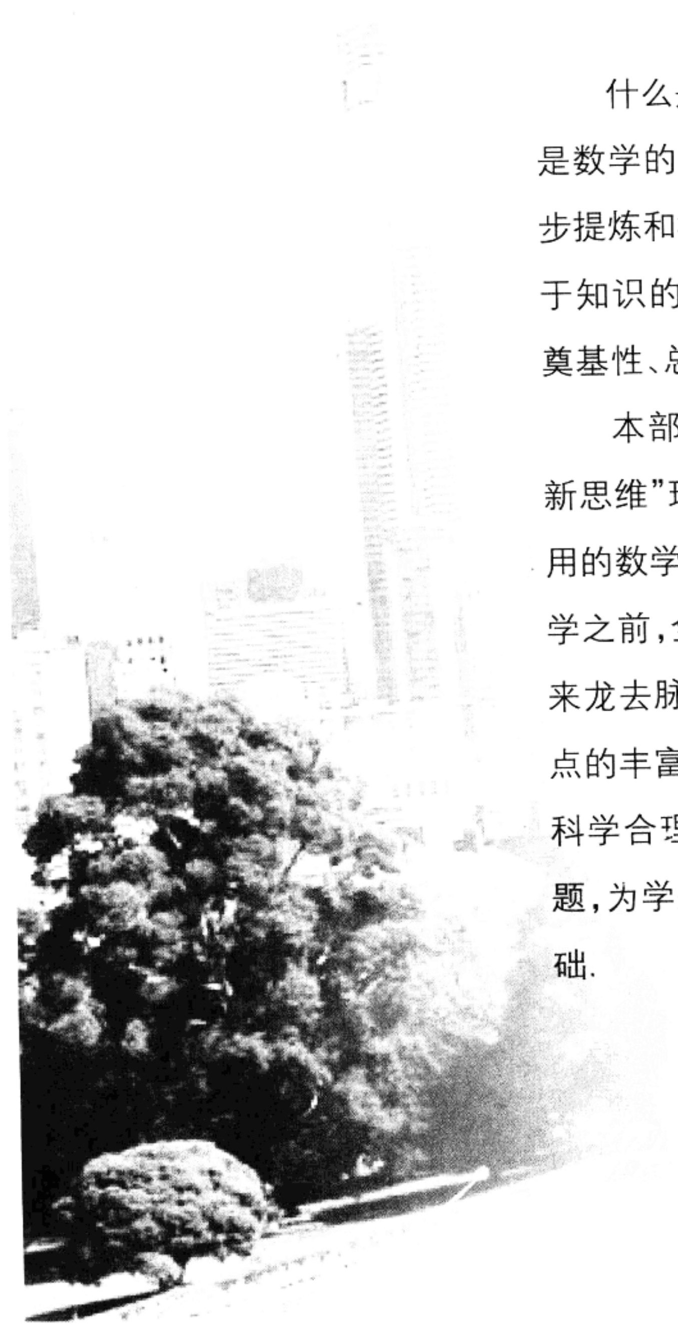
2008 年 7 月

目 录

第一部分 数学思想方法篇

第二部分 高中数学专题篇

第一部分　数学思想方法篇



什么是数学思想方法？数学思想方法是数学的灵魂和精髓，是对数学知识进一步提炼和概括后产生的本质认识．它蕴含于知识的形成、发展和应用过程中，具有奠基性、总结性、最广泛应用性等特点．

本部分以初中知识为载体，以“坐标新思维”理念向学生重点讲解了十五种常用的数学思想方法．使学生在学习高中数学之前，全面系统地掌握数学思想方法的来龙去脉，并深刻理解初中数学重要知识点的丰富内涵，并吃透它的思想实质．这样科学合理地处理初、高中数学的衔接问题，为学生高中阶段的学习打下坚实的基础．

一、配方法

请思考下面问题，并构建坐标思维图.

例 1 设 $a<b<0$，$a^2+b^2=4ab$，则 $\dfrac{a+b}{a-b}$ 的值为（　　）.

(A) $\sqrt{3}$　(B) $\sqrt{6}$　(C) 2　(D) 3

例 2 已知 $a-b=4$，$ab+c^2+4=0$，则 $a+b=$________.

例3（浙江省中考题）已知 $A=a+2$，$B=a^2-a+5$，$C=a^2+5a-19$，其中 $a>2$.

(1) 求证 $B-A>0$，并指出 A 与 B 的大小关系；

(2) 指出 A 与 C 哪个大？说明理由.

思考

在陌生的问题中寻找熟悉的东西，这个寻找的过程就是联想. 运用联想，对代数式结构进行想象，联系有关的概念、公式、定理等，可以化未知为已知.

例 1 中出现了 a^2+b^2、ab、$a+b$、$a-b$ 这些元素，令我们联想到什么呢？完全平方公式！完全平方公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 可以把这些元素串起来，因此把 $a^2+b^2=4ab$ 配成完全平方的形式 $(a+b)^2=6ab$，同样还可以配成 $(a-b)^2=2ab$，至此解题就明朗了.

例 2 中已知条件出现了 a,b,c 三个未知量，而结论只有 a,b 两个未知量，似乎不对应？不管它，我们还是从已知条件变形入手，看能否有所发现.把 $b=a-4$ 代入 $ab+c^2+4=0$ 得 $a(a-4)+c^2+4=0$，即 $a^2-4a+c^2+4=0$. 这个式子有什么特点？可配成完全平方形式 $(a-2)^2+c^2=0$. 于是立即可得 $a=2$，$c=0$，$b=-2$.

例 3 中 $B-A=a^2-2a+3=(a-1)^2+2$，$C-A=a^2+4a-21=(a+2)^2-25$，都可配成完全平方式讨论不等关系.

例 1 解 由 $a^2+b^2=4ab$ 得 $(a+b)^2=6ab$，$(a-b)^2=2ab$，又 $a<b<0$，所以 $a+b=-\sqrt{6ab}$，$a-b=-\sqrt{2ab}$．故 $\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{3}$．选 A.

1．已知实数 a,b,x,y 满足 $ax+by=3$，$ay-bx=5$，则 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ 的值为________.

例 2 解 由 $a-b=4$ 得 $b=a-4$，代入 $ab+c^2+4=0$ 得

$a(a-4)+c^2+4=0$.

即 $a^2-4a+c^2+4=0$.

$\therefore\ (a-2)^2+c^2=0$.

$\therefore\ a=2$，$c=0$．把 $a=2$ 代入 $b=a-4$ 得 $b=-2$.

$\therefore\ a+b=2-2=0$.

2．在 $\triangle ABC$ 中，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，且满足 $a^4+b^4+\frac{1}{2}c^4=a^2c^2+b^2c^2$．试判定 $\triangle ABC$ 的形状.

例 3 解 (1) $B-A=(a^2-a+5)-(a+2)=a^2-2a+3=(a-1)^2+2$.

$\because\ (a-1)^2>0$，

$\therefore\ (a-1)^2+2>0$.

即 $B-A>0$.

$\therefore\ B>A$.

(2) $C-A=(a^2+5a-19)-(a+2)$

$=(a+2)^2-25$.

$\because\ a>2$，

你注意到吗？对于 $C-A=a^2+4a-21$，还可通过因式分解 $a^2+4a-21=(a+7)(a-3)$ 来判断 C 与 A 的大小.

坐标新思维

这里用到分类讨论思想.

$\therefore (a+2)^2>4^2=16.$

$16<(a+2)^2<25$,所以 A 比 C 大;

$(a+2)^2=25$,所以 A 与 C 一样大;

$(a+2)^2>25$,所以 C 比 A 大.

3. 已知 x,y,z 为实数，且满足$\begin{cases}x+2y-z=6\\x-y+2z=3\end{cases}$. 求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值.

上述解题都用到了一种重要数学方法——.把代数式通过直接变形或分拆重组、添补重组、组合重组等手段,得到完全平方式,再利用完全平方式是非负数这一性质增加问题条件，这种解题方法称为配方法. 配方法的作用在于改变代数式的原有结构形式,在代数式的化简、求值、因式分解、解方程、讨论不等关系、求最值问题等方面有着广泛应用.

迁移训练解答

由已知条件 $ax+by=3,ay-bx=5$ 作指引,进行拆项与添项凑成完全平方式.

1. 解 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

$=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

$=3^2+5^2=34.$

2. 解 由 $a^4+b^4+\frac{1}{2}c^4=a^2c^2+b^2c^2$,得

坐标新思维

已知式看似复杂，实际上通过分拆重组可配成两个完全平方式.我们应该培养对各种代数式的洞察与变形能力.

$$\left(a^2-\frac{1}{2}c^2\right)^2+\left(b^2-\frac{1}{2}c^2\right)^2=0.$$

$\therefore\ a^2=\frac{1}{2}c^2$ 且 $b^2=\frac{1}{2}c^2$.

$\therefore\ a=b$ 且 $a^2+b^2=c^2$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

用解方程组的方法，把 x,y 表示成关于 z 的代数式，代入 $x^2+y^2+z^2$ 得到关于 z 的二次函数，这里用到基本量法. 然后用配方法求二次函数最值

3. 解 由方程组 $\begin{cases} x+2y-z=6 & ① \\ x-y+2z=3 & ② \end{cases}$

①−②得 $y=z+1$ ③ .

①+2×②得 $x=4-z$ ④

把③、④代入 $x^2+y^2+z^2$，得

$$x^2+y^2+z^2=(4-z)^2+(z+1)^2+z^2=3z^2-6z+17=3(z-1)^2+14\geqslant 14.$$

$\therefore$ 当 $z=1$ 时，即 $x=3$，$y=2$ 时，$x^2+y^2+z^2$ 取最小值 14

二、换 元 法

请思考下面问题，并构建坐标思维图.

例 1 （河南省中考题）解方程 $x^2=\dfrac{6}{x^2-x}+x-1$.

例 2 设 $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，求 $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}$ 的值.

例 3 已知 a,b 是互不相等的正数，$M=\sqrt{a}+\sqrt{b}$，

$N=\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}$，比较 M,N 的大小.

例 4 已知 $3(a-b)+\sqrt{3}(b-c)+(c-a)=0\ (a\neq b)$，求 $\dfrac{(c-b)(c-a)}{(a-b)^2}$ 的值.

坐标新思维

思考

例 1 如果将方程去分母，将出现四次方程，用现有的知识显然无法解答，如果同学们再观察这个方程的特点，将方程变形为 $x^2-x+1=\frac{6}{x^2-x}$，发现 x^2-x 是整体出现的，可用换元法设 $x^2-x=y$，则原方程可化为整式方程 $y^2+y-6=0$.下面解这个方程进而可求出原方程的解.

这里用到整体思想！

例 2 直接把 $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 代入原式求值显然十分繁琐，如果我们注意到 $\sqrt{1+x}$ ，$\sqrt{1-x}$ ，$\sqrt{1-x^2}$ ，$1-x$ 这些代数式之间的关系，换元后先化简再求值将要简单得多.

例 3 中 M,N 是根式形式，它们之间的关系不太明显，如果我们通过换元去掉根号，设 $\sqrt{a}=x>0$，$\sqrt{b}=y>0$，则 $M=x+y$，$N=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$，这样 M,N 之间的关系就明朗得多，我们可作差比较 M,N 的大小.

例 4 的已知式与所求式中都出现了 $a-b$，$b-c$，$c-a$ 这三个代数式，这三个代数式有什么关联吗？这三个式子之间的关系是本题的重要隐含条件. 同学们往往没有注意到这一点，其实 $a-b+b-c=a-c$.把握了这一点，我们可以通过换元把已知式与所求式之间联系起来，设 $a-b=x$，$b-c=y$.则 $c-a=-(x+y)$，下面解题思路就明朗了.

数学题中的隐含条件是指题目中没有直接或明显给出的固有条件.它有待于解题者从题意、数式、图形或与之相关的知识中去挖掘.

例 1 解 原方程变形为

$$x^2-x+1=\frac{6}{x^2-x}.$$

坐标新思维

用换元法解题应注意变量取值范围的变化. 因此需检验结果是否符合题意.

设 $x^2-x=y$,则原方程变形为 $y+1=\frac{6}{y}$.

整理,得 $y^2+y-6=0$.

解得 $y_1=-3, y_2=2$.

当 $y_1=-3$ 时,$x^2-x+3=0$.因为 $\triangle=-11<0$,所以此方程无解.与题设不符,舍去.

当 $y_2=2$ 时,$x^2-x-2=0$.解得 $x_1=2, x_2=-1$.

经检验 $x_1=2, x_2=-1$是原方程的解.

迁移训练

1. 已知 x 是实数,且满足 $\frac{3}{x^2+3x}=x^2+3x+2$,则 x^2+3x 的值为(　　)

(A) 1　　(B) -3 或 1　　(C) 3　　(D) -1 或 3

例 2 解 设 $\sqrt{1+x}=A$,$\sqrt{1-x}=B$,

则原式 $=\frac{A}{A+B}+\frac{B^2}{AB-B^2}=\frac{A}{A+B}+\frac{B}{A-B}$

$$=\frac{A^2+B^2}{A^2-B^2}=\frac{(1+x)+(1-x)}{(1+x)-(1-x)}=\frac{1}{x}.$$

$\because$ $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,$\therefore$ $\frac{1}{x}=\frac{2}{1-\sqrt{5}}=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

即原式 $=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

迁移训练

2. 解方程组 $\begin{cases}\sqrt{x+\frac{1}{y}}-\sqrt{x+y-3}=\sqrt{3}\\ 2x+y+\frac{1}{y}=6.\end{cases}$