高职高专“十一五”规划教材

工科高等数学

主编　邓俊谦

华东师范大学出版社

高职高专“十一五”规划教材

工科高等数学

主　编　邓俊谦

编　者　邓俊谦（第一、二章）　郭　静（第三章）

张秀英（第四章）　李　静（第五、六章）

周素静（第七、九章）　贺　欣（第八、十章）

华 东 师 范 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

工科高等数学/邓俊谦主编.—上海:华东师范大学出版社,2009
高职高专"十一五"规划教材
ISBN 978-7-5617-7028-3

Ⅰ.工…　Ⅱ.邓…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第049037号

工科高等数学

主　　编　邓俊谦
责任编辑　朱建宝
审读编辑　李　娜

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
电话总机　021-62450163转各部门　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　昆山亭林彩印厂
开　　本　787×1092　16开
印　　张　18.25
字　　数　423千字
版　　次　2009年6月第1版
印　　次　2009年6月第1次
印　　数　4100
书　　号　ISBN 978-7-5617-7028-3/O·209
定　　价　33.00元

出 版 人　朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系)

前言

本书是一部高职高专数学教材，既适用于高职高专院校的工科类各专业，也适用于工科以外的许多专业.本书共有十章，分别为：一、函数和极限；二、导数与微分；三、导数的应用；四、积分及其应用；五、微分方程；六、无穷级数；七、向量、常见空间图形及其方程；八、多元函数的偏导数与二重积分；九、矩阵简介；十、Mathematica 数学软件简介.这些内容可以满足高职高专院校绝大多数工科类专业及其他许多专业对高等数学的需求.各院校不同的专业，在“必需、够用”为度的原则下，可以方便地选取自己所需内容.

本书作者均是教学一线的高职高专数学教师，都有多年的教学经历，积累了丰富的教学经验，十分熟悉广大同学的特点，对高职高专数学教育有较深的体会和认识，这为编写出一部师生双方都满意的教材提供了有力保障.

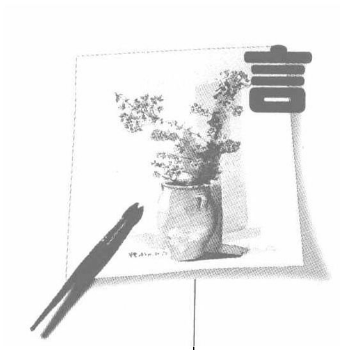
高职高专数学教材不同于本科数学教材，必须体现出高等职业教育的特色.本书在适当弱化高等数学的学科性和理论严密性方面做出了积极努力和慎重的抉择.“矩阵简介”这一章内容，本属于线性代数，但矩阵及相关知识在当今的应用非常广泛，有一部分专业需要，另外，了解一些矩阵知识，对提高学生的职业能力和素质也是有益的.因此，本书中设置了这一章.本书在具体知识点的取舍上做了精细安排，努力体现职业教育的特色.以应用为目的是高职高专数学课程的重要特征，强化应用是高职高专数学教学的特点.本书在编写中，高度重视联系实际，体现数学的应用.在知识的引入、例题与习题的设置等方面都做了精心安排.同时也没有忘记，我们面对的是有多种水平、程度且人数众多，在数学基本状况方面甚至有较大差异的学生.因此，也注意了应用的度，实事求是，努力满足教学的实际需要.

理解概念、具有熟练的基本运算技能，是用数学去解决实际问题的前提.本书高度重视理解概念和基本运算技能的训练，精选每一道例题和习题，习题量充足，能较好地满足教学需要.除第十章外，每一节后配备了一个习题，每一章后安排有本章复习题.书后附有各习题和复习题的答案.

数学软件具有强大的功能，学会使用数学软件，对提高应用数学解决实际问题的能力具有重要作用.本书第十章安排了“Mathematica 数学软件简介”，以方便开展这方面的教学和训练时使用.

本书处处为教学着想，为学生着想，高度重视细节的处理.在每一节的前面都突出地标明了本节的要点，以有利于学生学习和复习.本书在格式的安排上精心、细致，重要概念、结论、公

前言



式视觉突出，具有良好的心理效果.本书努力追求语言表述的规范、精练、一致和通俗易懂，以利于学生阅读.

本书由郑州铁路职业技术学院的邓俊谦任主编，并负责全书的规划、统稿等工作.受我们的水平所限，书中难免有不妥之处，甚至错误，真诚欢迎读者提意见和批评指正.

编　者

2009 年 3 月

目录

第一章　函数和极限

第二章　导数与微分

第三章　导数的应用

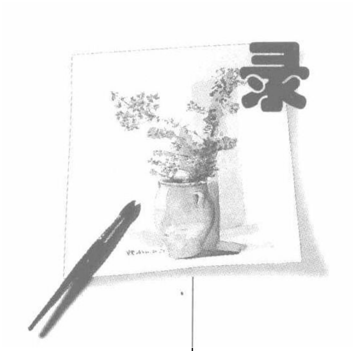
目录

目录

第七章　向量　常见空间图形及其方程

第八章　多元函数的偏导数与二重积分

目录



第九章　矩阵简介

第十章　Mathematica 数学软件简介

第一章

函数和极限

本书大部分内容属于微积分学.微积分是科学史上的重大发明,它在物理学、天文学、工程技术、经济学、管理科学、社会科学以及生物学等众多领域都展示了强大威力.

微积分研究的基本对象是函数,极限是微积分的基本概念和重要工具.朴素的极限思想和应用早已出现.例如,早在公元前4世纪,我国就有"一尺之棰,日取其半,万世不竭"的说法,意思就是,一尺长的木棒,每天取走一半,永远也取不完.又如,在公元3世纪,我国魏晋时期的杰出数学家刘徽创立了"割圆术",利用圆内接正多边形周长的极限是圆周长这一思想,去近似计算圆周率 π 的值,取得了杰出的成果.

本章我们将介绍初等函数的概念,学习极限和连续的概念以及相关的一些微积分基础知识.

第一节　函数

⊙ 函数的定义及表示法、分段函数、函数的增量　⊙ 函数的常见特性
⊙ 基本初等函数　⊙ 复合函数　⊙ 初等函数

一、函数概念

1. 函数的定义

变量与变量之间经常是相互依赖、相互制约的,一个量确定了,另一个量随之确定,这两个量之间就有了函数关系.例如,行星绕太阳公转的周期和行星椭圆轨道的半长轴的关系;大气压强和海拔高度的关系;放射性物质的质量和时间的关系;球的体积、表面积分别和球半径的关系;利率和存期的关系;个人所得税的纳税额和收入的关系等,这里每一个问题中的两个变量之间都存在着函数关系.

定义　设 x, y 是两个取实数值的变量,x 的取值是非空集 D.如果按照某个对应规则 f,对于 D 中的每一个 x 的值,都有唯一确定的 y 值和它对应,那么就称 y 是 x 的**函数**,记作 $y = f(x)$;称 x 是**自变量**,y 是**因变量**,D 是函数的**定义域**;与 x 值相对应的 y 值叫做**函数值**,函数值的集合叫做函数的**值域**.

如果某个数 $x_0 \in D$，就说函数 $f(x)$ 在 x_0 有定义，函数 $f(x)$ 在 x_0 的函数值记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

上面定义的函数也叫做**单值函数**，定义要求"对于 D 中的每一个 x 的值，都有唯一确定的 y 值和它对应". 如果把这句话中的"唯一"二字去掉，并修改为"对于 D 中的每一个 x 的值，都有确定的 y 值和它对应，并且至少有一个 x 值与多个 y 值相对应"，那么这样定义的函数叫做**多值函数**.

例如，方程 $y^2 = x$，对于 $[0, +\infty)$ 上的每一个 x 值，y 都有确定的值和它对应，并且对任意一个大于零的 x，都有两个 y 值：$y_1 = \sqrt{x}$ 和 $y_2 = -\sqrt{x}$ 与 x 相对应. 所以这个方程确定了一个以 x 为自变量，y 为因变量的**多值函数**.

说明：本书对多值函数不作讨论，以后说到函数，若无特别声明，都指单值函数.

2. 函数的表示法

表示函数的方法，常用的有三种，即**公式法**、**表格法**和**图象法**.

球的体积 $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$（r 表示球的半径），汽车刹车距离 $s = kv^2$（k 为常数，v 表示速度）等，就是用公式法表示的函数. 微积分研究的就是用公式法表示的函数. 用表格法表示的函数也常可以见到. 例如，银行的存款利率表，个人所得税税率表等. 在媒体上常可以看到图象法表示的函数. 例如，描述某段时间内某种商品价格的图象，股市的综合指数即时图等；心电监护仪屏幕上显示的病人心电图象，也描述了一种函数关系，为医生时时提供着病人心脏的信息.

3. 分段函数

在定义域的不同范围内，用不同公式表示的函数叫做**分段函数**. 例如，下面的两个函数都是分段函数.

绝对值函数 $y = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0; \end{cases}$

电工学中的一种梯形波，电流 I 与时间 t 在 $[0, T]$ 上的关系为

$$I(t) = \begin{cases} \dfrac{4A_m}{T}t, & 0 \leqslant t < \dfrac{T}{4}, \\ -\dfrac{4A_m}{T}t + 2A_m, & \dfrac{T}{4} \leqslant t < \dfrac{3T}{4}, \\ \dfrac{4A_m}{T}t - 4A_m, & \dfrac{3T}{4} \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

这两个函数的图象分别见图 1－1 和图 1－2.

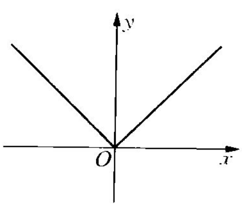


图 1－1

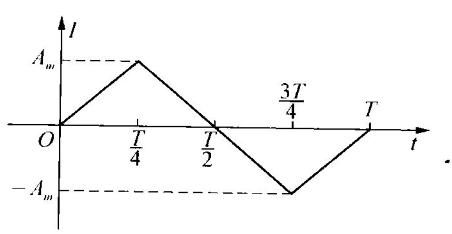


图 1－2

4. 函数的增量

设函数 $y=f(x)$，当 x 从 x_1 变到 x_2 时，终值 x_2 与初值 x_1 的差 x_2-x_1 叫做**自变量 x 的增量**（也称**改变量**），记作 Δx，即 $\Delta x=x_2-x_1$，函数值的差 $f(x_2)-f(x_1)$ 叫做**函数的增量**（**改变量**），记作 Δy，即

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_2)-f(x_1)\\ &= f(x_1+\Delta x)-f(x_1).\end{aligned}$$

例如，设 $f(x)=3x^2+1$，则：

当 x 从 1 变到 1.1 时，$\Delta x=1.1-1=0.1$，

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(1.1)-f(1)\\ &= (3\times 1.1^2+1)-(3\times 1^2+1)\\ &= 0.63;\end{aligned}$$

当 x 从 0 变到 -0.2 时，$\Delta x=-0.2-0=-0.2$，

$$\Delta y=f(-0.2)-f(0)=[3\times(-0.2)^2+1]-1=0.12;$$

当 x 从 1 变到 0 时，$\Delta x=0-1=-1$，

$$\Delta y=f(0)-f(1)=1-(3\times 1^2+1)=-3.$$

二、函数的常见特性

单调性、奇偶性、周期性，函数的这几种特性在中学已有详细描述，此处不再介绍，下面说明有界性.

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，如果存在正数 M，对 D 中的任一 x，相应的函数值 $f(x)$ 都满足 $|f(x)|\leqslant M$，那么称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**，也可说 $f(x)$ 是 D 上的**有界函数**；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**无界**，也可说 $f(x)$ 是 D 上的**无界函数**.

例如，对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\operatorname{arccot} x|<\pi$，所以正弦函数、反余切函数都在它们的定义域 $\mathbf{R}$ 上有界.

当函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有界时，它在 D 上的图象一定在两条平行线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

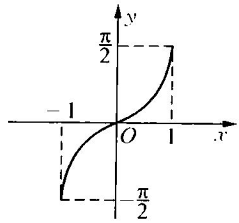
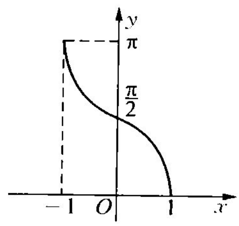
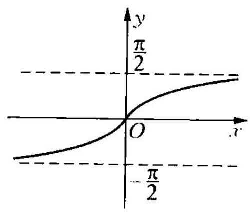
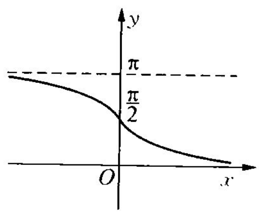
三、初等函数

1. 基本初等函数

常值函数 $y=C$（C 为常数）、幂函数 $y=x^\alpha$、指数函数 $y=a^x$、对数函数 $y=\log_a x$、三角函数 $y=\sin x$，…，$y=\csc x$ 以及反三角函数 $y=\arcsin x$，…，$y=\operatorname{arccot} x$，这些函数称为**基本初等函数**.

四个反三角函数的图象及特性见表 1-1，其他几种基本初等函数的图象及特性不再一一列出.

表 1-1

函数及其定义域、值域	图　　象	特　　性
$y=\arcsin x$ 定义域：$[-1,\ 1]$ 值域：$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$		奇函数 单调增加 有界
$y=\arccos x$ 定义域：$[-1,\ 1]$ 值域：$[0,\ \pi]$		单调减少 有界
$y=\arctan x$ 定义域：$(-\infty,\ +\infty)$ 值域：$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$		奇函数 单调增加 有界
$y=\operatorname{arccot} x$ 定义域：$(-\infty,\ +\infty)$ 值域：$(0,\ \pi)$		单调减少 有界

2. *复合函数*

设函数 $y=f(u)=3\sin u$，$u=\varphi(x)=2x+\frac{\pi}{4}$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$是由函数 $y=3\sin u$ 和 $u=2x+\frac{\pi}{4}$“复合”而成的.

一般地，设 y 是 u 的函数，即 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数，即 $u=\varphi(x)$，那么称以 x 为自变量的函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，称 u 为**中间变量**.

类似地，可以说明由三个或更多的函数复合而成的复合函数.

应当知道，并不是任何两个函数都能够复合成为一个复合函数的. 例如，$y=\ln u$，$u\in(0,\ +\infty)$ 和 $u=-x^2$，$x\in\mathbf{R}$，将 $u=-x^2$ 代入 $y=\ln u$，得 $y=\ln(-x^2)$，这就不是

以 x 为自变量的函数，因为对任意的 x 值，都没有 y 值与它对应. 所以 $y=\ln u$，$u=-x^2$ 不能复合成为 x 的复合函数.

有时需要把几个函数复合成为一个函数，有时又需要分清楚一个复合函数是由哪几个简单函数复合而成的. 这里说的简单函数是指基本初等函数以及由它们的和、差、积、商所形成的函数.

例 1 说出下列复合函数是由怎样的简单函数复合而成的：

(1) $y=\sin^3 x$； (2) $y=\arctan\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+1}}$.

解 (1) 函数 $y=\sin^3 x$ 可以看成是由简单函数 $y=u^3$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的.

(2) 函数 $y=\arctan\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+1}}$ 可以看成是由简单函数 $y=\arctan u$，$u=\sqrt{v}$ 和 $v=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ 复合而成的.

3. *初等函数*

初等函数是指由基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合步骤而构成，并能用一个数学式子表示的函数.

例如，上面例 1 中的两个函数，多项式函数 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，有理函数 $y=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$ 等都是初等函数. 本节中的函数 $I(t)$ 不是初等函数.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=(3-x)^{\frac{1}{4}}+(x+5)^{-\frac{1}{2}}$； (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$；

(3) $y=\dfrac{x-3}{x^2-2x-8}$； (4) $y=\dfrac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{5-x}}$；

(5) $y=e^{\frac{1}{x-1}}+\sqrt{3^x-1}$； (6) $y=\dfrac{\arcsin(x+2)}{x+1}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}2, & x<0,\\ x^2-1, & 0\leqslant x<1,\\ 1-x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 画出函数 $y=f(x)$ 的图象，并求 $f(-3)$、$f(0)$、$f(3)$、$f[f(0.5)]$ 和 $f[f(-1)]$ 的值.

3. 画出函数的图象：

(1) $y=\begin{cases}1, & k\leqslant x<k+1,\\ -1, & k+1\leqslant x<k+2,\end{cases}$ $k\in\mathbf{N}$；

(2) 取整函数 $y=[x]$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

4. 判断下列函数是奇函数、偶函数，还是非奇非偶函数：

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$； (2) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$； (3) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

(4) $f(x)=|x-2|$； (5) $f(x)=e^x-e^{-x}$； (6) $f(x)=x^3\arctan x$.

5. 说出下列函数是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=\cos x^3$； (2) $y=e^{\cos^3 x}$； (3) $y=\sqrt[3]{3x^2+1}$；

(4) $y=\sin\left(\ln\dfrac{x-1}{x+1}\right)$； (5) $y=\arcsin\sqrt{x-1}$； (6) $y=\ln(\arctan\sqrt{x})$.

6. 设函数 $y=\dfrac{1}{x}$，求 Δx，Δy：

(1) x 从 2 变到 2.1； (2) x 从 4 变到 3.8； (3) x 从 a 变到 $a+h$.

7. 应用题：

(1) 一扇窗户上面一部分是半圆形，下面一部分是矩形. 已知窗户的周长是 9 m，试把窗户的面积 A 表示为宽 x 的函数.

(2) 夏季某高山的气温从山脚起，每升高 100 m 降低 0.7℃. 已知山脚气温是 26℃，山顶气温是 14.1℃，用 T 表示气温，h 表示相对于山脚的高度.

① 把 T(单位:℃)表示成 h(单位:m)的函数；

② 求这座山的相对高度；

③ 气温为 17.6℃时，相对高度是多少？

(3) 2002 年以来，我国的税收总额高速增长，年增长率约为 21.9%. 已知 2002 年的税收总额为 16 997 亿元，用 t 和 P 分别表示 2002 年 ($t=0$) 以来的年数和年税收总额.

① 求函数关系式 $P=P(t)$，并表示成 P_0e^{kt} 的形式(k 值精确到万分之一)；

② 估计 2006 年的税收总额(精确到 1 亿元).

第二节 极限的概念

⊙ $x\to x_0$ 时 $f(x)$的极限，左、右极限 ⊙ $x\to\infty$时 $f(x)$的极限
⊙ 水平渐近线 ⊙ 数列的极限 ⊙ 无穷小与无穷大 ⊙ 垂直渐近线

一、$x\to x_0$ 时 $f(x)$的极限

1. 瞬时速度

旋停在地震灾区上空 50 m 高处的直升机上丢下一包救灾物品，忽略空气阻力，记开始下落的时刻为 $t=0$. 试考察在下落的第 3 秒末这一时刻物品的速度.

由于物品下落的速度 v 是不断改变的，因此不能用匀速运动的速度公式

$$v=\frac{s}{t}=\frac{\text{下落路程}}{\text{所用时间}} \qquad ①$$

来计算. 我们注意到，虽然物品下落速度随时间而改变，但时间间隔越短，速度的改变就越

小，因此，在很小的时间区间$[3, t]$（当然也可以取$[t, 3]$）上，下落可近似看成是匀速的.这样就可以用在$[3, t]$内下落的平均速度，记作$\bar{v}(t)$，来近似代替第3秒末这一时刻的速度.

下面计算$\bar{v}(t)$. 根据自由落体公式$s(t)=\frac{1}{2}gt^2$（g为重力加速度），在时间段$[3, t]$内物品下落的距离为

$$\Delta s = s(t)-s(3)=\frac{1}{2}g(t^2-9),$$

所用时间为$\Delta t = t-3$. 由上面的平均速度公式①，得

$$\bar{v}(t)=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{1}{2}g\cdot\frac{t^2-9}{t-3}. \qquad ②$$

取t的一系列越来越接近3的值计算，见下表，其中t和$\bar{v}(t)$的单位分别为s和m/s.

t	3.1	3.001	3.000 01	3.000 000 1	…	$\to 3$
$\bar{v}(t)$	$3.05g$	$3.000\,5g$	$3.000\,005g$	$3.000\,000\,05g$	…	$\to 3g$

t的值越接近3，$\bar{v}(t)$的值作为第3秒末这一时刻速度的近似值，其近似程度越高，越能客观反映这一时刻速度的状况. 从表中可以看出，当t的值无限趋近于3时，$\bar{v}(t)$的值无限趋近于$3g$. 把这个常数$3g$叫做函数$\bar{v}(t)$当t趋向于3时的极限，记作$\lim\limits_{t\to 3}\bar{v}(t)$，即

$$\lim_{t\to 3}\bar{v}(t)=\lim_{t\to 3}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{t\to 3}\frac{s(t)-s(3)}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{1}{2}g\cdot\frac{t^2-9}{t-3}=3g(\text{m/s}).$$

我们就定义这个极限值$3g$为第3秒末物品下落的速度，即这一时刻的瞬时速度.

2. $x\to x_0$时$f(x)$的极限

首先说明邻域的概念. 设δ为正实数，称区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$为**点x_0的δ邻域**，点x_0称为邻域中心，δ称为邻域半径；把$(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$称为**点$x_0$的去心$\delta$邻域**.

设x_0是一个定值，x从x_0的两侧以任何方式趋近于x_0，但始终不等于x_0，用“$x\to x_0$”表示，读作“x趋向于x_0”.

定义1 设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义（在x_0可以没有定义），如果当$x\to x_0$时，$f(x)$无限趋近于一个常数L，那么就说L是**当x趋向于x_0时函数$f(x)$的极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L \text{ 或 } f(x)\to L(x\to x_0).$$

从图象上看（图1-3），当$x\to x_0$时L是$f(x)$的极限，就是当x不论从x_0的左侧还是右侧趋向于x_0时，曲线$y=f(x)$上的点都无限趋近于点(x_0, L). 点(x_0, L)可以是函数图象上的点（如图1-3(1)所示），也可以不是函数图象上的点（如图1-3(2)、(3)所示）. 当$f(x)$在x_0有定义时，可能有$L=f(x_0)$（图1-3(1)），也可能有$L\neq f(x_0)$（图

1－3(2))，$f(x)$ 也可以在 x_0 无定义(图 1－3(3)).

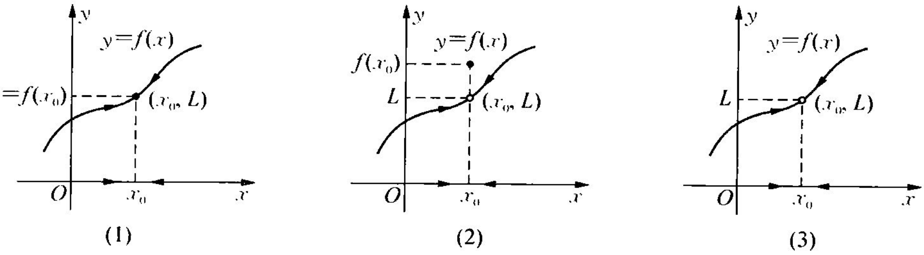


图 1－3

说明：当极限存在时，极限是唯一的.

上面我们讨论了救灾物品在下落的第 3 秒末这一时刻的速度，一般地，设物体沿直线运动，运动方程为 $s=s(t)$，s 表示物体相对于原点的位移，函数 $s=s(t)$ 称为**位置函数**. 对于物体在运动中的某一时刻 t_0，如果当 t 趋向于 t_0 时，在$[t_0, t]$(或$[t, t_0]$)内的平均速度$\frac{\Delta s}{\Delta t}$的极限存在，即

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

存在，那么这个极限就叫做物体在 $t=t_0$ 这一时刻的速度，也称**瞬时速度**.

科学技术中的许多概念都需要用极限来说明，许多问题的解决需要用到极限这一工具.

例 1 考察函数 $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ 当 $x\to 2$ 时的极限.

解 因为当 $x\neq 2$ 时，$\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$，所以函数 $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ 的图象就是函数 $y=x+2(x\neq 2)$ 的图象，如图 1－4 所示. 从图中可以看出，当 $x\to 2$ 时 $f(x)$ 有极限，且

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

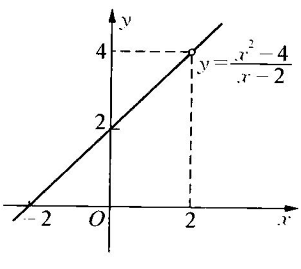


图 1－4

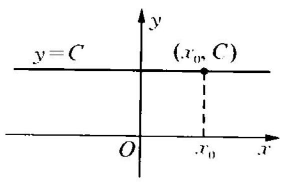


图 1－5

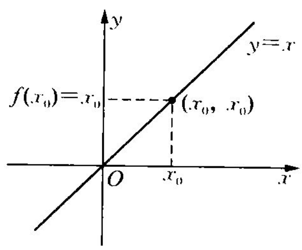


图 1－6

从常值函数 $y=C$ 和函数 $y=x$ 的图象(图 1－5，图 1－6) 可以看出：

$\lim\limits_{x\to x_0} C=C$($C$ 为常数)；$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.