

配合普通高中课程标准实验教科书

# 尊學與評價

丛书主编 凯歌

## 数学

高中必修

1

适用于人教 A 版

责任编辑 李自典



星球地图出版社



新课标

丛书主编 凯歌

# 导学与评价

高中必修 ①

# 数学

适用 人教 A 版



星球地图出版社

主编 凯歌

新星  
版

图书在版编目(CIP)数据

导学与评价:人教A版.高中数学.1:必修 / 凯歌主  
编. —北京:星球地图出版社,2008.8

ISBN 978-7-80212-601-5

I. 导… II. 凯… III. 数学课—高中—教学参考资料  
IV. G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第104101号

高中数学

丛 书 名 导学与评价(人教A版.数学.必修1)  
丛 书 策 划 金九州文化  
丛 书 主 编 凯 歌  
责 任 编 辑 李 自 典  
出 版 发 行 星球地图出版社  
标 准 书 号 ISBN 978-7-80212-601-5  
社 址 北京市北三环中路69号 邮政编码 100088  
联 系 电 话 010-62052349  
网 址 www.starmap.com.cn  
印 刷 厂 郑州文华印务有限公司  
开 本 尺 寸 880×1230 1/16  
版 次 2008年7月第1版  
印 次 2008年7月第1次印刷  
印 张 8.5  
字 数 348,000  
定 价 13.80元(书+检测题卷)

(如有印刷装订质量问题请与承印厂调换)

联系电话:010-62052349

星球地图出版社





北京·星球地图出版社

ISBN 7-7-89212-501

国家基础教育课程改革已经全面启动,它给学科教材带来了实质性变革。自主、合作、探究、创新等新理念得到积极提倡和实行,教育、教学、考试也发生了重大变化,这引起全社会特别是教师和学生的广泛关注。为了帮助广大师生适应全新的课改理念,提高教育教学质量,我们由专家引领、一线教师执笔,特编写这套集新理念和新课标为一体、熔科学性与实用性为一炉的教辅丛书《导学与评价》。该丛书有以下特点:

1. 最新的课改理念。丛书充分融入课改新理念和新课标要求,广泛汲取教育专家对课改的思想认识;着眼三维目标,注重人文、情感态度与价值观的渗透和融合;体现知识、能力、素质合一,方法、实践、创新一体。

2. 全新的作者队伍。我们精心组织的所有作者全都来自新课标教材实验区,均为各地学科带头人,多为一线特高级教师;他们既有对新课标理念深刻的认识又有丰富的实际教育教学经验,他们用自己选择教辅、评判教辅的标准严格规范自己的写作。

3. 科学的编排体例。丛书在体例设计时,充分遵循课改理念和吸收专家的教育智慧,充分考虑课堂教学的实际需要,注重学生自主学习和教师精要导学相结合,注重知识构建与能力提升相结合,注重素质培养、思维训练和考试能力相结合,从而达到科学性和实用性的完美统一。

#### 【构筑知识桥梁】

总体解读章节或单元学习目标、重点难点和核心要求,概括说明,明确方向,激情导入,并提供教学方略。

#### 【自主学习与知识构建】

学生自主梳理章节基础知识,整合知识结构,培养学生动手动脑的良好习惯,增强学生学习、思考的自觉性、积极性,并夯实基础。

#### 【精要导学与方法策略】

阐述章节或单元重点知识、能力要点、思维体系,使学生立足基础,抓住关键,突破难点,精要讲解,言简意赅,重点突出,使学生准确把握核心内容,逾越思维障碍,走出思维误区;典型例题引导感悟,创设好题、新题,揭示思路方法和学习方略,讲练结合,学以致用,从而培养学生获取和解读信息、调动和运用知识、描述和阐释事物、论证和探讨问题的四维能力。

#### 【迁移应用与探究创新】

针对重点知识和能力训练要求,精编习题,自练自查和探究创新相结合,梯度训练,循序渐进,以达到知识和能力的自然转化、过程和方法的有机统一、思维和素质的综合提升。

#### 【回顾、思考、升华】

遵循系统性原理,整合、梳理章节知识,构建能力框架,把握规律;归纳专题考点,精选典型例题,充分体现基础能力和拓展综合要求;对近三年高考真题详尽解读,把握考查重点,明确能力发展方向。

4. 新颖的成书模式。我们充分满足一线广大师生的需求,丛书各学科的“学生用书”将本章(单元)测试卷、综合测试卷独立成册,夹放在学科教辅书中,并提供“教师用书”,补充丰富的教学参考资料,方便老师们在教学过程中灵活使用。

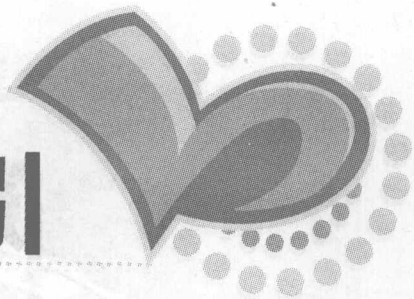
编写一套师生满意的教辅资料是我们最大的心愿,为实现这个心愿,我们一直孜孜以求、精益求精。“精诚所至,金石为开”,我们这套教辅丛书,希望得到您的关注和厚爱!

《导学与评价》丛书编委会

星球地图出版社

二〇〇八年七月





DAOXUEYUPINGJIA  
YUEDUSUOYIN

# 阅读索引

数学必修①(人教A版)

## 第一章 集合与函数概念 ..... (1)

### 1.1 集合 ..... (2)

1.1.1 集合的含义与表示 ..... (2)

1.1.2 集合间的基本关系 ..... (5)

1.1.3 集合的基本运算 ..... (7)

### 1.2 函数及其表示 ..... (10)

1.2.1 函数的概念 ..... (10)

1.2.2 函数的表示法 ..... (13)

### 1.3 函数的基本性质 ..... (16)

1.3.1 单调性与最大(小)值 ..... (16)

1.3.2 奇偶性 ..... (19)

### 回顾、思考、升华 ..... (23)

要点扫描与知识整合 ..... (23)

专题研究与策略盘点 ..... (23)

走近高考 ..... (25)

拓展视野 ..... (26)

## 第二章 基本初等函数(I) ..... (27)

### 2.1 指数函数 ..... (28)

2.1.1 指数与指数幂的运算 ..... (28)

2.1.2 指数函数及其性质 ..... (31)

### 2.2 对数函数 ..... (34)

2.2.1 对数与对数运算 ..... (34)

2.2.2 对数函数及其性质 ..... (38)

### 2.3 幂函数 ..... (41)

### 回顾、思考、升华 ..... (45)

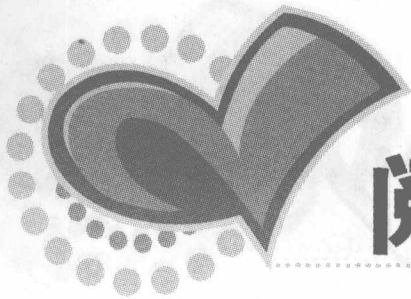
要点扫描与知识整合 ..... (45)

专题研究与策略盘点 ..... (45)

走近高考 ..... (46)

拓展视野 ..... (46)





# 阅读索引

DAOXUEYUPINGJIA  
YUEDUSUOYIN

(浙A 楚人) ① 浙大 ② 浙大

第三章 函数的应用 .....	(48)
3.1 函数与方程 .....	(49)
3.1.1 方程的根与函数的零点 .....	(49)
3.1.2 用二分法求方程的近似解 .....	(52)
3.2 函数模型及其应用 .....	(55)
3.2.1 几类不同增长的函数模型 .....	(55)
3.2.2 函数模型的应用实例 .....	(59)
回顾、思考、升华 .....	(64)
要点扫描与知识整合 .....	(64)
专题研究与策略盘点 .....	(64)
走近高考 .....	(65)
拓展视野 .....	(66)
随堂测试(一) .....	(67)
随堂测试(二) .....	(69)
随堂测试(三) .....	(71)
随堂测试(四) .....	(73)
随堂测试(五) .....	(75)
随堂测试(六) .....	(77)
随堂测试(七) .....	(79)
随堂测试(八) .....	(81)
随堂测试(九) .....	(83)
随堂测试(十) .....	(85)
随堂测试(十一) .....	(87)
随堂测试(十二) .....	(89)
随堂测试(十三) .....	(91)
随堂测试(十四) .....	(93)
随堂测试(十五) .....	(95)
随堂测试(十六) .....	(97)
第一章 检测题 .....	(99)
第二章 检测题 .....	(103)
第三章 检测题 .....	(107)
综合检测题 .....	(111)
参考答案 .....	(115)

## 第一章 集合与函数概念



# 构筑知识桥梁

GOZHUZHISHIQIAOLIANG

## ● 课程标准 ●●●●

### KECHENGBIAOZHUN

#### ● 知识与技能

能用最基本的集合语言表示有关数学对象,并能在自然语言、图形语言、集合语言之间进行转换,体会用集合语言表达数学内容的简洁性、准确性,培养学生运用集合语言进行交流的能力.

#### ● 过程与方法

函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型.通过本章的学习,使学生不仅把函数看成变量之间的依赖关系,还能用集合与对应的语言刻画函数,感受用函数概念建立模型的过程与方法.

#### ● 情感、态度与价值观

通过某类事物已有性质,类比、联想另一类相似事物的性质,培养思维的灵活性、感悟任何抽象的数学概念来源于真实的客观世界,确立正确的数学观.

## ● 专题探究 ●●●●

### ZHUANTITANJIU

本章是高中数学的起始章.集合语言是现代数学的基本语言,使用集合语言可以简洁、准确地表达数学的一些内容.许多重要的数学分支,如近代代数、实变函数、概率统计等都建立在集合理论的基础上.因此,学好本章知识对于以后数学学习意义重大.函数是中学数学的重点内容,函数的思想方法贯穿高中数学课程始终,利用函数思想可以解决很多数学问题,为后续学习奠定基础.

## ● 学法点津 ●●●●

### XUEFADIANJIN

注意和初中数学知识的衔接,认真整理初中数学知识,认真理解,反复推敲思考本章知识点的含义、各种表示方法,对易混淆的知识仔细辨析、区别.联系自己的生活经历和实际问题,构建函数的一般概念,反复体会、螺旋上升、加深理解、灵活运用.要从实际背景和定义两方面理解函数的本质.





## 1.1 集合

### 1.1.1 集合的含义与表示

#### 自主学习与知识构建

##### 自主·预习·思考

##### 1. 集合

(1)含义:一般地,我们把 \_\_\_\_\_ 统称为元素,把一些元素组成的 \_\_\_\_\_ 叫做集合(简称为集).

(2)相等:只要构成两个集合的 \_\_\_\_\_ 是一样的,即这两个集合的元素完全相同,就称这两个集合相等.

##### 2. 表示

(1)字母表示法:用一个大写拉丁字母表示集合,如  $A, B, C$  等. 常见数集的表示:自然数集记为 \_\_\_\_\_, 整数集记为 \_\_\_\_\_; 正整数集记为 \_\_\_\_\_ 或 \_\_\_\_\_, 有理数集记为 \_\_\_\_\_; 实数集记为 \_\_\_\_\_.

(2)列举法:把集合中的全部元素 \_\_\_\_\_ 拿出来,并用花括号“{ }”括起来表示集合的方法叫做列举法.

(3)描述法:在花括号内先写上表示这个集合元素的 \_\_\_\_\_ 及其 \_\_\_\_\_ (或变化)范围,再画一条竖线,在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征. 这种用集合所含元素的 \_\_\_\_\_ 表示集合的方法叫做描述法.

##### 3. 元素与集合

(1)关系: \_\_\_\_\_ 或 \_\_\_\_\_.

(2)关系表示:如果  $a$  是集合  $A$  中的元素,就说元素  $a$  属于集合  $A$ , 记作  $a \in A$ ; 如果  $a$  不是集合  $A$  中的元素,就说元素  $a$  不属于集合  $A$ , 记作  $a \notin A$ .

4. 2004年1月23日,广西隆安县丁当镇一个个体养鸭场发生家禽数只死亡,经当地兽医部门初步诊断为疑似高致病性禽流感,当地政府立即按规定将病例送国家禽流感参考实验室进行病原分离和鉴定,同时依照《动物防疫法》对疫区进行了封锁,捕杀了疫点周围3 km范围内所有家禽1.4万只,对5 km范围内的家禽进行了强制免疫.

——试问,此次捕杀的所有家禽是否是确定的? 免疫的所有家禽是否是确定的? 它们各自能否组成集合?

5. 2004年,为了解决朝鲜核问题,我国提出并组织了“六方会谈”,参加“六方会谈”的国家构成一个集合;北京2008年奥运会解说员应试者构成一个集合;大于1的实数的全体构成一个集合. 这些集合怎样表示才更简洁呢?

## 精要导学与方法策略

### 要点·剖析·突破

#### 1. 集合的概念

一般地,一定范围内某些确定的,不同的对象的全体构成一个集合. 集合中的每一个对象称为该集合的元素. 集合常用大写拉丁字母来表示,如集合  $A$ , 集合  $B$  等. 集合的元素常用小写拉丁字母来表示,如  $a, b, c$  等.

#### 2. 集合中元素的特性

(1)确定性:对于一个给定的集合,任何一个对象或者是这个集合中的元素,或者不是它的元素,这是集合最基本的特征.

(2)互异性:集合中的任何两个元素都是能区分的(即互不相同的),相同的对象归入任何一个集合时,只能算作这个集合的一个元素.

(3)无序性:在一个集合中,通常不考虑它的元素之间的顺序,也就是说  $\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$ .

#### 3. 集合与元素的关系

元素与集合有属于( $\in$ )和不属于( $\notin$ )两种关系,如果  $a$  是集合  $A$  的元素,就说  $a$  属于集合  $A$ , 记作  $a \in A$ , 读作“ $a$  属于  $A$ ”; 如果  $b$  不是集合  $A$  的元素,就说  $b$  不属于  $A$ , 记作  $b \notin A$ , 读作“ $b$  不属于  $A$ ”.

#### 4. 集合的表示方法

##### (1)列举法

把集合的元素一一列举出来,并用花括号“{ }”括起来表示集合的方法称为列举法. 列举法的优点是可以明确集合中具体的元素及元素的个数.

使用列举法必须注意:

①元素间用“,”隔开;

②集合中元素必须满足三个特性;

③对于含有限个元素且个数较小的集合采取该方法较适宜,若元素个数较多或无限个但构成集合的这些元素有明显规律,也可用列举法中间使用省略号,但必须把元素规律显示清楚后才能用省略号,如不超过1000的正整数构成的集合可表示为  $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ .

##### (2)描述法

用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法,具体方法是:在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围,再画一条竖线,在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征. 它的形式为  $\{p \in D | p \text{ 适合的条件}\}$ , 其中  $p$  叫做代表元素,  $D$  为  $p$  的限制范围,其含义为所有适合该条件的对象构成的集合. 如果从上下文的关系来看,  $p \in D$  是明确的,那么  $p \in D$  可以省略,只写其元素  $p$  适合的条件. 例如  $A = \{x \in \mathbf{R} | 1 \leq x < 2\}$  也可表示为  $A = \{x | 1 \leq x < 2\}$ ;  $B = \{x \in \mathbf{Z} | x = 3k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$  也可表示为  $B = \{x | x = 3k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$ .

描述法的语言形式有三种:文字语言、符号语言、图形语言. 如表示直线  $y = x$  上所有点组成的集合,可用下列三种形式表示:

①文字语言形式:直线  $y = x$  上所有点组成的集合;

②符号语言形式:  $\{(x, y) | y = x\}$ ;

③图形语言形式:在平面直角坐标系内画出 I、III 象限的角平分线.

使用描述法必须注意:

①应写出该集合中元素的代表符号,如集合  $\{x | x \geq 2\}$  不能

写成  $\{x \geq 2\}$ , 这里便少了代表元素. 又如集合  $\{(x, y) | y = x^2\}$  与集合  $\{y | y = x^2\}$  便表示两个不同的集合, 前者为点集, 而后者为数集, 区别就在于它们的代表元素不同;

②准确说明该集合中元素的特性;

③应对代表元素进行说明, 如下列表示方法便是错误的:  $\{(x, y) | (1, 2)\}$ , 事实上它应表示为  $\{(x, y) | x=1, y=2\}$ , 或表示为  $\{(1, 2)\}$ .

(3)Venn 图法

为了形象直观, 常常画一条封闭的曲线, 用它的内部来表示集合, 这种方法对研究集合关系十分有用.

典题·引导·感悟

题型一 集合中元素特征的应用

例1 考查下列每组对象能否构成一个集合?

(1)所有的好人; (2)不超过 20 的非负数; (3)我班 16 岁以下的学生; (4)充分接近  $\sqrt{3}$  的实数.

引导: 集合的元素具有确定性, 对于集合  $A$  和某一对象  $x$ , 有一个明确的判断标准使  $x \in A$  或  $x \notin A$ , 二者必居其一, 不能模棱两可.

解: (1)“所有的好人”无明确标准, 对于某个人是否是“好人”无法客观地判断, 因此(1)不能构成集合; 类似地(4)也不能构成集合. (2)任何一个实数  $x$ , 可以明确地判断是不是“不超过 20 的非负数”, 即“ $0 \leq x \leq 20$ ”与“ $x > 20$  或  $x < 0$ ”, 两者必居其一, 且仅居其一, 故(2)能构成集合, 类似地(3)也能构成集合.

例2 若  $-3 \in \{a-3, 2a-1, a^2-4\}$ , 求实数  $a$  的取值.

引导: 解决此类问题的关键是要注意元素的三个特征.

解: 因为  $-3 \in \{a-3, 2a-1, a^2-4\}$ , 则

若  $-3 = a-3$ , 则  $a=0$ , 此时集合为  $\{-3, -1, -4\}$ , 符合题意;

若  $-3 = 2a-1$ , 则  $a=-1$ , 此时集合为  $\{-4, -3, -3\}$ , 这与元素的互异性矛盾, 舍去;

若  $-3 = a^2-4$ , 则  $a=1$  或  $a=-1$  (舍去), 此时集合为  $\{-2, 1, -3\}$ , 符合题意.

综上所述  $a=0$  或  $a=1$ .

练一练 若  $1 \in \{(a+1)^2, a^2+3a+3\}$ , 求实数  $a$  的值.

题型二 元素与集合的关系

例3 设实数集  $S$  是满足下面两个条件的集合:

①  $1 \notin S$ ; ② 若  $a \in S$ , 则  $\frac{1}{1-a} \in S$ .

(1)求证: 若  $a \in S$  则  $1 - \frac{1}{a} \in S$ ;

(2)若  $2 \in S$ , 则在  $S$  中必含有其它的两个数, 试求出这两个数.

(3) $S$  能否是单元素集? 若能, 把它求出来; 若不能, 说明理由.

引导: 由题目可获得以下信息:

集合  $S$  满足两个条件: ①  $1 \notin S$ ; ② 若  $a \in S$ , 则  $\frac{1}{1-a} \in S$ . 关键是条件②. 解答本题的关键是恰当地多次使用条件②, 还要注意集合

中元素的互异性.

证明: (1) 由  $a \in S$ , 则  $\frac{1}{1-a} \in S$ , 可得  $\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} \in S$ ,

即  $\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} = \frac{1-a}{1-a-1} = 1 - \frac{1}{a} \in S$ ,

故若  $a \in S$ , 则  $1 - \frac{1}{a} \in S$ .

解: (2) 由  $2 \in S$ , 则  $\frac{1}{1-2} = -1 \in S$ ,

由  $-1 \in S$ , 得  $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in S$ ,

而当  $\frac{1}{2} \in S$  时,  $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \in S$ ,

又回到了开始, 因此当  $2 \in S$  时, 另外两个元素  $-1 \in S, \frac{1}{2} \in S$ .

(3) 不妨设  $S = \{a\}$ , 则由条件②得:  $\frac{1}{1-a} \in S$ ,

由元素的互异性知:  $a = \frac{1}{1-a}$ ,

即  $a^2 - a + 1 = 0$ , 由于  $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ ,

故方程无实根, 因此集合  $S$  不能为单元素集.

点拨 本题解决的关键是多次使用条件②, 此外还应看到, 在解决问题的过程中使用了集合中元素的互异性, 因此遇到集合问题时要牢牢把握集合的性质, 当然若能利用好第一问的结论, 则能使第二问快速获解.

练一练 若将例题中第(2)问  $2 \in S$  改为  $x \in S$ , 求集合  $S$ , 应如何求解.

题型三 集合的表示方法

例4 下列六种表示法.

①  $\{x=-1, y=2\}$ ; ②  $\{(x, y) | x=-1, y=2\}$ ; ③  $\{-1, 2\}$ ; ④  $(-1, 2)$ ; ⑤  $\{(-1, 2)\}$ ; ⑥  $\{(x, y) | x=-1 \text{ 或 } y=2\}$

能表示方程组  $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$  的解集的是 ( )

A. ①②③④⑤⑥ B. ②③④⑤  
C. ②⑤ D. ②⑤⑥

引导: 集合的表示关键在于明确其元素的特征.

解: 因交点为点集, 故②⑤正确, 应选 C.

练一练 用适当的方法

表示如图 1-1-1 中的阴影部分的点 (含边界) 组成的点的集合  $M$ .

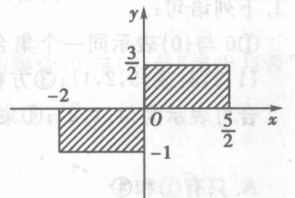


图 1-1-1



思维·误区·警示

1. 集合的元素具有三大特性:确定性可用来判断对象的全体能否构成集合,无序性表示两个集合只要元素相同则为同一集合,而互异性则在集合元素中含有字母需要求解时有着取舍的作用,在解题过程中易被忽视,应引起重视.

2. 解决集合问题的关键是:弄清集合中元素的特征,把抽象问题具体化、形象化,准确地用文字语言去叙述,准确理解其意义.

3. 要弄清集合中的元素是什么,如 $\{x|y=x^2\}$ 与 $\{y|y=x^2\}$ 的关系,这也是易疏忽的.

迁移应用与探究创新

自练·自查·自评

- 下列各组对象:①接近0的数的全体;②比较小的正整数全体;③平面上到点O的距离等于1的点的全体;④正三角形的全体;⑤ $\sqrt{2}$ 的近似值的全体,其中能构成集合的有 ( )  
A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个
- 已知A是由 $0, m, m^2-3m+2$ 三个元素组成的集合,且 $2 \in A$ ,则实数m为 ( )  
A. 2 B. 0或3  
C. 3 D. 0, 2, 3均可
- 定义集合运算: $A \odot B = \{z | z = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$ , 设 $A = \{0, 1\}, B = \{2, 3\}$ , 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为 ( )  
A. 0 B. 6 C. 12 D. 18
- 方程组 $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$ 的解的集合是 ( )  
A. (5, 4) B. {5, -4}  
C. {(-5, 4)} D. {(5, -4)}
- 下列集合中,不同于另外三个集合的是 ( )  
A.  $\{x|x=1\}$  B.  $\{x=1\}$   
C. {1} D.  $\{y|(y-1)^2=0\}$
- 已知集合 $A = \{x|ax^2+2x+1=0, a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}\}$ .  
(1)若A中只有一个元素,求a的值;  
(2)若A中至多有一个元素,求a的取值范围.

实践·探究·创新

- 下列语句:  
①0与{0}表示同一个集合;②由1, 2, 3组成的集合可表示为{1, 2, 3}或{3, 2, 1};③方程 $(x-1)^2(x-2)^2=0$ 的所有解的集合可表示为{1, 1, 2};④集合 $\{x|4 < x < 5\}$ 可以用列举法表示. ( )  
A. 只有①和④ B. 只有②和③  
C. 只有② D. 以上语句都不对
- 给出下列关系:① $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}$ ; ② $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$ ; ③ $|-3| \in \mathbf{N}^*$ ; ④ $|- \sqrt{3}| \in \mathbf{Q}$ . 其中正确的个数为 ( )

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 设P, Q是两个非空实数集合, 定义集合 $P+Q = \{a+b | a \in P, b \in Q\}$ , 若 $P = \{0, 2, 5\}, Q = \{1, 2, 6\}$  则 $P+Q$ 中的元素的个数是 ( )  
A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

- 已知集合 $S = \{a, b, c\}$ 中的三个元素是 $\triangle ABC$ 的三边长, 那么 $\triangle ABC$ 一定不是 ( )  
A. 锐角三角形 B. 直角三角形  
C. 钝角三角形 D. 等腰三角形
- 设a, b都是非零实数,  $y = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{ab}{|ab|}$ 可能取得的值组成的集合为 ( )  
A. {3} B. {3, 2, 1}  
C. {3, 1, -1} D. {3, -1}

- 由大于-3且小于11的偶数组成的集合是 ( )  
A.  $\{x|-3 < x < 11, x \in \mathbf{Q}\}$   
B.  $\{x|-3 < x < 11\}$   
C.  $\{x|-3 < x < 11, x=2k, k \in \mathbf{N}\}$   
D.  $\{x|-3 < x < 11, x=2k, k \in \mathbf{Z}\}$
- 求实数集 $\{1, x, x^2-x\}$ 中的x的值.

- 集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x = a + \sqrt{2}b, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}\}$ , 判断下列元素x与集合A的关系:  
(1) $x=0$ ; (2) $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ ; (3) $x_1 \in A, x_2 \in A, x = x_1 + x_2$ ; (4) $x_1 \in A, x_2 \in A, x = x_1 \cdot x_2$ .

- 用描述法写出直角坐标系内第四象限所有点的坐标的集合M, 并指出集合 $A = \{(x, y) | y = -2x^2 + x - 1, x \in \mathbf{R}, x > 0\}$ 中所有点是否属于M.

自我评价

通过以上的学习,你肯定收获多多,或许也有一些疑惑,你能把它记在下面吗?

---



---



---



## 1.1.2 集合间的基本关系

### 自主学习与知识构建

#### 自主·预习·思考

##### 1. 子集

(1)定义:一般地,对于两个集合  $A$  与  $B$ ,如果集合  $A$  的任意一个元素都是集合  $B$  的元素,我们就说这两个集合之间有 \_\_\_\_\_ 关系,称集合  $A$  为集合  $B$  的子集,记作  $A \subseteq B$  (或  $B \supseteq A$ ),读作“ $A$  含于  $B$ ”(或“ $B$  包含  $A$ ”).

(2)图示:当  $A \subseteq B$  时,用 Venn 图表示,如图 1-1-2-1(1)(2) 所示.

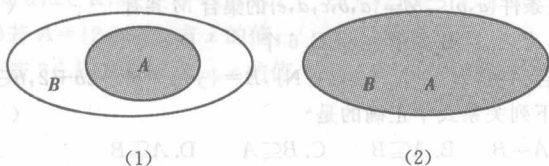


图 1-1-2-1

##### 2. 集合相等

(1)定义 1:只要构成两个集合的 \_\_\_\_\_ 是一样的,即这两个集合中的元素完全相同,就称这两个集合相等.

(2)定义 2:如果集合  $A$  是集合  $B$  的 \_\_\_\_\_,且集合  $B$  是集合  $A$  的 \_\_\_\_\_,那么集合  $A$  与集合  $B$  相等,记作  $A=B$ .

(3)图示:当  $A=B$  时,用 Venn 图表示,如图 1-1-2-2 所示.



图 1-1-2-2

##### 3. 真子集

(1)定义:如果集合  $A \subseteq B$ ,且 \_\_\_\_\_ 元素  $x \in B$ ,且  $x \notin A$ ,我们就称集合  $A$  是集合  $B$  的真子集,记作 \_\_\_\_\_ (或  $B \supsetneq A$ ).

(2)图示:当  $A \subsetneq B$  时,用 Venn 图表示,如图 1-1-2-3 所示.

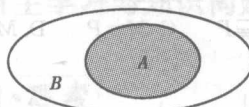


图 1-1-2-3

##### 4. 空集

(1)定义:我们把 \_\_\_\_\_ 的集合叫做空集,记作 \_\_\_\_\_.

(2)规定:空集是任何集合的 \_\_\_\_\_,即  $\emptyset \subseteq A$ ;空集是任何 \_\_\_\_\_ 的真子集,即  $\emptyset \subsetneq A (A \neq \emptyset)$ .

5. 用适当的符号表示下列各题元素与集合、集合与集合之间的关系:

(1)  $0$  与  $\emptyset$ ; (2)  $\emptyset$  与  $\{0\}$ ; (3)  $\{(2,4)\}$  与  $\{(x,y) | y=2x\}$ .

6. 集合  $\{a,b,c\}$  的所有子集个数是 \_\_\_\_\_,真子集个数是 \_\_\_\_\_,非空真子集个数是 \_\_\_\_\_.

## 精要导学与方法策略

### 要点·剖析·突破

#### 1. Venn 图

(1)定义:在数学中,经常用平面上封闭曲线的内部代表集合,这种图称为 Venn 图,这种表示集合的方法叫做图示法.

(2)适用范围:有限集且元素个数不太多,有时也用来分析几个无限集之间包含与被包含关系.

(3)使用方法:把元素写在封闭曲线的内部.

#### 2. 子集概念的理解

(1)“ $A$  是  $B$  的子集”的含义是:集合  $A$  中的任何一个元素都是集合  $B$  中的元素,即由  $x \in A$ ,能推出  $x \in B$ .

(2)在子集的定义中,不能理解为子集  $A$  是  $B$  中的部分元素所组成的集合,因为若  $A = \emptyset$ ,则  $A$  中不含任何元素;若  $A = B$ ,则  $A$  中含有  $B$  中的所有元素,但此时都说集合  $A$  是集合  $B$  的子集.

(3)元素与集合的关系是属于与不属于的关系,用符号“ $\in$ ”、“ $\notin$ ”表示;集合与集合之间的关系是包含、真包含、相等的关系,用符号“ $\subseteq$ ”、“ $\subsetneq$ ”、“ $=$ ”表示.

例如:集合  $A = \{1,2\}$ ,  $B = \{1,2,3,5\}$ ,则  $A$  是  $B$  的子集,也是真子集,用符号“ $A \subseteq B$ ”与“ $A \subsetneq B$ ”表示均可,但“ $A \subsetneq B$ ”更准确一些,所以解题时,要选择最优的表示方法.

#### 3. 子集的有关性质

(1)  $A \subseteq A$ .

(2)  $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C; A \subsetneq B, B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C$ .

(3)若某集合  $A$  有  $n$  个元素,则它的所有子集的个数是  $2^n$ .

(4)空集是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集.

### 典题·引导·感悟

#### 题型一 判断集合间的关系

例 下列各式中,正确的个数是 \_\_\_\_\_ ( )

(1)  $\{0\} \in \{0,1,2\}$ ; (2)  $\{0,1,2\} \subseteq \{2,1,0\}$ ; (3)  $\emptyset \subseteq \{0\}$ ; (4)  $\emptyset = \{0\}$ ; (5)  $\{0,1\} = \{(0,1)\}$ ; (6)  $0 = \{0\}$

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

引导:首先要分清是元素与集合的关系,还是集合与集合的关系,如果是集合与集合的关系,还要分清是什么关系.

解:对于(1),是集合与集合的关系,应为  $\{0\} \subseteq \{0,1,2\}$ .

对于(2),实际为同一个集合,任何一个集合是它本身的子集.

对于(3),空集是任何集合的子集.

对于(4), $\{0\}$ 是含有单元素  $0$  的集合,空集不含任何元素,并且空集是任何非空集合的真子集,所以  $\emptyset \subsetneq \{0\}$ .

对于(5), $\{0,1\}$ 是含两个元素  $0$  与  $1$  的集合,而  $\{(0,1)\}$ 是有序数对为元素的单元素  $(0,1)$  的集合,所以  $\{0,1\}$  与  $\{(0,1)\}$  不相等.

对于(6), $\{0\}$ 是含有单元素  $0$  的集合, $0$  与  $\{0\}$  是“属于与否”的关系,所以  $0 \in \{0\}$ .

$\therefore$  (2)、(3)是正确的.

$\therefore$  选 B.

点拨 要搞清楚  $0, \{0\}, \emptyset, \{\emptyset\}$  的不同意义,切忌混淆,例如  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}, \emptyset \in \{\emptyset\}, \emptyset \subseteq \{\emptyset\}$  都是正确的.

**练一练** 已知  $X = \{x | x = (2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ ,  $Y = \{y | y = (4k \pm 1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ , 试判断集合  $X$  与  $Y$  的关系.

**题型二 子集关系的应用**

**例** 已知  $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$ ,  $B = \{x | mx = 1\}$ , 若  $B \subseteq A$ , 求实数  $m$  所构成的集合  $M$ , 并写出  $M$  的所有子集.

**引导:** 由  $B \subseteq A$ , 知  $B$  是  $A$  的真子集, 由列举法求出  $A$ , 再求出  $B$  的元素进而求  $m$  的值.

**解:** 由  $x^2 - 5x + 6 = 0$  得  $x = 2$  或  $x = 3$ ,

$\therefore A = \{2, 3\}$ .

由  $B \subseteq A$  知  $B = \{2\}$  或  $B = \{3\}$  或  $B = \emptyset$ .

若  $B = \emptyset$ , 则  $m = 0$ ; 若  $B = \{2\}$ , 则  $m = \frac{1}{2}$ ;

若  $B = \{3\}$ , 则  $m = \frac{1}{3}$ . 故  $M = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ .

从而  $M$  的所有子集为  $\emptyset, \{0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{3}\}, \{0, \frac{1}{2}\}, \{0, \frac{1}{3}\}, \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}, \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ .

**点拨** 由  $B \subseteq A$  知  $B$  可为空集, 解题时注意不要漏掉.

**练一练** 已知集合  $A = \{x | x > 2, \text{ 或 } x < -1\}$ ,  $B = \{x | a < x < a + 1\}$ , 若  $B \subseteq A$ , 求实数  $a$  的范围.

**题型三 集合相等关系的应用**

**例** 已知三元素集合  $A = \{x, xy, x - y\}$ ,  $B = \{0, |x|, y\}$ , 且  $A = B$ , 求  $x$  与  $y$  的值.

**引导:** 由“相等”的定义和集合中元素的互异性, 构造  $x, y$  的方程.

**解:**  $\because 0 \in B, A = B, \therefore 0 \in A. \therefore$  集合  $A$  为三元素集,

$\therefore x \neq xy, \therefore x \neq 0$ .

又  $\because 0 \in B, y \in B, \therefore y \neq 0$ , 从而  $x - y = 0$ . 这时,  $A = \{x, x^2, 0\}, B = \{0, |x|, x\}, \therefore x^2 = |x|$ , 则  $x = 0$  (舍去), 或  $x = 1$  (舍去) 或  $x = -1$ . 经验证  $x = -1, y = -1$  适合.

**点拨** 灵活运用集合中元素的互异性, 是解决本题的关键.

**思维·误区·警示**

本节容易在以下环节出错:

1. 符号的使用, 在解题中易混淆元素与集合的关系及集合之间的关系符号的表示, 对符号认识不清;
2. 忽略空集的情况, 造成解题过程残缺不全, 这点应给予高度重视.

**迁移应用与探究创新**

**自练·自查·自评**

1. 如果  $A = \{x | x > -1\}$ , 那么正确的结论是 ( )  
A.  $0 \subseteq A$  B.  $\{0\} \subseteq A$   
C.  $\{0\} \in A$  D.  $\emptyset \in A$
2. 设  $A = \{x | 1 < x < 2\}$ ,  $B = \{x | x < a\}$ , 若  $A \subseteq B$ , 则  $a$  的取值范围是 ( )  
A.  $a \geq 2$  B.  $a \leq 1$  C.  $a \geq 1$  D.  $a \leq 2$
3. 设集合  $P = \{x | y = x^2\}$ , 集合  $Q = \{(x, y) | y = x^2\}$ , 则  $P, Q$  的关系是 ( )  
A.  $P \subseteq Q$  B.  $P \supseteq Q$  C.  $P = Q$  D. 以上都不对
4. 满足条件  $\{a, b\} \subseteq M \subseteq \{a, b, c, d, e\}$  的集合  $M$  共有 ( )  
A. 8 个 B. 7 个 C. 6 个 D. 5 个
5. 集合  $A = \{x | x = a^2 + 1, a \in \mathbf{N}\}$ ,  $B = \{y | y = b^2 - 2b + 2, b \in \mathbf{N}\}$ , 则下列关系式中正确的是 ( )  
A.  $A = B$  B.  $A \subseteq B$  C.  $B \subseteq A$  D.  $A \subseteq B$
6. 含有三个实数的集合可表示为  $\{a, \frac{b}{a}, 1\}$ , 也表示为  $\{a^2, a + b, 0\}$ , 求  $a^{1999} + b^{2000}$  的值.

**实践·探究·创新**

1. 已知集合  $A = \{-1, 3, 2m - 1\}$ , 集合  $B = \{3, m^2\}$ , 若  $B \subseteq A$ , 则  $m =$  ( )  
A. 1 B. -1 C. 2 D. -2
2. 已知集合  $M = \{(x, y) | x + y < 0 \text{ 且 } xy > 0\}$ , 集合  $P = \{(x, y) | x < 0 \text{ 且 } y < 0\}$ , 那么  $M$  与  $P$  的关系是 ( )  
A.  $P \subseteq M$  B.  $M \subseteq P$  C.  $M = P$  D.  $M \not\subseteq P$
3. 设集合  $P = \{x | x = \frac{k}{3} + \frac{1}{6}, k \in \mathbf{Z}\}$ ,  $Q = \{x | x = \frac{k}{6} + \frac{1}{3}, k \in \mathbf{Z}\}$ , 则 ( )  
A.  $P = Q$  B.  $P \subseteq Q$   
C.  $P \supseteq Q$  D.  $P \cap Q = \emptyset$
4. 下列各组两个集合相等的一组是 ( )  
A.  $P = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + 1 = 0\}, Q = \{x \in \mathbf{R} | x^2 = 0\}$   
B.  $P = \{y \in \mathbf{R} | y = t^2 + 1, t \in \mathbf{R}\}, Q = \{x \in \mathbf{R}^+ | x^2 - 1 \geq 0\}$   
C.  $P = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}, Q = \{x | x = 4k + 2, k \in \mathbf{Z}\}$   
D.  $P = \{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}, Q = \{(x, y) | y = x^2 - 1, x, y \in \mathbf{R}\}$
5. 下列集合中, 只有一个子集的集合是 ( )  
A.  $\{x | x^2 \leq 0\}$  B.  $\{x | x^3 \leq 0\}$   
C.  $\{x | x^2 < 0\}$  D.  $\{x | x^3 < 0\}$
6. 设含有 4 个元素的集合的全部子集个数为  $S$ , 其中由 3 个元素组成全部的子集个数为  $T$ , 则  $\frac{S}{T} =$  \_\_\_\_\_.
7. 设  $A, B$  为两个集合, 下列四个命题:

①  $A \subseteq B \Leftrightarrow$  对任意  $x \in A$ , 有  $x \in B$ ;

②  $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A$  与  $B$  没有公共元素;

③  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \supseteq B$ ;

④  $A \subseteq B \Leftrightarrow$  存在  $x \in A$ , 使得  $x \notin B$ .

其中正确命题的序号是 \_\_\_\_\_. (把符合要求的命题序号都写上)

8. 已知  $A = \{x | x < -1, \text{ 或 } x > 2\}$ ,  $B = \{x | 4x + a < 0\}$ , 当  $B \subseteq A$  时, 求实数  $a$  的取值范围.

9. 已知  $a, x \in \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{2, 4, x^2 - 5x + 9\}$ ,  $B = \{3, x^2 + ax + a\}$

(1) 若  $A = \{2, 3, 4\}$ , 求  $x$  的值;

(2) 若  $2 \in B, B \subseteq A$ , 求  $a, x$  的值.

### 自我评价

通过以上的学习, 你肯定收获多多, 或许也有一些疑惑, 你能把它记在下面吗?

## 1.1.3 集合的基本运算

### 自主学习与知识构建

#### 自主·预习·思考

##### 1. 并集

(1) 定义: 一般地, 由属于集合  $A$  \_\_\_\_\_ 集合  $B$  的 \_\_\_\_\_ 元素组成的集合, 称为  $A$  与  $B$  的并集, 记作  $A \cup B$ , 即  $A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$ , 因此  $A \cup B$  是由两集合  $A$  与  $B$  的“\_\_\_\_\_”元素组成的集合.

(2) 图示: 用 Venn 图表示, 如图 1-1-3-1(1)(2) 所示.



图 1-1-3-1

##### 2. 交集

(1) 定义: 一般地, 由属于集合  $A$  \_\_\_\_\_ 属于集合  $B$  的 \_\_\_\_\_ 元素所组成的集合, 称为  $A$  与  $B$  的交集, 记作  $A \cap B$ , 即  $A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$ , 因此  $A \cap B$  是由两集合  $A$  与  $B$  的“\_\_\_\_\_”元素所组成的集合.

(2) 图示: 用 Venn 图表示, 如图 1-1-3-2 所示.

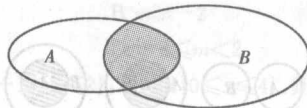


图 1-1-3-2

##### 3. 补集

(1) 全集: 一般地, 如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素, 那么就称这个集合为全集, 常用  $U$  来表示, 全集具有相对性.

(2) 补集: 对于一个集合  $A$ , 由全集  $U$  中 \_\_\_\_\_ 集合  $A$  的所有元素组成的集合称为集合  $A$  相对于全集  $U$  的补集, 简称为集合  $A$  的补集, 记作  $\complement_U A$ , 即  $\complement_U A = \{x | x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}$ , 也就是说从全集  $U$  中取出集合  $A$  的全部元素之后, 所有剩余的元素组成的集合就是  $\complement_U A$ .

(3) 图示: 用 Venn 图表示全集和补集, 如图 1-1-3-3 所示.

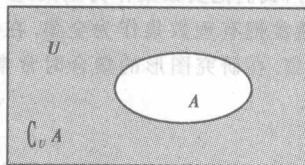


图 1-1-3-3

4. 已知  $A = \{x | -2 < x < 3\}$ ,  $B = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$ , 求  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ .

5. 已知  $A = \{x | x \text{ 是等腰三角形}\}$ ,  $B = \{x | x \text{ 是直角三角形}\}$ , 求  $A \cap B, A \cup B$ .

### 精要导学与方法策略

#### 要点·剖析·突破

##### 1. 并集与交集

(1) 正确理解“且”、“或”的内涵

① “且”即“并且”、“而且”, “ $x \in A$ , 且  $x \in B$ ”, 即  $x$  是  $A$  与  $B$  的公共元素;

② 并集概念中的“或”与生活用语中的“或”含义是不同的, 生活用语中的“或”是“或此”、“或彼”, 只居其一, 并不兼有; 并集概念中的“或”是“或此”、“或彼”、“或此彼”, 可以兼有, “ $x \in A$  或  $x \in B$ ”包含 3 种情形: ①  $x \in A$  且  $x \in B$ ; ②  $x \in A$  但  $x \notin B$ ; ③  $x \in B$  但  $x \notin A$ ; 这 3 部分元素构成了  $A \cup B$ .

(2) 并集与交集的求法

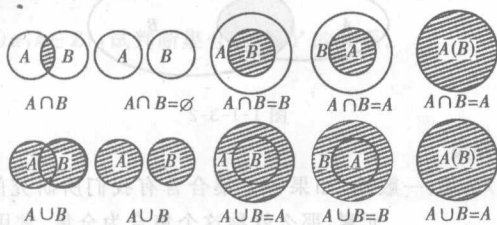
并集和交集的定义是求两个集合的并集和交集的基本方法, 因此掌握好并集的定义式:  $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$  及交集的定义式:  $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$  并会表示非常重要, 若两个集合是用列举法给出的, 其并集、交集易求, 若两个集合是用描述法给出的, 要先化简集合, 然后确定两集合中的元素的分布情况和公共元素, 再求它们的并集或交集, 对于具有特殊关系的两个集合, 可利用并集与交集的性质求出其并集、交集.

(3) 用韦恩图表示交集与并集

已知集合  $A$  与  $B$ , 用阴影部分表示  $A \cap B, A \cup B$ , 如下图



所示:



2. 补集与全集

(1) 全集

如果一个集合含有我们所研究问题中所涉及的所有元素,那么就称这个集合为全集,通常记作  $U$ .

有时虽然没有指明全集,但实际上全集是存在的,全集因所研究的问题而异.

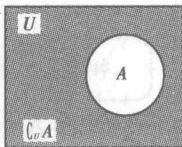
例如,在考虑正整数的因数分解时,我们把正整数集作为全集.在解不等式时,我们把实数集作为全集.多项式的因式分解,没有附加说明,通常把有理数集作为全集.在研究数集时,常常把实数集作为全集.在研究图形的集合时常常把所有空间图形的集合作为全集.

(2) 补集

对于一个集合  $A$ ,由全集  $U$  中不属于集合  $A$  的所有元素组成的集合,称为集合  $A$  相对于全集  $U$  的补集,简称为集合  $A$  的补集,记作  $\complement_U A$ ,即  $\complement_U A = \{x | x \in U, \text{且 } x \notin A\}$ .

其图形表示如图

补集既是集合之间的一种关系,又是集合的一种运算,利用定义可直接求出已知集合的补集,从全集  $U$  中去掉属于集合  $A$  的元素后,由所有剩下的元素组成的集合是  $U$  中子集  $A$  的补集.



典题·引导·感悟

题型一 交集、并集及补集的基本运算

例 (1) 已知集合  $M = \{x | y^2 = x + 1\}$ ,  $P = \{x | y^2 = -2(x - 3)\}$ , 那么  $M \cap P =$  ( )

- A.  $\{(x, y) | x = \frac{5}{3}, y = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}\}$
- B.  $\{x | -1 < x < 3\}$
- C.  $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$
- D.  $\{x | x \leq 3\}$

(2) 已知全集  $U = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $\complement_U A = \{0, 5, 9\}$ ,  $B = \{3, 5, 7\}$ , 则  $A \cap \complement_U B$  等于 ( )

- A.  $\{5\}$
- B.  $\{1\}$
- C.  $\emptyset$
- D.  $\{1, 5, 7\}$

引导: (1) 识别出  $M, P$  的元素, 是求  $M \cap P$  的关键.

(2) 根据补集的定义分别找出  $\complement_U A$  的用途与  $\complement_U B$  的元素, 从而求出  $A \cap \complement_U B$ .

解: (1)  $\because M = \{x | x = y^2 - 1 \geq -1\} = \{x | x \geq -1\}$ ,  $P = \{x | x = -\frac{1}{2}y^2 + 3 \leq 3\} = \{x | x \leq 3\}$ ,

$\therefore M \cap P = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$ .

$\therefore$  应选 C.

(2)  $\because U = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $\complement_U A = \{0, 5, 9\}$

$\therefore A = \{1, 3, 7\}$

又  $\because B = \{3, 5, 7\}$ ,  $\therefore \complement_U B = \{0, 1, 9\}$

$\therefore A \cap \complement_U B = \{1\}$ , 故选 B.

▶ 点拨 (1) 本题也可采用排除法, 抓住选项之间的差异, 采用取特殊值或举反例排除选项.

(2) 对于补集的运算, 关键要明确应取哪些元素, 舍哪些元素.

练一练 已知全集为  $R$ , 集合  $P = \{x | x = a^2 + 4a + 1, a \in R\}$ ,  $Q = \{y | y = -b^2 + 2b + 3, b \in R\}$ , 求  $P \cap Q$  和  $P \cup \complement_R Q$ .

题型二 交集、并集及补集的灵活运用

例 1 设集合  $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0, a \in R\}$ .

(1) 若  $A \cap B = B$ , 求  $a$  的值;

(2) 若  $A \cup B = B$ , 求  $a$  的值.

引导: 明确  $A \cap B = B$  和  $A \cup B = B$  的含义, 根据问题的需要, 将其转化为等价的关系式  $B \subseteq A$  和  $A \subseteq B$ , 是解决本题的关键. 同时, 在包含关系式  $B \subseteq A$  中, 不要漏掉  $B = \emptyset$  的情况.

解: 首先化简集合  $A$ , 得  $A = \{-4, 0\}$ .

(1) 由  $A \cap B = B$ , 则  $B \subseteq A$ , 可知集合  $B$  或为  $\emptyset$ , 或为  $\{0\}$ , 或为  $\{-4\}$ , 或为  $\{0, -4\}$ .

① 若  $B = \emptyset$  时,  $\Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) < 0$ , 解得  $a < -1$ .

② 若  $0 \in B$ , 代入得  $a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$  或  $a = -1$ .

当  $a = 1$  时,  $B = \{x | x^2 + 4x = 0\} = \{0, -4\} = A$ , 合题意;

当  $a = -1$  时,  $B = \{x | x^2 = 0\} = \{0\} \subseteq A$ , 也合题意.

③ 若  $-4 \in B$ , 代入得  $a^2 - 8a + 7 = 0 \Rightarrow a = 7$ , 或  $a = 1$ .

当  $a = 1$  时, 已讨论, 合题意;

当  $a = 7$  时,  $B = \{x | x^2 + 16x + 48 = 0\} = \{-12, -4\}$ , 不合

题意.

由①②③, 得  $a = 1$ , 或  $a \leq -1$ .

(2) 因为  $A \cup B = B$ , 所以  $A \subseteq B$ .

又  $A = \{-4, 0\}$ , 而  $B$  至多有两个根, 因此应有  $A = B$ , 由(1)知  $a = 1$ .

▶ 点拨 两个等价转化:  $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ ,  $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$  非常重要, 注意应用. 另外, 在解决有条件  $A \subseteq B$  的集合问题时, 不要忽视  $A = \emptyset$  的情况.

练一练 若集合  $P = \{1, 2, 3, m\}$ ,  $Q = \{m^2, 3\}$ , 且满足  $P \cap Q = Q$ , 求  $m$  的值.

例 2 已知  $U = R$ ,  $A = \{x | x^2 + px + 12 = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 5x + q = 0\}$ , 若  $(\complement_U A) \cap B = \{2\}$ ,  $(\complement_U B) \cap A = \{4\}$ , 求  $A \cup B$ .

引导: 由已知得集合  $A$  的元素是方程的解, 且  $4 \in A$  但  $4 \notin B$ . 集合  $B$  中的元素是方程的解, 且  $2 \in B$  但  $2 \notin A$ . 据此可求出  $p, q$ , 求出  $A, B$ , 从而解出  $A \cup B$ .

解:  $\because (\complement_U A) \cap B = \{2\}$ ,  $\therefore 2 \in B$  且  $2 \notin A$ .

$\therefore A \cap (\complement_U B) = \{4\}$ ,  $\therefore 4 \in A$  且  $4 \notin B$ .

分别代入得  $\begin{cases} 4^2+4p+12=0 \\ 2^2-5\times 2+q=0 \end{cases}$

$\therefore p=-7, q=6,$   
 $\therefore A=\{3,4\}, B=\{2,3\},$   
 $\therefore A\cup B=\{2,3,4\}.$

**点拨** 解答此类问题要首先根据交集、并集的含义及补集的概念推出集合中所包含的具体元素,然后再进行求解.

**练一练** 设全集  $U=\{2,3,a^2+2a-3\}, A=\{|2a-1|,2\},$

$\complement_U A=\{5\}$ ,求实数  $a$  的值.

**题型三 集合与生活**

**例** 有 54 名学生,其中会打篮球的有 36 人,其余的不会;会打排球的人数比会打篮球的人数多 4 人,其余的不会;另外,这两种球都不会打的人数比都会打的人数的  $\frac{1}{4}$  还少 1. 问既会打篮球又会打排球的有多少人?

**引导:** 将计算既会打篮球又会打排球的人数的实际问题转化为求交集中元素个数的问题,借助 Venn 图可很快得到解决.

**解:** 设 54 名同学组成的集合为  $U$ , 会打篮球的同学的集合为  $A$ , 会打排球的同学的集合为  $B$ , 这两种球都会打的同学的集合为  $X$ , 设  $X$  的元素个数为  $x$ , Venn 图如图 1-1-2, 则  $(36-x)+(40-x)+x+(\frac{1}{4}x-1)=54$ . 解得  $x=28$ . 所以既会打篮球又会打排球的人有 28 人.

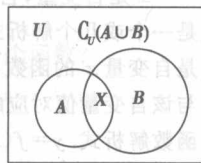


图 1-1-3-4

**点拨** 利用 Venn 图能清楚地表示各集合间的关系.

**思维·误区·警示**

- 对有关式子的意义的理解不明确,不能正确地把集合语言转化为数学语言.
- 有关计算时分类不全或重复,如题型三.

**迁移应用与探究创新**

**自练·自查·自评**

- 已知  $U$  是全集,集合  $M, N \subseteq U$  且  $N \subseteq M$ , 则 ( )
  - $\complement_U M \supseteq \complement_U N$
  - $M \subseteq \complement_U N$
  - $\complement_U M \subseteq \complement_U N$
  - $\complement_U M \subseteq N$
- 集合  $M=\{x|-2 \leq x \leq 2\}$ , 集合  $B=\{x|x \leq m\}$ , 若  $M \cap B \neq \emptyset$ , 则实数  $m$  的取值范围是 ( )

- $m < -2$
  - $m \geq -2$
  - $m > -2$
  - $-2 \leq m < 2$
- 设集合  $A=\{x|-1 \leq x \leq 2\}, B=\{x|0 \leq x \leq 4\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )
    - $\{x|0 \leq x \leq 2\}$
    - $\{x|1 \leq x \leq 2\}$
    - $\{x|0 \leq x \leq 4\}$
    - $\{x|1 \leq x \leq 4\}$

- 若  $\{3,4,m^2-3m-1\} \cap \{2m,-3\} = \{-3\}$ , 则  $m =$  \_\_\_\_\_.
- 定义集合  $A * B = \{x|x \in A, \text{且 } x \notin B\}$ , 若  $A = \{1,3,5,7\}, B = \{2,3,5\}$ , 则
  - 求  $A * B$  的子集;
  - 求  $A * (A * B)$
  - 集合的这种运算满足交换律吗?

- 某班参加数学课外活动小组的有 22 人, 参加物理课外活动小组的有 18 人, 参加化学课外活动小组的有 16 人, 至少参加一科课外活动小组的有 36 人, 则三科课外小组都参加的同学至多有 \_\_\_\_\_ 人.

**实践·探究·创新**

- 设集合  $A = \{(x,y) | 4x+y=6\}$ , 集合  $B = \{(x,y) | 3x+2y=7\}$ , 则满足  $C \subseteq (A \cap B)$  的集合  $C$  的个数是 ( )
  - 0
  - 1
  - 2
  - 3
- 如果  $U = \{x|x \text{ 是小于 9 的正整数}\}, A = \{1,2,3,4\}, B = \{3,4,5,6\}$ , 那么  $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) =$  ( )
  - $\{1,2\}$
  - $\{3,4\}$
  - $\{5,6\}$
  - $\{7,8\}$
- 已知全集  $U, M, N$  是  $U$  的非空子集, 且  $\complement_U M \supseteq N$ , 则必有 ( )
  - $M \subseteq \complement_U M$
  - $M \subseteq \complement_U N$
  - $\complement_U M = \complement_U N$
  - $M = N$
- 设  $A = \{x|2x^2 - px + q = 0\}, B = \{x|6x^2 + (p+2)x + 5 + q = 0\}$ , 若  $A \cap B = \{\frac{1}{2}\}$ , 则  $A \cup B =$  ( )
  - $\{\frac{1}{2}, -4, \frac{1}{3}\}$
  - $\{\frac{1}{2}, -4\}$
  - $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$
  - $\{\frac{1}{2}\}$
- 下列四个命题:
  - $a \in (A \cup B) \Rightarrow a \in A$
  - $a \in (A \cap B) \Rightarrow a \in (A \cup B)$
  - $A \cup B = A \Rightarrow A \cap B = B$
  - $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ , 正确的个数为 ( )
    - 1
    - 2
    - 3
    - 4
- 已知集合  $A = \{x|x < a\}, B = \{x|1 < x < 2\}$ , 且  $A \cup (\complement_R B) = R$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( )
  - $a \leq 2$
  - $a < 1$
  - $a \geq 2$
  - $a > 2$
- 若集合  $A, B$  满足  $A \cup B = A \cap B$ , 则  $A, B$  的关系是 \_\_\_\_\_.

8. 已知全集  $U$ , 集合  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $\complement_U A = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $\complement_U B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$ , 求集合  $B$ .

9. 设全集  $U = \mathbb{R}$ ,  $A = \{x | x > 1\}$ ,  $B = \{x | x + a < 0\}$ ,  $B \subseteq \complement_U A$ , 求实数  $a$  的取值范围.

10. 已知集合  $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$ ,  $C = \{x | x^2 + 2x - 8 = 0\}$ , 求  $a$  取何实数时,  $A \cap B \neq \emptyset$  与  $A \cap C = \emptyset$  同时成立?

自我评价

通过以上的学习,你肯定收获多多,或许也有一些疑惑,你能把它记在下面吗?

## 1.2 函数及其表示

### 1.2.1 函数的概念

#### 自主学习与知识构建

自主·预习·思考

1. 定义

设  $A, B$  是 \_\_\_\_\_ 的 \_\_\_\_\_, 如果按照 \_\_\_\_\_, 如果按照 \_\_\_\_\_, 使对于集合  $A$  中的 \_\_\_\_\_, 在集合  $B$  中都有 \_\_\_\_\_, 那么就称  $f: A \rightarrow B$  为从集合  $A$  到集合  $B$  的一个函数, 记作 \_\_\_\_\_, 其中 \_\_\_\_\_ 叫做函数的定义域; 与 \_\_\_\_\_ 叫做函数的值域.

2. 函数构成要素

\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_及 \_\_\_\_\_, 称为函数的三要素.

3. 在函数定义中, 符号  $y = f(x)$  仅表示 \_\_\_\_\_ 是 \_\_\_\_\_ 的函数, 其中  $f(x)$  表示与  $x$  对应函数值, 而不是  $f$  乘  $x$ .

4. 区间的相关概念

设  $a, b$  是两个实数, 且  $a < b$ , 我们规定:

(1) \_\_\_\_\_ 叫做闭区间,

表示为 \_\_\_\_\_;  
 (2) \_\_\_\_\_ 叫做开区间, 表示为 \_\_\_\_\_;  
 (3) \_\_\_\_\_ 叫做半开半闭区间, 分别表示为 \_\_\_\_\_.  
 另外, 满足  $x \geq a, x > a, x \leq a, x < a$  的实数  $x$  的集合分别记作 \_\_\_\_\_.

5. (1) 已知  $f(x) = x^2$ , 则  $f(x+1) =$  \_\_\_\_\_;

(2) 已知函数  $f(x+2) = x+1$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

### 精要导学与方法策略

#### 要点·剖析·突破

##### 1. 函数概念的理解

(1) 函数概念含有三要素, 即定义域  $A$ , 值域  $C$  和对应关系  $f$ , 其中核心是对应关系  $f$ , 对应关系是函数关系的本质特征.

(2) 只有当两个函数的定义域和对应关系都分别相同时, 这两个函数才是同一函数, 这就是说

① 定义域不同, 两个函数不同;

② 对应关系不同, 两个函数也不同;

③ 即使定义域和值域都分别相同的两个函数, 它们也不一定是同一函数, 因为函数的定义域和值域不能唯一地确定函数的对应关系. 例如, 在 ①  $y = x$  与  $y = \sqrt{x^2}$ , ②  $y = \sqrt{x^2}$  与  $y = (\sqrt{x})^2$ , ③  $y = x+1$  与  $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ , ④  $y = x^0$  与  $y = 1$ , ⑤  $y = |x|$  与  $y = \sqrt{x^2}$  这五组函数中, 只有 ⑤ 表示同一函数.

##### 2. 函数符号“ $y = f(x)$ ”的理解

(1) 符号  $y = f(x)$  即“ $y$  是  $x$  的函数”的数学表示, 应理解为:  $x$  是自变量, 它是法则所施加的对象;  $f$  是对应法则, 它可以是一个或几个解析式, 可以是图象、表格, 也可以是文字描述;  $y$  是自变量  $x$  的函数, 当  $x$  为允许的某一具体值时, 相应的  $y$  值为与该自变量值对应的函数值, 当  $f$  用解析式表示时, 则解析式为函数解析式.  $y = f(x)$  仅仅是函数符号, 不是表示“ $y$  等于  $f$  与  $x$  的乘积”,  $f(x)$  也不一定是解析式, 在研究函数时, 除用符号  $f(x)$  外, 还常用  $g(x), F(x), G(x)$  等符号来表示.

##### (2) $f(x)$ 与 $f(a)$ 的区别与联系

$f(a)$  表示当  $x = a$  时函数  $f(x)$  的值, 是一个常量, 而  $f(x)$  是自变量  $x$  的函数, 在一般情况下, 它是一个变量,  $f(a)$  是  $f(x)$  的一个特殊值. 如一次函数  $f(x) = 3x + 4$ , 当  $x = 8$  时,  $f(8) = 3 \times 8 + 4 = 28$  是一常数.

##### 3. 函数的定义域

(1) 函数的定义域是自变量  $x$  的取值范围, 它是构成函数的重要组成部分, 如果没有标明定义域, 则认为定义域是使函数解析式有意义的或使实际问题有意义的  $x$  的取值范围, 但要注意, 在实际问题中, 定义域要受到实际意义的制约.

##### (2) 求函数的定义域一般有四类问题:

① 若已知函数解析式比较复杂, 求定义域时通常根据各种条件列不等式组求解.

② 由  $y = f(x)$  的定义域, 求复合函数  $f[g(x)]$  的定义域问题, 实际上是已知中间变量  $u = g(x)$  的值域, 求自变量  $x$  的取值范围问题.

③ 对含字母参数的函数, 求其定义域时注意对字母参数的一切允许值分类讨论.

④ 若是实际问题除应考虑解析式本身有意义外, 还应使实