十一五

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学基础教程

（下 册）

◎ 刘元骏 编著

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学基础教程

（下　册）

刘元骏　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书是作者根据多年的教学积累，在总结此前出版的同类教材得失的基础上，参照数学教学现代化的主流趋势编撰而成的．本书分上、下两册出版．下册内容为多元微积分和微分方程，包括多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数和微分方程等5章．书后还附有二阶混合偏导数相等的充分条件，活动标架、曲率与挠率，二元函数在驻点处取极值的充分条件，最小二乘法简介，由参数方程表示的曲面面积公式，函数项级数的一致性收敛及其性质，习题、复习题答案与提示等7个附录．

本书可作为综合大学、理工科大学和师范院校对数学要求较高的非数学专业本科学生的教材或参考书．

图书在版编目(CIP)数据

大学数学基础教程．下册/ 刘元骏编著．—北京：科学出版社，2009

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-03-022914-4

Ⅰ．大… Ⅱ．刘… Ⅲ．高等数学–高等学校–教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 136455 号

责任编辑：李鹏奇 王 静 唐保军 / 责任校对：朱光光

责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年1月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2009年1月第一次印刷 印张：20 1/4

印数：1—4 000 字数：382 000

定价：31.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈文林〉)

前　言

一

大学数学是高等院校对非数学专业本科学生开设数学课程的总称, 它代表的是一类课程. 根据不同的专业需要, 这类课程开设的内容和深度均有所不同. 从内容上看大体包含四门课程: 第一门是微积分 (习惯上又称高等数学), 以研究连续变量为主; 第二门是线性代数, 以研究离散变量为主; 第三门是概率统计, 以研究随机变量为主; 第四门则是数学实验或数学建模, 以数学的应用研究为主.

高等数学是大学数学课群里的首选基础课程, 从教学内容和深度看, 理工类专业要求较高, 然后是经济管理类专业和其他文科类专业, 教学时数也由多到少不全相同.

本书主要面向对数学要求较高的非数学专业本科学生, 同时也兼顾其他专业的需要, 试图为这样一个比较宽泛的大学低年级学生群体开设的高等数学课程提供一套立论严谨, 取材适中, 说理透彻, 叙述流畅且与教学现代化的改革与发展趋势合拍的基础读本.

二

高等数学是一门重要的基础课程, 对理工科专业的学生来说尤为重要. 它包括微积分、空间解析几何、常微分方程等近代数学分支的基础内容. 本书的上册讲授一元微积分和空间解析几何; 下册讲授多元微积分、无穷级数和常微分方程. 一般可在 200 课时授完. 如果精简部分内容, 也可在较少的 180 课时讲完.

非数学专业的本科学生为什么要学习数学课程? 这个问题对于理工科专业的学生来说似乎不言自明, 但实际上仍然存在很多模糊认识. 1998 年冬, 我国数学教育界经过几年的深入研究与准备, 召开了一次以“数学在大学中的地位”为主题的大型研讨会. 国内数学教育界大多数专家学者关于数学教育在大学教育中的应有作用形成了重要的共识, 一致认为: 成功的数学教育既要为学生所学专业提供必要的数学工具, 又不能把这种“工具性”理解得过窄; 要对学生进行必要的理性思维训练, 改善他们的思维品质; 要发挥数学教学中美育的作用, 将大学数学教育纳入素质教育的轨道.

十余年来, 这三条共识对我国高校数学教学和改革产生了积极的影响, 对那些刚刚走进大学校门准备学习大学数学的学生来说, 也有现实的指导意义.

我们知道, 现代数学是自然科学的基本语言, 是运用模式探索物质世界运动机理的主要手段. 对现代工业和现代工程而言, 数学更是表达技术原理、进行科学计算的必不可少的工具. 由于计算机的快速发展, 现代社会的经济运行与组织管理更无法离开现代数学所提供的方法、模式与手段. 所以, 一种成功的数学教育也好, 一个合格的大学生也好, 首先应该教好、学好作为工具的数学, 作为改造客观世界的数学.

提起数学的教与学, 就不应该忘记爱因斯坦 (Einstein) 说过的一句话:"被放在首要位置的永远应该是独立思考和判断的总体能力的培养, 而不是获取特定的知识."这就是不能把数学课程的"工具性"理解得过窄的含义. 大学四年, 转瞬即逝, 可是数学的知识却浩如烟海, 我们应该在那些最基本的原理、最基本的方法、最基本的能力上下工夫, 将它们内化为个体的素质和优秀的思维品质. 还是爱因斯坦说得好:"如果人们已经忘记了他们在学校里所学的一切, 那么所留下的就是教育."微积分能给我们留下什么? 我认为微积分能多方位地塑造科学精神, 建立科学思维的方法. 从这个意义上讲, 我们还要教好、学好作为改造主观世界的数学.

三

内蒙古大学在大学数学教学改革和教材建设上有较好的积累. 1995 年, 作者在内蒙古大学出版社出版了为综合大学物理类专业使用的《高等数学基础教程》. 1999 年, 曹之江教授与作者合作在高等教育出版社出版面向 21 世纪课程教材《微积分简明教程》. 2001 ~2003 年, 作者主持世行贷款 21 世纪初高等教育教学改革项目"大学数学分层次教学的研究与实践". 2005 年, 内蒙古大学的大学数学课程被评为内蒙古自治区精品课程. 本书的编撰思想就是在这些工作积累之下形成的.

本书在引进重要数学概念和数学原理时, 注意尽可能本原地挖掘并阐述那些理性思维训练的要素, 为那些抽象的数学概念固本浚源. 对那些形式化或是数学技巧的内容, 我们秉持淡化的原则, 在讲清问题背景和逻辑演绎的前提下, 不做过多训练.

本书遵循分层次教学的理念, 在上、下两册都设置了一定篇幅的附录, 供有兴趣又有能力的学生阅读. 其中有为微积分创立与发展过程中做出过贡献的数学家简介, 有当前中学数学与大学数学脱节的内容补充, 有希望学生了解而又无法讲授或是并不普遍要求的教学内容. 这种多窗口式的展示是一种尝试, 目的在于满足学生的多元需求.

本书在借助图形几何直观上做了努力, 以增加空间的想象力, 降低课程的难度, 激发学生学习的积极性. 在行文叙述上尽量简明准确, 平实流畅, 兼具良好的可读性与启发性.

四

本书被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材, 源于 2005 年科学出版社的盛情邀请以及孙炯教授的热情鼓励, 没有这些邀请与鼓励, 本书的一些构想可能仍被束之高阁.

本书写作期间得到内蒙古大学教务处朱瑞英副处长和数学科学学院院长杨联贵教授的大力支持以及很多同事的帮助. 协助我编配习题、复习题的是一批优秀的年轻博士和硕士——黄俊杰、高彩霞、刘水霞、范惠荣、刘金存、张静等, 他 (她) 们在繁忙的教学科研工作之余, 认真而有效地工作, 才保证了本书的编撰进度. 书中一些精美插图的绘制得到王镁副教授的帮助, 为本书增加了不少的亮点.

孙炯教授、朱瑞英副教授和于素芬副教授仔细审读了书稿, 提出很有价值的建设性意见和建议, 对此作者表示衷心的感谢! 本书在试用过程中还得到作者所在教学团队的所有同事和承担助教工作的在读硕士生们的积极协助, 作者也深表感谢!

在本书即将出版之际, 还应该感谢曹之江教授多年来在国内和内蒙古大学推进数学教学改革所作出的积极努力, 正是他的关心与指导, 内蒙古大学大学数学作为精品课程的建设才有今天的局面.

由于作者水平所限, 加之时间仓促, 书中存在一些错误在所难免, 望数学教育界的朋友们和读者不吝指正.

刘元骏
2008 年 5 月

目　录

(下　册)

第 6 章　多元函数微分学

本章将研究具有多个自变量的所谓**多元函数**的微分学, 以便在更大的视野内了解微分学的应用. 为叙述上的简便以及更具直观性, 对多元函数的研究主要以**二元函数**为代表, 其结果可以很容易地推广到一般多元函数中去.

在选定直角坐标系之后, 空间里的向量与三元有序实数组之间形成一一对应关系. 在所有空间向量或者说三元有序实数组组成的集合里, 可以定义向量的加法和数乘, 或者说成是三元有序实数组的加法和数乘, 并逐一验证这些运算所满足的种种算律, 得到所谓**三维向量空间**. 如果在三维向量空间里, 再定义向量的**内积**(**数量积**), 便可得到向量的**模**, 两向量的**夹角**以及两点间的**距离**等概念, 进而得到我们所熟知的**三维欧氏空间** $\mathbf{R}^3$①.

三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 就是我们置身其中的现实空间, 三维向量作为 $\mathbf{R}^3$ 中的元素, 按照第 5 章的符号, 记作 $\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,x_3\},\boldsymbol{y}=\{y_1,y_2,y_3\}$ 等, 有时也被称作**三维点**, 记作 $M(x_1,x_2,x_3),N(y_1,y_2,y_3)$ 等.

设 λ 为任一实数, 在 $\mathbf{R}^3$ 中向量的加法、数乘和内积三种运算分别定义为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\{x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3\},$$

$$\lambda\boldsymbol{x}=\{\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3\},$$

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

而向量 $\boldsymbol{x}$ 的模 $|\boldsymbol{x}|$ 以及两个三维点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 间的距离 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\rho(M,N)$ 分别定义为

$$|\boldsymbol{x}|=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=\left[(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

仿照上述方法, 可以建立 **n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$** 的概念.

称一个 n 元有序实数组为一个**n 维向量**, 记作 $\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $\boldsymbol{y}=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 等. 有时也被称作**n 维点**, 记作 $M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $N(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 等. n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中 n 维向量的加法, 数乘和内积的定义可仿照 $\mathbf{R}^3$ 中的规定推广为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\{x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n\},$$

$$\lambda\boldsymbol{x}=\{\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n\},$$

① 本书未给出向量空间和欧氏空间的严格定义, 详见线性代数课程的内容.

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的模 $|\boldsymbol{x}|$ 以及两个 n 维点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 间的距离 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\rho(M,N)$ 也类似地定义为

$$|\boldsymbol{x}|=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}=\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=\left[(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

一维欧氏空间 $\mathbf{R}^1$ 即我们所熟知的直线上所有一维点构成的集合. 二维欧氏空间 $\mathbf{R}^2$ 则是平面上所有二维点构成的集合. 三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 则是空间解析几何里见到的所有三维点构成的集合.

§6.1　多元函数、极限与连续

6.1.1　n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点集

以下介绍 $\mathbf{R}^n$ 中有关点集的一些概念.

设 $M_0\in\mathbf{R}^n$, δ 为正实数, 称 $\mathbf{R}^n$ 中的点集

$$U(M_0,\delta)=\left\{M\in\mathbf{R}^n \middle|\ \rho(M,M_0)<\delta\right\}$$

为 n 维点 M_0 的 **δ邻域**. 它表示 $\mathbf{R}^n$ 中以 M_0 为中心, δ 为半径的 n 维球面内部所有 n 维点所组成的集合. 当 $n=2$ 时, 二维点 $M_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域

$$U(M_0,\delta)=\left\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\right\}$$

实际上是以 $M_0(x_0,y_0)$ 为圆心, δ 为半径的圆周内部的点所构成的点集. 当 $n=1$ 时, 一维点 $M_0(x_0)$ 的 δ 邻域

$$U(M_0,\delta)=\left\{x \,\middle|\, |x-x_0|<\delta\right\}$$

实际上是一个开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

设 $M_0\in\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^n$ 中的点集

$$U^0(M_0,\delta)=\left\{M\in\mathbf{R}^n \,\middle|\, 0<\rho(M,M_0)<\delta\right\}$$

称为 n 维点 M_0 的 **δ去心邻域**, 显然有

$$U^0(M_0,\delta)=U(M_0,\delta)\backslash\{M_0\}.$$

设 $D\subset\mathbf{R}^n$, $M\in\mathbf{R}^n$, 若 $\exists\delta>0$, 使 $U(M,\delta)\subset D$, 则称点 M 为 D 的**内点**. 若 D 仅由内点组成, 称 D 为**开集**.

若 $\mathbf{R}^n\backslash D$ 为开集, 称 D 为**闭集**.

设 $D \subset \mathbf{R}^n$, $M \in \mathbf{R}^n$, 若对 $\forall \delta > 0$, 邻域 $U(M, \delta)$ 内总有 D 内的点, 也有 D 外的点, 则称点 M 为 D 的**边界点**, 参见图 6.1.

D 的边界点的全体组成的集合称为 D 的**边界**, 记作 ∂D.

设 $D \subset \mathbf{R}^n$, $M \in \mathbf{R}^n$, 若对 $\forall \delta > 0$, 点 M 的去心邻域 $U^0(M, \delta)$ 内总有 D 内的点, 则称 M 为 D 的**聚点**. D 的聚点所组成的集合称为 D 的**导集**, 记作 D'.

上述有关点集的概念具有一些简单性质:

(i) 若 M 是 D 的内点, 则 $M \in D$ (自证).

(ii) 在 $\mathbf{R}^n$ 中, 点 M_0 的任给邻域 $U(M_0, \delta)$ 均为开集 (自证, 参见图 6.2). 因此又称 $U(M_0, \delta)$ 为点 M_0 的**开邻域**.

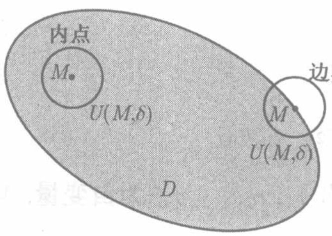

图 6.1　内点与边界点的图示

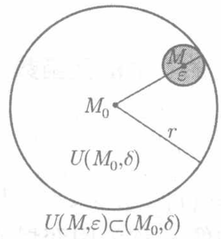

图 6.2　邻域 $U(M_0, \delta)$ 为开集的图示

(iii) 若 M 是 D 的边界点, 则 M 可能属于 D, 也可能不属于 D.

例如, 在 $\mathbf{R}^1$ 中, 集合 $(a, b]$ 的边界点 $a \notin (a, b]$, 而另一个边界点 $b \in (a, b]$.

(iv) 设 $D \subset \mathbf{R}^n$, 则 D 为闭集 $\Longleftrightarrow \partial D \subset D$ (参见习题).

由定义知, 开集的余集是闭集. 例如, 邻域 $U(M_0, \delta)$ 为开集, 它的余集

$$\mathbf{R}^n \backslash U(M_0, \delta) = \{M \in \mathbf{R}^n \mid \rho(M, M_0) \geqslant \delta\}$$

一定是闭集. 利用上述性质还可证明

(v) 闭集的余集是开集.

例如, 在 $\mathbf{R}^1$ 中, 集合 $[a, b]$ 的余集为 $(-\infty, a) \bigcup (b, +\infty)$ 为开集.

应该指出, $\mathbf{R}^n$ 中的集合并不是"非开即闭"! 例如, $\mathbf{R}^1$ 中的半开半闭区间 $(a, b]$ 既非开集, 又非闭集.

根据聚点的定义, 易知

(vi) 若 M 是 D 的聚点, 则 M 可能属于 D, 也可能不属于 D.

例如, 在 $\mathbf{R}^1$ 中, $x = 0$ 与 $x = 1$ 均是集合 $D = (0, 1]$ 的聚点, 但是 $x = 0 \notin D$, 而 $x = 1 \in D$.

(vii) D 为闭集 $\Longleftrightarrow D$的聚点必属于$D \Longleftrightarrow D' \subset D$ (参见习题).

设 $D \subset \mathbf{R}^n, M_0 \in \mathbf{R}^n$, 如果存在正实数 r, 对 $\forall M \in D$, 使得 $\rho(M_0, M) < r$, 则称 D 为**有界集**. 否则称为**无界集**.

例如, $\mathbf{R}^2$ 上的点集 $D=\{(x,y)|x^2+y^2<2\}$ 为有界集, 而它的余集 $D^c=\{(x,y)|x^2+y^2\geqslant 2\}$ 为无界集.

设 $D\subset\mathbf{R}^n$, 若对 $\forall M,N\in D$, 总可用包含于 D 内的折线① 连接起来, 则称 D 为**连通集**. 例如, $\mathbf{R}^1$ 中的点集 (a,b) 是连通集, 但是 $\{a,b\}$ 并不是连通集.

称 $\mathbf{R}^n$ 中的连通开集为**开区域**, 简称**区域**. 连通闭集称为**闭区域**. 例如, $\mathbf{R}^2$ 中的点集 $\{(x,y)|x\geqslant y\}$ 为闭区域, $\{(x,y)|1<x^2+y^2<2\}$ 为开区域.

6.1.2 多元函数的概念

设集合 $D\subset\mathbf{R}^n$, 由 D 到实数集 $\mathbf{R}$ 的映射

$$f:D\to\mathbf{R},$$

称为 D 上的一个 **n 元函数**, 记作

$$u=f(M)\text{ 或 }u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

其中 $M=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 D 内的 n 维点. 称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为**自变量**, M 在映射 f 下的像 u 称为**因变量或函数**.

集合 D 称为函数的**定义域**, 它在 f 下的像集合记作

$$f(D)=\{u\in\mathbf{R}|\ u=f(M),M\in D\},$$

称为函数 f 的**值域**.

n 元函数的定义涵盖了一元函数, 当 $n\geqslant 2$ 时 n 元函数泛称为**多元函数**. 当 $n=2$ 时, 二元函数一般记作

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D\subset\mathbf{R}^2,$$

其中定义域 D 为 $O\text{-}xy$ 平面上的点集.

多元函数的研究将主要以二元函数为例, 这是因为二元函数具有直观的几何表示. 称 $\mathbf{R}^3$ 中的点集

$$\{(x,y,z)|\ z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$$

为二元函数 $z=f(x,y)$ 的**图像**, 一般来说, 它表示 $\mathbf{R}^3$ 中的一个曲面 Σ, 如图 6.3 所示.

如果二元函数用解析表达式表示, 使得该表达式有意义的二维点 (x,y) 组成的点集, 一般说成是函数的**自然定义域**.

① 这里并未对 $\mathbf{R}^n$ 中的折线加以定义, 可参照 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$ 中的折线理解.

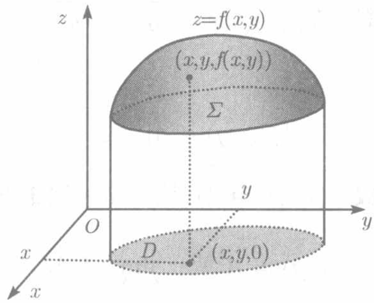

图 6.3 二元函数的图像

例 6.1.1 试求函数 $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ 的自然定义域并给出函数图像.

解 定义域为 O-xy 平面上的闭椭圆域

$$D=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}.$$

函数的图像为 O-xy 平面上方的上半椭球面, 如图 6.4 所示.

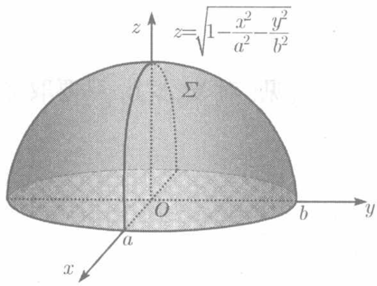

图 6.4 例 6.1.1 的图示

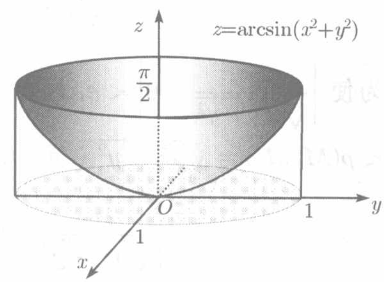

图 6.5 例 6.1.2 的图示

例 6.1.2 试求函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的自然定义域并给出函数图像.

解 定义域为 O-xy 平面上的闭单位圆域

$$D=\left\{(x,y)\middle|\ x^2+y^2\leqslant 1\right\}.$$

函数的图像是以 z 轴为旋转轴的旋转面, 如图 6.5 所示.

6.1.3 极限

我们沿用“ε-δ”语言定义二维点 $M(x,y)$ 趋于点 $M_0(x_0,y_0)$ 时, 二元函数 $z=f(x,y)$ 以实数 A 为极限的概念.

定义 6.1.1 已知二元函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上有定义, 点 M_0 为区域 D 的聚点, A 为一实数. 若对 $\forall\varepsilon>0,\exists\ \delta>0$, 使得对于 $\forall M(x,y)\in D$, 只要

$$0 < \rho(M, M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta,$$

不等式

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

恒成立, 则称实数 A 是函数 $f(x,y)$ 当 M 趋于 M_0 时的极限, 记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A \text{ 或 } \lim_{M\to M_0} f(M) = A.$$

上述极限定义里, 函数 $f(x,y)$ 并不一定在 M_0 点有定义.

例 6.1.3 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

证明 函数 $\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点 $M_0(0,0)$ 没有定义, 但点 $M_0(0,0)$ 是该函数定义域的聚点. 由于 $|2xy| \leqslant x^2+y^2$, 则

$$\left|\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}.$$

为使 $\left|\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| < \varepsilon$, 只要 $\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$. 可见, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 只要取 $\delta = \varepsilon$, 当 $0 < \rho(M, M_0) = \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$ 时, 必有

$$\left|\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon.$$

于是有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

为了区别于一元函数极限, 又称二元函数的极限为**二重极限**.

已经知道, 在一元函数里, 如果存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 则当点 x 从 x_0 的左侧趋近于 x_0, 或从 x_0 的右侧趋近于 x_0, 函数 $f(x)$ 的左右极限都等于 A. 反过来, 如果在 x_0 处的左右极限存在而不相等, 则函数 $f(x)$ 在 x_0 处不存在极限.

对于二重极限来说也有类似结论.

若存在二重极限 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$, 则当点 M 以任何方式 (或者说沿任何路径) 趋近于点 M_0 时, 函数值 $f(M)$ 都会无限接近实数 A. 反过来, 如果点 M 沿两条不同的路径趋近于点 M_0 时, 函数 $f(M)$ 分别无限接近两个不同的实数, 则可以断定二重极限 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ 一定不存在.

例 6.1.4 证明函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在原点 $O(0,0)$ 处不存在二重极限.

证明 取一条过原点 $O(0,0)$ 的直线 $l: y=kx$ (k 为常数). 当 M 沿 l 趋近于原点 $O(0,0)$ 时, 存在函数极限

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{M\in l\\ M\to O}} f(x,y)&=\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,kx)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.\end{aligned}$$

应该指出, 由于点 M 在直线 $l: y=kx$ 上, 上述极限实际上是一元函数的极限, 而且随着 k 的变化而变化. 由此可见, 作为二元函数的 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在原点 $O(0,0)$ 处不存在二重极限.

需要注意, 不能把二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 误认为连续取两次一元函数的极限

$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] \text{ 或 } \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right].$$

上述两种依次实施的极限, 被称为**(二次) 累次极限**. 一般情况下, 二重极限的存在并不能保证累次极限的存在, 反过来, 累次极限的存在也不能保证二重极限的存在. 对它们之间的关系本书不作深入讨论.

一元函数极限的性质, 如有界性、保号性、四则运算的法则等都可以推广到二重极限中去, 此处不再一一列举. 利用这些性质和一元函数极限里的已有结论, 可以帮助我们求解部分二重极限.

例 6.1.5 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ $(x>0, y>0)$.

解 仿照一元函数 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式求极限的方法, 在分式的分子和分母同乘以分母的有理化因式, 得到

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}&=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2-xy)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\\&=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}\\&=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x(\sqrt{x}+\sqrt{y})=0.\end{aligned}$$

本小节中关于二元函数极限的概念和相应结论都可以推广到 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中去.