21世纪数学系列精品教材

高等代数选讲

GaoDeng DaiShu XuanJiang

主编 张同斌 万建军

合肥工业大学出版社

高等代数选讲

主　编　张同斌　万建军

副主编　呼青英　曹建莉

合肥工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数选讲/张同斌，万建军主编．—合肥：合肥工业大学出版社，2009.4

ISBN 978-7-81093-913-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.①张…②万…　Ⅲ.高等代数—研究生—入学考试—自学参考资料

Ⅳ.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 039669 号

高等代数选讲

张同斌　万建军　主编　　　　责任编辑　疏利民

出　版	合肥工业大学出版社	版　次	2009 年 4 月第 1 版
地　址	合肥市屯溪路 193 号	印　次	2009 年 4 月第 1 次印刷
邮　编	230009	开　本	787 毫米×1092 毫米　1/16
电　话	总编室:0551—2903038	印　张	17.75
	发行部:0551—2903198	字　数	420 千字
网　址	www.hfutpress.com.cn	印　刷	安徽江淮印务有限责任公司
E-mail	press@hfutpress.com.cn	发　行	全国新华书店

ISBN 978-7-81093-913-3　　　　定价：29.50 元

前言

高等代数是数学专业最重要的基础课之一，它具有高度的抽象性、严密的逻辑性和应用的广泛性. 高等代数的内容与方法不仅对于后续课程有着重要作用，而且有助于培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、分析与解决问题的能力，同时也是数学专业硕士研究生入学考试的必考课程. 这本《高等代数选讲》旨在帮助学生进一步明确高等代数的基本要求，突破重点，分解难点；将知识点织成片、连成网，通过典型例题的选讲，帮助学生开阔视野，拓展思路，提高解题能力，并通过习题练习达到提高考研应试能力，最终达到提高数学素养的目的。

本书是编者在多年讲授高等代数与高等代数选讲课程讲义的基础上编写而成的。内容包括多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ—矩阵、欧几里得空间等九章内容。每章内容按基本要求、重点与难点、知识点综述、例题选讲、习题、习题参考答案与提示等五部分编写。根据作者多年高等代数与高等代数选讲的教学经验，准确把握每章内容的重点与难点，使学生在学习过程中做到重点突出、难点突破；知识点综述部分叙述简洁，尽可能挖掘出知识点之间的关联性，便于学生在考研复习中做到一目了然、有的放矢，提高复习效率；例题选讲是作者多年来教学的积累，便于帮助学生掌握基本题型的解题思路与方法，找到解决问题的关键、技巧和规律；习题中大部分都是选自一些院校的考研高等代数真题，使学生在复习过程中进一步加深对高等代数基本概念和基本理论的理解，熟悉基本方法，提高计算与证明能力，达到预期的学习效果。

本书可作为数学专业硕士研究生入学考试高等代数的复习指导书，也可作为理科、工科、经济管理类学生学习《高等代数》与《线性代数》的参考书，还可作为《高等代数》与《线性代数》教师的教学参考书。

本书由张同斌、万建军主编，呼青英、曹建莉副主编，其中第 1 章、第 2 章、第 7 章、第 8 章、第 9 章由张同斌编写，第 5 章、第 6 章由万建军编写，第 3 章由呼青英编写、第 4 章由曹建莉编写，全书由张同斌统稿。

由于编者水平所限，书中存在疏漏与错误在所难免，恳请读者指正。

编　者

2009 年 3 月 18 日

目录

第1章 多项式

1.1 基本要求、重点与难点

基本要求

1. 掌握数域 P 上多项式的概念与运算.

2. 掌握多项式的带余除法并会运用;掌握整除的概念和性质.

3. 掌握最大公因式的概念及相关结论,会用辗转相除法求最大公因式.

4. 掌握多项式互素的概念和性质.

5. 理解不可约多项式的概念和性质,理解因式分解定理.

6. 掌握重因式的概念和判别方法.

7. 了解多项式函数的概念,掌握余数定理.

8. 掌握实系数和复系数多项式的因式分解定理.

9. 掌握本原多项式的概念及高斯引理,掌握有理系数多项式的因式分解定理,了解艾森斯坦因判别法.

重点

整除的证明,最大公因式,互素,重因式的判别方法,复数域、实数域与有理数域上多项式的因式分解.

难点

有理数域上多项式的因式分解.

1.2 知识点综述

一、多项式的概念与运算

1. 多项式的定义

形如

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的表达式称为数域 P 上文字变量 x 的一元多项式,其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in P$,n 是非负整数,a_ix^i 称为 $f(x)$ 的第 i 次项,a_i 称为 i 次项系数.

当 $a_n\neq 0$ 时,称 $f(x)$ 的次数为 n,记为 $\partial(f(x))=n$. 非零常数称为零次多项式,当 $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$ 时,称 $f(x)$ 为零多项式. 零多项式是唯一不定义次数的多项式.

2. 多项式的和、差、积运算及运算律

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, $\quad g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0$.

不妨设 $n \geqslant m$，在 $g(x)$ 中令 $b_n = b_{n-1} = \cdots = b_{m+1} = 0$，则

$$f(x) \pm g(x) = (a_n \pm b_n)x^n + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 \pm b_1)x + (a_0 \pm b_0);$$

$$f(x)g(x) = \sum_{s=0}^{m+n}\Big(\sum_{i+j=s} a_i b_j\Big)x^s.$$

多项式的加法和乘法满足交换律、结合律、分配律、消去律.

说明 ① 当 $f(x)+g(x) \neq 0$ 时，$\partial(f(x)+g(x)) \leqslant \max(\partial(f(x)),\partial(g(x)))$.

② $\partial(f(x)g(x)) = \partial(f(x)) + \partial(g(x))$.

③ 数域 P 上的所有多项式的集合称为 P 上的多项式环，记为 $P[x]$；数域 P 上的所有次数小于 n 的多项式，再添上零多项式所成的集合，记为 $P[x]_n$.

3. 两个多项式相等 $\Leftrightarrow$ 它们的次数相等，且次数相等的项的系数相等.

二、多项式的整除性

1. 带余除法

设 $f(x),g(x) \in P[x]$，$g(x) \neq 0$，则存在唯一的 $q(x),r(x) \in P[x]$，使

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

其中 $r(x) = 0$ 或 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$. 上式中称 $q(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商，$r(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式. 特别，用 $x-a$ 除 $f(x)$ 所得的余式为 $f(a)$，用 $ax+b$ 除 $f(x)$ 所得的余式为 $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$.

2. 整除的定义

设 $f(x),g(x) \in P[x]$，如果存在 $h(x) \in P[x]$，使

$$f(x) = g(x)h(x),$$

则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记为 $g(x) \mid f(x)$，此时称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式，$f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式. 否则称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$，记为 $g(x) \nmid f(x)$.

说明 ① 当 $g(x) \neq 0$ 时，$g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow r(x) = 0$.

② $x-a \mid f(x) \Leftrightarrow f(a) = 0$，$\quad ax+b \mid f(x) \Leftrightarrow f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$.

③ 零多项式只能整除零多项式；任一多项式可以整除它本身；任一多项式可以整除零多项式；零次多项式可以整除任一多项式.

④ 两个多项式之间的整除关系不因系数域的扩大而改变.

3. 整除的性质

(1) 如果 $f(x) \mid g(x)$，则 $cf(x) \mid dg(x)$，其中 $c,d \in P$，且 $cd \neq 0$.

(2) 如果 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid f(x)$，则 $f(x) = cg(x)$，其中 $c \in P$ 为非零常数.

(3) 如果 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid h(x)$，则 $f(x) \mid h(x)$.

(4) 如果 $f(x) \mid g_i(x)(i = 1,2,\cdots,m)$，则 $f(x) \mid (u_1(x)g_1(x) + u_2(x)g_2(x) + \cdots + u_m(x)g_m(x))$，其中 $u_i(x) \in P[x](i = 1,2,\cdots,m)$ 为任意多项式.

4. 关于整除性的证明方法

证明一个多项式 $g(x)$ 整除另一个多项式 $f(x)$ 是多项式部分常见的题型之一，常见的方法有：

(1) 利用整除的定义；

(2) 利用当 $g(x) \neq 0$ 时，$g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow r(x) = 0$，其中 $r(x)$ 是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式；

(3) 利用因式分解定理；

(4) 利用多项式的根；

(5) 利用整除的性质.

说明 在解决某些问题时，往往是这些方法综合起来运用.

5. 综合除法

设 $g(x) = x - a$ 除 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 所得的商与余式分别为 $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$，$r(x) = c_0$，比较等式

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

两端 x 的同次幂的系数，得

$$b_{n-1} = a_n, b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}, \cdots, b_0 = a_1 + ab_1, c_0 = a_0 + ab_0.$$

具体计算时，可按下面格式进行

$$\begin{array}{c|cccccc}
a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
\hline
 & a_n & a_{n-1} + ab_{n-1} & a_{n-2} + ab_{n-2} & & a_1 + ab_1 & a_0 + ab_0 \\
 & \| & \| & \| & \cdots & \| & \| \\
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & & b_0 & c_0
\end{array}$$

这种方法称为综合除法.

三、最大公因式

1. 最大公因式的定义

设 $f(x), g(x) \in P[x]$，如果 $d(x) \in P[x]$ 满足

(1) $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的公因式，即 $d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x)$；

(2) $f(x), g(x)$ 的公因式全是 $d(x)$ 的因式.

则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

说明 ① 两个零多项式的最大公因式是零多项式，它是唯一确定的.

② 对于任一非零多项式 $f(x)$，$f(x)$ 是 $f(x)$ 与零多项式的一个最大公因式.

③ 如果 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，则 $cd(x)$ 也是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，其中 $c \in P$，且 $c \neq 0$.

④ 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为零，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式记为 $(f(x), g(x))$，且是唯一确定的.

2.设 $f(x),g(x)\in P[x]$,$g(x)\neq 0$,如果

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),$$

则

$$(f(x),g(x))=(g(x),r(x)).$$

这是用辗转相除法求最大公因式的根据.

3.对任意 $f(x),g(x)\in P[x]$,在 $P[x]$ 中存在一个最大公因式 $d(x)$.且存在 $u(x)$,$v(x)\in P[x]$,使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

说明 ① 如果对 $f(x),g(x),d(x)\in P[x]$,存在 $u(x),v(x)\in P[x]$,使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x),$$

则 $d(x)$ 未必是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式,但如果再满足 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式,则 $d(x)$ 必是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.这个结论往往可以用于证明 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

② 结论中 $u(x),v(x)$ 不唯一.

③ 最大公因式不因数域 P 的扩大而改变.

④ 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为零,则可以利用辗转相除法求出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式 $d(x)$ 与 $u(x),v(x)$.也可以利用多项式的标准分解式求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

4.最小公倍式的定义

设 $f(x),g(x)\in P[x]$,如果 $m(x)\in P[x]$ 满足

(1)$m(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的公倍式,即 $f(x)\mid m(x),g(x)\mid m(x)$;

(2)$f(x),g(x)$ 的所有公倍式都是 $m(x)$ 的倍式.

则称 $m(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最小公倍式.

说明 ①$f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数为 1 的最小公倍式记为$[f(x),g(x)]$.

② 如果 $f(x),g(x)$ 是首项系数为 1 的多项式,则

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}.$$

5.互素多项式及其性质

(1) 互素的定义

如果 $f(x),g(x)\in P[x]$ 的最大公因式为非零常数,或$(f(x),g(x))=1$,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

(2) 互素多项式的性质

(ⅰ) 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素 $\Leftrightarrow$ 存在 $u(x),v(x)\in P[x]$,使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

(ⅱ) 如果 $f(x)\mid g(x)h(x)$,且$(f(x),g(x))=1$,则 $f(x)\mid h(x)$.

(ⅲ) 如果 $f_1(x)\mid g(x),f_2(x)\mid g(x)$,且$(f_1(x),f_2(x))=1$,则 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.

(ⅳ) 如果$(f(x),g(x))=1$,$(f(x),h(x)=1$,则$(f(x),g(x)h(x))=1$.

(ⅴ) 如果$(f(x),g(x))=1$,则$(f(x)+g(x),f(x)g(x))=1$.

四、因式分解

1. 不可约多项式

(1) 不可约多项式的定义

如果数域 P 上次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $p(x)$ 不能表示成数域 P 上两个次数比它低的多项式的乘积,则称 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式.

说明 ① 零多项式与零次多项式既不能说是可约的,也不能说是不可约的.

② 多项式的可约性与其所在的数域密切相关.

③ 互素多项式与不可约多项式是完全不同的两个概念.互素是指 $P[x]$ 中两个多项式之间的一种关系;而不可约多项式是某个多项式本身的一种特性,但在研究问题时,互素与不可约多项式的性质又可以互相利用.

(2) 常用数域上的不可约多项式

(ⅰ) 复数域上,不可约多项式只能是一次多项式 $ax+b$.

(ⅱ) 实数域上,不可约多项式只能是一次多项式 $ax+b$ 与某些二次多项式 px^2+qx+r $(\Delta=q^2-4pr<0)$.

(ⅲ) 有理数域上,不可约多项式可以是任意高次多项式.

(3) 不可约多项式的性质

(ⅰ) 如果 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式,则 $cp(x)$ 也是数域 P 上的不可约多项式,其中 $c\in P$,且 $c\neq 0$.

(ⅱ) 设 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式,则对任意 $f(x)\in P[x]$,必有$(p(x),f(x))=1$ 或 $p(x)\mid f(x)$.

(ⅲ) 设 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式,则对任意 $f(x),g(x)\in P[x]$,如果 $p(x)\mid f(x)g(x)$,则必有 $p(x)\mid f(x)$ 或 $p(x)\mid g(x)$.

(ⅳ) 如果数域 P 上的不可约多项式 $p(x)$ 整除 $f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$,其中 $f_i(x)\in P[x](i=1,2,\cdots,s,s\geqslant 2)$,则 $p(x)$ 至少可以整除 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,s)$ 中的一个.

2. 因式分解及唯一性定理

(1) 因式分解及唯一性定理

数域 P 上每一个次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成数域 P 上一些不可约多项式的乘积.

(2) 标准分解式

数域 P 上每一个次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 都有唯一的标准分解式

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),$$

其中 a 为 $f(x)$ 的首项系数,$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_s(x)$ 是数域 P 上首项系数为1的互不相同的不可约多项式,$r_1,r_2,\cdots,r_s$ 是正整数.

(3) 复数域上多项式的因式分解

复数域上每一个次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成一次因式的乘积.换句话说,复数域上每一个次数 $\geqslant 1$ 的多项式都是可约多项式.其标准分解式为

$$f(x)=a(x-a_1)^{l_1}(x-a_2)^{l_2}\cdots(x-a_s)^{l_s},$$

其中 a 是 $f(x)$ 的首项系数，$a_1,a_2,\cdots a_s$ 是不同的复数，$l_1,l_2,\cdots,l_s$ 是正整数，且 $l_1+l_2+\cdots+l_s=\partial(f(x))$.

(4) 实数域上多项式的因式分解

实数域上每一个次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积. 其标准分解式为

$$f(x)=a(x-c_1)^{l_1}\cdots(x-c_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r},$$

其中 a 是 $f(x)$ 的首项系数，$c_1,\cdots,c_s,p_1,\cdots,p_r,q_1,\cdots,q_r$ 都是实数，并且 $p_i^2-4q_i<0$ $(i=1,2,\cdots,r)$；$l_1,\cdots,l_s,k_1,\cdots,k_r$ 是正整数，且 $l_1+\cdots+l_s+2k_1+\cdots+2k_r=\partial(f(x))$.

五、重因式

1. 重因式的定义

设 $f(x)\in P[x]$，$p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，k 为非负整数. 如果 $p^k(x)\mid f(x)$，但 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$，则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式.

当 $k=1$ 时，称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的单因式；当 $k\geqslant 2$ 时，称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式.

2. 重因式的有关结论

(1) 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 $(k\geqslant 1)$，则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式. 反之不真，且 $f(x)$ 的单因式不是 $f'(x)$ 的因式.

(2) 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 $(k\geqslant 1)$，则它是 $f(x),f'(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$ 的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式.

(3) 不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式 $\Leftrightarrow p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式.

(4) 多项式 $f(x)$ 没有重因式 $\Leftrightarrow f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素.

(5) 设 $f(x)$ 的标准分解式为

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),$$

则

$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=ap_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x).$$

六、多项式的根

1. 数域 P 上 n 次多项式 $(n\geqslant 0)$ 在数域 P 中的根不可能多于 n 个(重根按重数计算).

2. 次数不超过 n 的多项式 $f(x),g(x)$，如果对 $n+1$ 个不同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$，有 $f(a_i)=g(a_i)(i=1,2,\cdots,n+1)$，则 $f(x)=g(x)$.

3. 代数基本定理　每个次数 $\geqslant 1$ 的复系数多项式在复数域中有一根.

4. n 次复系数多项式恰有 n 个复根(重根按重数计算). 特别 $x^n-1=(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})(x-1)$，其中 $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，$\varepsilon^n=1$.

5. 如果 a 是实系数多项式 $f(x)$ 的复根，则 a 的共轭数 $\bar{a}$ 也是 $f(x)$ 的根. 因此奇数次实系数多项式一定有实根.

6. 根与系数的关系　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是一元 n 次多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_n\neq 0)$$

的 n 个根，则根与多项式 $f(x)$ 的系数有如下关系

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n},\\[2ex] x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n},\\[2ex] x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\dfrac{a_{n-3}}{a_n},\\[2ex] \cdots\cdots\cdots\cdots\\[2ex] x_1x_2\cdots x_{n-1}+\cdots+x_2x_3\cdots x_n=(-1)^{n-1}\dfrac{a_1}{a_n},\\[2ex] x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}.\end{cases}$$

七、有理多项式

1. 如果一个非零的整系数多项式 $f(x)$ 的系数互素，则称 $f(x)$ 是一个本原多项式.

2. 任何一个非零的有理系数多项式 $f(x)$ 都可以表示成一个有理数 r 与一个本原多项式 $g(x)$ 的乘积，即

$$f(x)=rg(x),$$

且这种表示法除了相差一个正负号是唯一的. 这说明有理系数多项式可以转化为整系数多项式来研究.

3. 高斯(Gauss)引理　两个本原多项式的乘积仍是本原多项式.

4. 如果一个非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，则它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

5. 设 $f(x)$ 是整系数多项式，$g(x)$ 是本原多项式，且 $f(x)=g(x)h(x)$，其中 $h(x)$ 是有理系数多项式，则 $h(x)$ 一定是整系数多项式.

6. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个整系数多项式，$\frac{r}{s}$ 是它的一个有理根，其中 r,s 互素，则必有 $s\mid a_n,r\mid a_0$. 特别，当 $a_n=1$ 时，$f(x)$ 的有理根都是整数根，而且是 a_0 的因子.

说明　该结论提供了求整系数多项式有理根的方法.

7. 艾森斯坦(Eisenstein)判别法　设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是一个整系数多项式，如果存在素数 p，使得

(1) $p \nmid a_n$;

(2) $p \mid a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_0$;

(3) $p^2 \nmid a_0$.

则 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的.

说明 ① 艾森斯坦判别法仅是一个判断整系数多项式不可约的充分条件,并非必要条件.

② 对于整系数多项式 $f(x)$,如果不能直接利用艾森斯坦判别法,可考虑用变量替换 $x = ay + b$(a,b 为整数且 $a \neq 0$),使 $g(y) = f(ay+b)$ 满足艾森斯坦判别条件.

1.3 例题选讲

例 1 证明:$x^k - 1 \mid x^n - 1 \Leftrightarrow k \mid n$.

证明 "$\Leftarrow$" 如果 $k \mid n$,则可设 $n = mk$,则

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= x^{mk} - 1 = (x^k)^m - 1 \\ &= (x^k - 1)((x^k)^{m-1} + (x^k)^{m-2} + \cdots + x^k + 1), \end{aligned}$$

所以 $x^k - 1 \mid x^n - 1$.

"$\Rightarrow$" 用反证法 设 $k \nmid n$,则 $n = qk + r$,其中 $0 < r < k$,于是

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= x^{qk+r} - 1 = x^{qk} \cdot x^r - x^r + x^r - 1 \\ &= x^r(x^{qk} - 1) + (x^r - 1). \end{aligned}$$

因为 $x^k - 1 \mid x^n - 1$,$x^k - 1 \mid x^{qk} - 1$. 所以 $x^k - 1 \mid x^r - 1$,矛盾. 故 $k \mid n$.

例 2 当 l,m,n 满足什么条件时,$x^2 + lx + 1 \mid x^3 + mx + n$.

解法一 利用带余除法

$$\begin{array}{r|l|l}
x^2 + lx + 1 & x^3 + \qquad mx + n & x - l \\
 & x^3 + lx^2 + x & \\
\hline
 & -lx^2 + (m-1)x + n & \\
 & -lx^2 - l^2 x - l & \\
\hline
 & (m + l^2 - 1)x + n + l &
\end{array}$$

所以

$$x^2 + lx + 1 \mid x^3 + mx + n \Leftrightarrow (m + l^2 - 1)x + n + l = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + l^2 - 1 = 0, \\ n + l = 0. \end{cases}$$

故当 l,m,n 满足 $l + n = 0$, $m + l^2 - 1 = 0$ 时,$x^2 + lx + 1 \mid x^3 + mx + n$.

解法二 利用待定系数法

如果 $x^2+lx+1 \mid x^3+mx+n$，则存在 $x-a$，使得

$$x^3+mx+n=(x^2+lx+1)(x-a),$$

即

$$x^3+mx+n=x^3+(l-a)x^2+(1-al)x-a,$$

所以

$$l-a=0, m=1-al, n=-a.$$

故当 l,m,n 满足 $l+n=0, m+l^2-1=0$ 时，$x^2+lx+1 \mid x^3+mx+n$.

例 3 证明：如果 $f(x) \mid f(x^n)$，则 $f(x)$ 的根只能是 0 或单位根.

证明 设 α 是 $f(x)$ 的任一根，则 $x-\alpha \mid f(x)$，由 $f(x) \mid f(x^n)$，有 $x-\alpha \mid f(x^n)$，从而 $f(\alpha^n)=0$，这说明 α^n 是 $f(x)$ 的根. 以此类推，则

$$\alpha, \alpha^n, \alpha^{n^2}, \cdots, \alpha^{n^k}, \cdots$$

都是 $f(x)$ 的根. 但 $\partial(f(x))$ 是有限正整数，因此 $f(x)$ 只有有限个根，所以存在 $k>l$，有

$$\alpha^{n^k}=\alpha^{n^l}.$$

即

$$\alpha^{n^l}(\alpha^{n^k-n^l}-1)=0.$$

由此可知，α 为零或 α 为单位根.

例 4 如果 $(x-\alpha)^k \mid f(x^n)$，证明：$(x^n-\alpha^n)^k \mid f(x^n)$ ($k \geqslant 1, n \geqslant 1$ 是正整数，α 是非零常数).

证明 令 $F(x)=f(x^n)$，则 $(x-\alpha)^k \mid F(x)$，即 α 是 $F(x)$ 的 k 重根，于是 α 是 $F'(x)=f'(x^n)nx^{n-1}$ 的 $k-1$ 重根.

因为 $\alpha \neq 0$，所以 $f'(\alpha^n)=0$，即 α 是 $f'(x^n)$ 的 $k-1$ 重根，以此类推，则 α 是 $f''(x^n)$ 的 $k-2$ 重根，…，α 是 $f^{(k-1)}(x^n)$ 的 1 重根. 即

$$f(\alpha^n)=f'(\alpha^n)=\cdots=f^{(k-1)}(\alpha^n)=0,$$

从而 α^n 是 $f(x)$ 的 k 重根，于是 $f(x)=(x-\alpha^n)^k\varphi(x)$. 所以 $f(x^n)=(x^n-\alpha^n)^k\varphi(x^n)$，故 $(x^n-\alpha^n)^k \mid f(x^n)$.

例 5 设 $f(x), g(x) \in P[x]$. 证明：$f(x) \mid g(x) \Leftrightarrow f^n(x) \mid g^n(x)$. 其中 n 为正整数.

证明 “$\Rightarrow$” 设 $f(x) \mid g(x)$，则存在 $h(x) \in P[x]$，使 $g(x)=f(x)h(x)$. 所以 $g^n(x)=f^n(x)h^n(x)$，故 $f^n(x) \mid g^n(x)$.

“$\Leftarrow$” 应用多项式的标准分解式，设

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),$$

$$g(x)=bp_1^{t_1}(x)p_2^{t_2}(x)\cdots p_s^{t_s}(x),$$

其中 a,b 分别为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数，$p_1(x),\cdots,p_s(x)$ 为互不相同的首项系数为 1 的不可约多项式，r_i,t_i ($i=1,2,\cdots,s$) 为非负整数. 则

$$f^n(x) = a^n p_1^{r_1 n}(x) p_2^{r_2 n}(x) \cdots p_s^{r_s n}(x),$$

$$g^n(x) = b^n p_1^{t_1 n}(x) p_2^{t_2 n}(x) \cdots p_s^{t_s n}(x).$$

因为 $f^n(x) \mid g^n(x)$，所以 $r_i n \leqslant t_i n (i = 1,2,\cdots,s)$，从而 $r_i \leqslant t_i (i = 1,2,\cdots,s)$，故 $f(x) \mid g(x)$.

例 6 设 $h(x),k(x),f(x),g(x)$ 是实系数多项式，且

$$(x^2+1)h(x) + (x+1)f(x) + (x-2)g(x) = 0,$$

$$(x^2+1)k(x) + (x-1)f(x) + (x+2)g(x) = 0.$$

证明：$x^2+1 \mid f(x), x^2+1 \mid g(x)$.

证法一 将 $x = i$ 代入已知方程，得

$$\begin{cases}(i+1)f(i) + (i-2)g(i) = 0,\\(i-1)f(i) + (i+2)g(i) = 0.\end{cases}$$

解之得，$f(i) = g(i) = 0$，所以 $x - i \mid f(x), x - i \mid g(x)$.

类似地，将 $x = -i$ 代入已知方程，并解之得 $f(-i) = g(-i) = 0$，所以 $x+i \mid f(x), x+i \mid g(x)$. 因为 $(x-i, x+i) = 1$，故

$$x^2+1 \mid f(x), x^2+1 \mid g(x).$$

证法二 设

$$\begin{cases}(x^2+1)h(x) + (x+1)f(x) + (x-2)g(x) = 0, & (1)\\(x^2+1)k(x) + (x-1)f(x) + (x+2)g(x) = 0. & (2)\end{cases}$$

将(1) $\times (x-1) -$ (2) $\times (x+1)$ 并整理，得

$$(x^2+1)((x-1)h(x) - (x+1)k(x)) = 6xg(x),$$

所以 $x^2+1 \mid 6xg(x)$，但 $(x^2+1, 6x) = 1$，所以 $x^2+1 \mid g(x)$.

类似地可以证明 $x^2+1 \mid f(x)$.

说明 方法一与方法二分别利用了下面互素的性质：

如果 $f_1(x) \mid g(x), f_2(x) \mid g(x)$，且 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$，则 $f_1(x)f_2(x) \mid g(x)$；

如果 $f(x) \mid g(x)h(x)$，且 $(f(x), g(x)) = 1$，则 $f(x) \mid h(x)$.

这在证明多项式的整除性时经常用到.

例 7 证明：如果 $x^4+x^3+x^2+x+1 \mid x^3 f_1(x^5) + x^2 f_2(x^5) + x f_3(x^5) + f_4(x^5)$，则 $x - 1 \mid f_i(x) \quad (i = 1,2,3,4)$.

证明 设 ε 是 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 的一个根(5 次单位根)，则 $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$ 是其另三个根，其中 $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$.

因为

$$x^4+x^3+x^2+x+1 \mid x^3f_1(x^5)+x^2f_2(x^5)+xf_3(x^5)+f_4(x^5),$$

所以

$$\begin{cases}\varepsilon^3f_1(\varepsilon^5)+\varepsilon^2f_2(\varepsilon^5)+\varepsilon f_3(\varepsilon^5)+f_4(\varepsilon^5)=0,\\ \varepsilon^6f_1(\varepsilon^{10})+\varepsilon^4f_2(\varepsilon^{10})+\varepsilon^2f_3(\varepsilon^{10})+f_4(\varepsilon^{10})=0,\\ \varepsilon^9f_1(\varepsilon^{15})+\varepsilon^6f_2(\varepsilon^{15})+\varepsilon^3f_3(\varepsilon^{15})+f_4(\varepsilon^{15})=0,\\ \varepsilon^{12}f_1(\varepsilon^{20})+\varepsilon^8f_2(\varepsilon^{20})+\varepsilon^4f_3(\varepsilon^{20})+f_4(\varepsilon^{20})=0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\varepsilon^3f_1(1)+\varepsilon^2f_2(1)+\varepsilon f_3(1)+f_4(1)=0,\\ \varepsilon f_1(1)+\varepsilon^4f_2(1)+\varepsilon^2f_3(1)+f_4(1)=0,\\ \varepsilon^4f_1(1)+\varepsilon f_2(1)+\varepsilon^3f_3(1)+f_4(1)=0,\\ \varepsilon^2f_1(1)+\varepsilon^3f_2(1)+\varepsilon^4f_3(1)+f_4(1)=0.\end{cases}$$

由范德蒙行列式可知，以 $f_1(1),f_2(1),f_3(1),f_4(1)$ 为未知数的齐次线性方程组的系数行列式不等于零，所以 $f_i(1)=0(i=1,2,3,4)$，从而 $x-1 \mid f_i(x)(i=1,2,3,4)$.

例 8 设 m 是大于 1 的整数，$f(x)=x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1$，证明：$f(x)$ 整除 $f(x^m)+c \Leftrightarrow$ 常数 $c=-m$.

证明 "$\Rightarrow$" 如果 $f(x) \mid f(x^m)+c$，设 $f(x)=x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1$ 的根为 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,m-1)$ 且 $\alpha_i \neq \alpha_j(i \neq j)$，则

$$f(\alpha_i^m)+c=m+c=0,$$

所以 $c=-m$.

"$\Leftarrow$" 如果 $c=-m$，则

$$\begin{aligned}f(x^m)+c&=f(x^m)-m\\&=(x^{2m-1}-1)+(x^{2m-2}-1)+\cdots+(x^m-1)\\&=(x^m-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)+(x^m-1)(x^{m-2}+x^{m-3}+\cdots+x+1)\\&\quad+\cdots+(x^m-1)\\&=(x^m-1)(x^{m-1}+2x^{m-2}+\cdots+(m-1)x+m)\\&=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)(x^{m-1}+2x^{m-2}+\cdots+(m-1)x+m),\end{aligned}$$

所以

$$x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1 \mid f(x^m)-m.$$