



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

全国统计教材编审委员会“十一五”规划教材



概率论与数理统计(第三版)

—— 习题与解答

★ 茆诗松 周纪芄 编著



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

全国统计教材编审委员会“十一五”规划教材



021/75=2A

2008

概率论与数理统计(第三版)

—— 习题与解答

★ 茆诗松 周纪芄 编著

(京)新登字 041 号

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题与解答/茆诗松,周纪芄编著.

—北京:中国统计出版社,2007.12(第二版)

ISBN 978-7-5037-5340-4

I. 概…

II. ①茆… ②周…

III. ①概率论—解题 ②数理统计—解题

IV. 021-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 189237 号

概率论与数理统计习题与解答

作 者/茆诗松 周纪芄

责任编辑/梁 超

装帧设计/艺编广告

出版发行/中国统计出版社

通信地址/北京市西城区月坛南街 57 号 邮政编码/100826

办公地址/北京市丰台区西三环南路甲 6 号

网 址/www.stats.gov.cn/tjshujia

电 话/邮购(010)63376907 书店(010)68783172

印 刷/河北天普润印刷厂

经 销/新华书店

开 本/787×1092mm 1/18

字 数/400 千字

印 张/25.875

印 数/1—3000 册

版 别/2008 年 4 月第 1 版

版 次/2008 年 4 月第 1 次印刷

书 号/ISBN 978-7-5037-5340-4/O·62

定 价/36.00 元

中国统计版图书,版权所有。侵权必究。

中国统计版图书,如有印装错误,本社发行部负责调换。

出版说明

“十一五”时期是继续深化教育改革,加强素质教育,努力建设有利于创新型科技人才生长的教育培训体系的关键时期。为了更好地培育统计创新型科技人才,适应统计教育培训的新形势,全国统计教材编审委员会制定了《“十一五”全国统计教材建设规划》(以下简称规划)。规划坚持“以人为本”的科学发展观,坚持统计教育与实践相结合,坚持统计教育同国际接轨,坚持培养创新型的统计人才的指导思想,编写符合国民经济发展需要和统计事业发展需要的统计教材。

这批教材是在深入分析统计教育形势和统计教材建设发展状况,总结多年来统计教材建设经验的基础上,本着以建设本科统计教材为主的方针,积极探索研究生层次的统计教材,力争使规划统计教材的编写做到层次分明,有针对性和实用性。建设精品教材,是编委会自成立以来就孜孜以求的目标。考虑到统计教材建设的实际情况,“十一五”期间,本科教材主要以修订为主,对以往规划统计教材中使用面广,得到广大教师和学生普遍认可的教材组织了修订。修订后的教材,淘汰了过时的内容和例子,增加了计算机操作和大量的案例,编写手法也做了一定的调整,在实用性、可操作性等方面有了较大的改进。

近年来,我国现代化建设快速发展,高等教育规模持续扩大,尤其是研究生教育规模的扩大,使得高等学校研究生统计教学工作面临着许多新情况、新问题,任务艰巨。因此,必须坚持科学发展观,在规模持续发展的同时,把提

高研究生统计教学质量放在突出的位置,培养全面发展的创新型的统计人才。教材是统计教学的载体,建设高质量的研究生层次的统计教材是统计教育发展的需要。因此,编委会在“十一五”期间对研究生的统计基础课教材做了些有益的探索。根据《规划》的要求,这批教材主要采取招标和邀请的方式组织有关院校的专家、学者编写。

值得特别提出的是,在这批教材中,有《非参数统计》、《概率论与数理统计》、《经济计量学教程》、《医学统计》、《应用时间序列分析》、《多元统计分析》、《统计学》7种教材入选国家教育部组织编写的“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”,更加充实和完善了“十一五”期间统计教材的建设。

为了便于教学和学习,这批教材里面包含了与之相配套的《学习指导与习题》,使得这批教材在编辑出版上形成了比较完整的体系。我们相信,这批教材的出版和发行,对于推动我国统计教育改革,加快我国统计教材体系和教材内容更新、改造的步伐,打造精品教材,都将起到积极的促进作用。

限于水平和经验,这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足,诚恳欢迎教材的使用单位、广大教师 and 同学们提出批评和建议。

全国统计教材编审委员会

2006年6月

序 言

本书是在 2000 年版的《概率论与数理统计习题与解答》(以下简称《习题与解答》)基础上修订的,是为教育部普通高等教育“十一五”国家级规划教材《概率论与数理统计》(以下简称《教材》)编写的配套教学参考书。编写这本教学参考书的目的是想通过例题和习题的分析与表述进一步启发学生的思维,以达到提高分析问题与解决问题的能力,同时也为教师引导学生助一臂之力。

本书按新版《教材》的章节编写,每节分概要、例题、习题与解答三部分,它与 2000 年版的《习题与解答》相比有如下一些差别:

1. 重新改写了“概要”部分,对新版《教材》内容要点作了更好的归纳和概述,读一遍会有新鲜的感觉,把思路理顺,若再问一下自己:“懂了吗?”也是一份很好的复习提纲。

2. 新增“例题”,这部分是精选并新增加的,颇具典型性、启发性和应用性,是教学中的重要范例及延伸。

3. 在一些习题的解答中增加了注释和讨论,可把问题引向深入,开拓学生的思路和视野。

4. 另外,还更换了部分习题,增加了近百道新的习题,使全书更丰满。《教材》中的习题都可在本书中找到,可能编号有些不同。

本书的前三章由茆诗松编写,后四章由周纪芾编写,全书由茆诗松统稿。我们经常讨论,选择习题,切磋解法,终于完成本书。在此我们首先要感谢华东师范大学统计

系的教师 and 领导的关心和鼓励,还要感谢国家统计局教育中心的领导和教材处的同志们对我们的支持和督促,最后还要感谢中国统计出版社的同志们的出色编辑,使本书又好又快地与读者见面。本书在教学过程中的实效如何还有待于实践的检验。很希望听到广大师生的批评和建议,使本书在不断改进中继续前进。

茆诗松 周纪芃
2007 年 11 月

2000年版序言

为经济类统计专业本科生编写的教科书《概率论与数理统计》第二版把教材与习题分册出版,这里提供给大家的是为教材配套的习题与解答册。

第二版把习题分节配置,针对性加强了,习题数量也增加了,部分习题给出了较为详细的解答,另外每节又加写了“概要”。这样全书七章共有三十八节,每节都按概要、习题、解答的次序编排,便于阅读和选用。假如能把这个分别如同教材那样从头到尾阅读一遍,可以使你对概率论与数理统计更为亲近,因为这可以加深你对这门课的认识,无论在它的独特的思维方式、计算技巧,还是在应用的面广量大上都可以留下深刻的印象,从而会使你更热爱这门学科。

为什么对部分习题要给出较为详细的解答呢?我们的想法很简单,就是为了从各种角度给出示范,告诉学生应该如何思考、分析和表述。初学这门课做习题时常会犯困惑,缺乏思路,难以下手,有时想好了也表达不清楚,有时做完习题也不敢说确实做对了,这些都反映了学生尚不习惯概率论与数理统计独有的思维方式。这时怎么办?只有让学生多听老师怎么讲,多看别人怎么做,多与同学讨论。这一过程就象学下棋,学会下棋的规则还不一定能成为优秀的棋手,除了自己多与别人下棋外,看别人如何下棋,甚至多看棋谱对你提高棋艺都是必不可少的。我们为部分习题作出较为详细的解答,决不是代替学生去思考,而是想帮助你思考,使你一进门就能抓住问题的要害,解开随机世界的秘密。假设你自己不去独立思考,而把这些

解答照搬照抄,那对你的帮助就太小了,很难成为随机世界探秘的能手,因此独立思考,独立去做才是基本要求。

我们如此编写习题与解答也是一种尝试,能否在教学过程中收到实效,受到广大师生和读者的欢迎还有待于实践的检验,很希望听到大家的批评和建议。我们共同的目的是为了不断提高《概率论与数理统计》的教与学的质量。我们十分感谢国家统计局统计教育中心和中国经济出版社给我们一次宝贵的尝试机会,他们为此提出了很多很多的建议,使本书得以新的面貌出版。

茆诗松 周纪芃

2000年7月

目 录

第一章 随机事件及其概率

- 1.1 随机事件及其运算 1
- 1.2 事件的概率 7
- 1.3 概率的性质 18
- 1.4 独立性 24
- 1.5 条件概率 36

第二章 随机变量及其概率分布

- 2.1 随机变量 49
- 2.2 离散随机变量 56
- 2.3 连续随机变量 69
- 2.4 方差 86
- 2.5 随机变量的其他特征数 99

第三章 多维随机变量

- 3.1 多维随机变量及其联合分布 112
- 3.2 随机变量的独立性 132
- 3.3 多维随机变量的特征数 148
- * 3.4 条件分布与条件期望 167
- 3.5 中心极限定理 183

第四章 统计量及其分布

- 4.1 总体与样本 196
- 4.2 统计量与抽样分布 216
- 4.3 次序统计量及其分布 226

第五章 参数估计

- 5.1 矩法估计 238
- 5.2 点估计优劣的评价标准 242
- 5.3 极大似然估计 250
- 5.4 区间估计 259
- 5.5 单侧置信限 273
- 5.6 比率 p 的置信区间 278
- * 5.7 贝叶斯估计 283

第六章 假设检验

- 6.1 假设检验的概念与步骤 298
- 6.2 正态总体参数的假设检验 304
- 6.3 比率 p 的检验 320
- * 6.4 泊松分布参数 λ 的检验 326
- 6.5 检验的 p 值 330
- 6.6 χ^2 拟合优度检验 332
- 6.7 正态性检验 346

第七章 方差分析和回归分析

- 7.1 单因子方差分析 351
- 7.2 多重比较 366
- * 7.3 方差齐性检验 373
- 7.4 一元线性回归 377
- 7.5 可化为一元线性回归的曲线回归 396

第一章

随机事件及其概率

§ 1.1 随机事件及其运算

概要

1. 随机现象 在一定条件下,并不总出现相同结果的现象。

随机试验 可重复的随机现象。

基本结果 ω 随机现象的最简单的结果,它将是统计中抽样的基本单元,故又称样本点。

基本空间 Ω 随机现象所有基本结果的全体,又称样本空间。

2. 随机事件 随机现象的某些基本结果的集合,简称事件,常用大写字母 A, B, C 等表示。任一事件都是基本空间 Ω 的一个子集。子集中任一个基本结果发生(出现)就称为该事件发生(出现)。

Ω 的最大子集(就是 Ω 本身)称为必然事件,仍用 Ω 表示。

Ω 的最小子集(就是空集)称为不可能事件,用空集符号 ϕ 表示。

事件常用集合表示,也可用语言表示,但用语言描述的集合应与事件一致。

3. 事件间的关系

(1) 包含 如果属于事件 A 的基本结果必属于事件 B ,则称 A 被包含在 B 中,或称 B 包含 A ,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 。对任一事件 A ,必有 $\phi \subset A \subset \Omega$ 。

(2) 相等 如果事件 A 包含事件 B ,而事件 B 也包含事件 A ,则称 A 等于 B ,记为 $A = B$ 。

(3) 互不相容 如果事件 A 与 B 没有相同的基本结果,则称 A 与 B 互不相容,互不相容可以推广到三个或三个以上事件场合。

4. 事件的运算

(1) **对立事件** 由不在事件 A 中的基本结果组成的事件, 记为 $\bar{A}$, $\bar{A}$ 就是“ A 不发生”。对立事件是相互的, 即 $\bar{\bar{A}} = A$ 。

(2) **事件 A 与 B 的并** 由事件 A 与 B 中所有基本结果 (相同的只计入一次) 组成的事件, 记为 $A \cup B$ 。它意味“事件 A 与 B 至少发生一个”。事件的并可推广到三个或三个以上事件场合。

(3) **事件 A 与 B 的交** 由事件 A 与 B 中相同的基本结果组成的事件, 记为 $A \cap B$ 或 AB 。它意味着“事件 A 与 B 同时发生”。事件的交可推广到三个或三个以上事件场合。

- 若 $AB = \phi$, 则 A 与 B 互不相容。
- 若 $AB = \phi$, 且 $A \cup B = \Omega$, 则 A 与 B 互为对立事件。

(4) **事件 A 对 B 的差** 由属于事件 A 而不属于 B 的基本结果组成的事件, 记为 $A - B$, 它意味着“事件 A 发生而事件 B 不发生”。

- $A - B = A - AB = A\bar{B}$ 。

例题

1. 某人连续三次购买体育彩票, 每次一张。令 A, B, C 分别表示其第一、二、三次所买彩票中奖的事件, 试用 A, B, C 及其运算表示下列事件:

- (1) 第三次中奖;
- (2) 只有第三次中奖;
- (3) 恰有一次中奖;
- (4) 至少一次中奖;
- (5) 不只一次中奖;
- (6) 至多两次中奖。

解: (1) C (包含 $ABC, A\bar{B}C, \bar{A}BC$ 和 $\bar{A}\bar{B}C$);

(2) $\bar{A}\bar{B}C$;

(3) $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$;

(4) $A \cup B \cup C$;

(5) $AB \cup AC \cup BC$ (已包含 ABC);

(6) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 。

2. 设事件 A 与 B 间有 $A \supset B$, 请在下列命题中选择正确项:

- (a) $AB = \phi$; (b) $A\bar{B} = \phi$; (c) $\bar{A}B = \phi$; (d) $\bar{A}\bar{B} = \phi$ 。

解: (a) 不对, 因为 $AB = B$;

(b) 不对, 因为 $A\bar{B} = A - B$;

(c) 正确, 因为 $\bar{A}B = B - A = \phi$;

(d) 不对, 因为 $\bar{A}\bar{B} = \overline{A \cup B} = \bar{A}$ 。

习题 1.1 与解答

1 写出下列随机现象的基本空间:

(1) 抛三枚硬币;

(2) 掷三颗骰子;

(3) 连续抛一枚硬币, 直至出现正面为止; (提示: 记正面为 1, 反面为 0)

(4) 在某十字路口每小时通过的机动车辆数;

(5) 某城市一天中诞生的婴儿数;

(6) 下一个交易日的上海证券交易所的综合指数。

解 (1) $\Omega = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ (其中 0 表示反面, 1 表示正面);

(2) $\Omega = \{(x, y, z): x, y, z = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(3) $\Omega = \{(1), (0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 0, 1), \dots\}$;

(4) $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$;

(5) $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$;

(6) $\Omega = \{x: x \geq 100\}$ 。

2 在抛三枚硬币的试验中写出下列事件所含的基本结果:

A = “至少出现一个正面”,

B = “最多出现一个正面”,

C = “恰好出现一个正面”,

D = “出现三面相同”。

解 $A = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$,

$B = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$,

$C = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$,

$D = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ 。

3 对任意二个事件 A 与 B, 使等式 $A \cup B = A$ 成立的条件是什么?

解 $A \supset B$ 。

4 若事件 A 与 B 为互不相容, 请在下列结论中选择正确项:

(a) $A \cup B = \Omega$, (b) A 与 B 为对立事件, (c) $\bar{A} \supset B$, (d) $\bar{A} \cup \bar{B} = \Omega$ 。

解 (a) 不对, 因为互不相容只要求 $AB = \phi$, 不要求 $A \cup B = \Omega$;

(b) 互不相容事件与对立事件的相同点在 $AB = \phi$, 不同点是在是否要求 $A \cup B = \Omega$, 所以对立事件一定互不相容, 互不相容事件不一定是对立事件;

(c) 正确, 因为 $AB = \phi$ 必导致 $\bar{A} \supset B$ (当然也导致 $\bar{B} \supset A$);

(d) 正确, 因为 $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{AB} = \bar{\phi} = \Omega$. 注意: 这时 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 不一定是对立事件。

5 检查二个产品, 记

事件 $A =$ “至少有一个不合格品”,

事件 $B =$ “两次检查结果不同”。请指出事件 A 与 B 之间的关系。

解 若记 0 为合格品, 1 为不合格品, 则检查二个产品的基本空间为

$$\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

而事件 $A = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, 事件 $B = \{(0, 1), (1, 0)\}$, 故有 $A \supset B$ 。

6 在分别标有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 的八张卡片中任取一张。设事件 A 为“抽得一张标号不大于 4 的卡片”; 事件 B 为“抽得一张标号为偶数的卡片”; 事件 C 为“抽得一张标号为奇数的卡片”。请用基本结果表示如下事件:

$$A \cup B, AB, \bar{B}, A - B, B - A, BC, \overline{B \cup C}, (A \cup B)C$$

解 由于 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7\}$, 所以有 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$; $AB = \{2, 4\}$; $\bar{B} = \{1, 3, 5, 7\} = C$; $A - B = \{1, 3\}$; $B - A = \{6, 8\}$; $BC = \phi$; $\overline{B \cup C} = \bar{\Omega} = \phi$; $(A \cup B)C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 3\}$ 。

7 一位工人生产四个零件, 以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是不合格品, $i = 1, 2, 3, 4$ 。请用诸 A_i 表示如下事件:

(1) 全是合格品;

(2) 全是不合格品;

(3) 至少有一个零件是不合格品;

(4) 仅仅有一个零件是不合格品。

解 (1) $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4$; (2) $A_1 A_2 A_3 A_4$; (3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$;

(4) $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4$ 。

8 请叙述下述事件的对立事件:

(1) $A =$ “掷二枚硬币, 皆为正面”;

(2) $B =$ “射击三次, 皆命中目标”;

(3) $C =$ “加工四个产品, 至少有一个正品”。

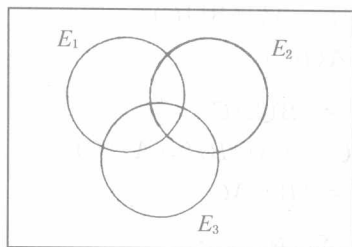
解 (1) $\bar{A} =$ “掷二枚硬币, 至少出现一个反面”; (2) $\bar{B} =$ “射击三次, 至少有一次

没命中”；(3) $\bar{C}$ = “加工四个产品, 皆为次品”。

9 某建筑公司在三个地区各承建一个项目, 定义如下三个事件:

E_i = “地区 i 的项目可按合同期完成”, $i=1, 2, 3$

这三个事件间的关系可用下面维恩图表示。



用维恩图上的阴影区域分别表示下列事件:

A = “至少一个项目可按期完成”;

B = “所有项目都可按期完成”;

C = “没有一个项目可按期完成”;

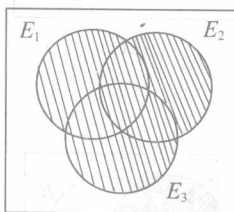
D = “仅仅地区 1 的项目可按期完成”;

E = “三个项目中只有一项可按期完成”;

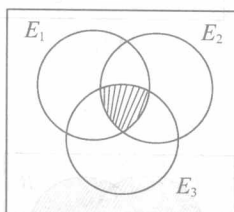
F = “或者仅地区 1 的项目按期完成或者另二个项同时按期完成”。

解 事件 A, B, C, D, E, F 的维恩图如下:

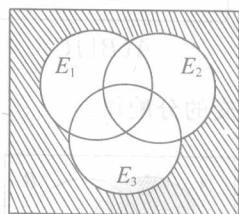
$$A = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$



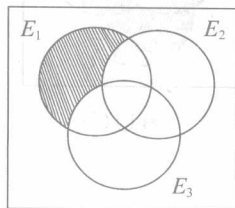
$$B = E_1 E_2 E_3$$



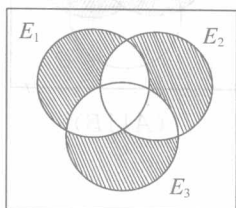
$$C = \bar{A}$$



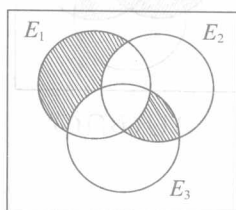
$$D = E_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3$$



$$E = E_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3 \cup \bar{E}_1 E_2 \bar{E}_3 \cup \bar{E}_1 \bar{E}_2 E_3$$



$$F = E_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3 \cup \bar{E}_1 E_2 E_3$$



10 事件是集合,事件的运算性质完全与集合的运算性质相同。现罗列如下,请用维恩图来验证这些性质(提示:等式两端各画一张维恩图):

$$(1) \text{交换律: } A \cup B = B \cup A \quad (\text{并的交换律})$$

$$AB = BA \quad (\text{交的交换律})$$

$$(2) \text{结合律: } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (\text{并的结合律})$$

$$(AB)C = A(BC) \quad (\text{交的结合律})$$

$$(3) \text{分配律: } A(B \cup C) = AB \cup AC \quad (\text{交对并的分配律})$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\text{并对交的分配律})$$

$$A(B - C) = AB - AC \quad (\text{交对差的分配律})$$

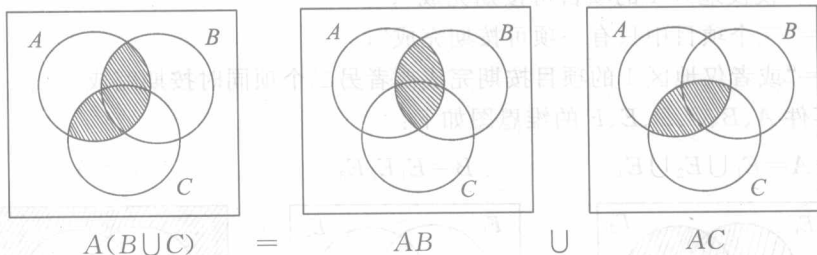
$$(4) \text{对偶原理: } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

解 交换律与结合律的维恩图略去。

(3)分配律的维恩图

交对并的分配律:



并对交的分配律:

