高等教育"十一五"规划教材

公共课教材系列

线性代数

XIANXINGDAISHU

主　编　袁德正

科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

公共课教材系列

线性代数

主　编　袁德正
副主编　周友明
编　委　刘仁南　牟善志

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换。每节附有习题，每章附有综合习题。

本书可以作为普通高等院校非数学专业线性代数教材，也可作为科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/袁德正主编. —北京：科学出版社，2008

（高等教育“十一五”规划教材・公共课教材系列）

ISBN 978-7-03-022815-4

Ⅰ.线…　Ⅱ.袁…　Ⅲ.线性代数–高等学校–教材　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第124832号

责任编辑：杨　阳　张　斌　/责任校对：柏连海

责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2008年8月第　一　版　开本：787×1092 1/16

2008年8月第一次印刷　印张：11 1/2

印数：1—4 000　字数：272 000

定价：18.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

销售部电话 010-62136230　编辑部电话 010-62135235（VP04）

前　言

线性代数是一门基础数学课程．它的基本概念、理论和方法在自然学科和社会学科中有着广泛的应用，是解决实际问题的有力数学工具．

本书是由教学经验丰富的教师在多年教学研究的基础上编写而成的．本书编写时，依据普通高等院校的教学基本要求，结合二本院校扩招后和新建本科院校的教学和考研的要求，本书在选材和叙述上尽量做到由浅入深、由具体到抽象、由特殊到一般，力求语言精炼，通俗易懂，淡化纯理论推导，增加实用性例题和习题，旨在使读者掌握线性代数基础知识，提高分析问题、解决问题的能力．编写时既考虑各章节的相互联系，也考虑各章节的独立性，便于教与学．讲授时可根据不同专业、不同学时，增减部分章节．每一节配备了习题，每一章末有综合习题，这些习题较每节习题有一定难度和技巧，学生可根据实际情况和要求选做，以加深、加宽知识面．书末附有习题答案和部分习题提示，供读者参考．本书可以作为普通高等院校非数学专业线性代数教材，也可供有关科技人员参考．

书中如有不妥之处，恳请读者批评、指正．

目 录

第1章 行 列 式

行列式是线性代数的重要组成部分．本章讨论线性方程组与行列式的关系，采用降阶方法引入行列式定义，讨论行列式的性质，给出如何计算行列式以及利用行列式求解方程组的方法．

1.1 线性方程组与行列式

多元一次联立线性方程组是许多实际问题中常遇到的一种数学模型，例如：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.2}$$

分别是二元和三元线性方程组．x_1，x_2，x_3 是未知量，a_{ij} 表示第 i 个方程第 j 个未知量的系数，b_i 是第 i 个方程的常数项．利用消元法求解方程组(1.1)，得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得到(1.1)的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

x_1, x_2 表达式中分母是相同的，引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

则称这个符号为**二阶行列式**，也称为(1.1)的**系数行列式**. 构成二阶行列式的四个数 a_{ij} (i，j=1，2)称为行列式的**元素**. 它们排成两行两列，a_{ij} 叫做第 i 行第 j 列元素，下标 i 表示元素所在的行，称为**行指标**，下标 j 表示元素所在的列，称为**列指标**. 二阶行列式也可以用画线的方法，即实线联结的两个元素乘积减去虚线联结的两个元素乘积加以记忆.

按照(1.3)式，如果再记二阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

则(1.1)的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

这里 D_j (j=1, 2)恰好是 D 中第 j 列元素被 b_1，b_2 代替后所得到的二阶行列式.

例 1.1 设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$，$\lambda$ 取何值时 $D\neq 0$，取何值时 D=0.

解

$$D=\lambda^2-3\lambda=\lambda(\lambda-3).$$

当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 3$ 时，$D\neq 0$；当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时，D=0.

以上是二阶行列式的定义，我们同样可以定义**三阶行列式**为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

这里各实线联结的三个元素乘积是上式代数和中在前面取正号的项，各虚线联结的三个元素乘积是上式代数和中在前面取负号的项，这种定义称为**沙路法定义**.

有了三阶行列式的定义，对于线性方程组(1.2)，当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，利用消元法求解，可得(1.2)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

这里 D_j $(j=1, 2, 3)$是 D 中第 j 列元素依次被 b_1, b_2, b_3 代替后得到的三阶行列式.

例 1.2　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_2-x_3=1, \\ 3x_2-3x_3=-2. \end{cases}$$

解　系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}=-3,$$

又

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix}=2,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}=-5,\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-7,$$

得方程组的解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{2}{3},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{5}{3},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{7}{3}.$$

例 1.3　a，b 满足什么条件时，行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

解　因为 $D=a^2+b^2$，所以只有当 $a=b=0$ 时，行列式 $D=0$.

习题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$.

2．λ 取何值时，行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ -\lambda^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$？

3．x 取何值时，行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$？

4．行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么？

1.2　n 阶行列式的概念及其性质

上节我们定义了二阶和三阶行列式，但是这种定义二阶、三阶行列式的方法，对于 $n>3$ 的 n 阶行列式已失去统一运算规则．我们采用递推的方法来定义 n 阶行列式．对三阶行列式，我们不难发现

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

记

$$A_{12} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

分别称 A_{11}, A_{12}, A_{13} 为 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的代数余子式，称

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

为三阶行列式按第一行展开．

同样，二阶行列式按第一行展开为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12},$$

其中

$$A_{11} = (-1)^{1+1}a_{22},\quad A_{12} = (-1)^{1+2}a_{21}$$

分别为 a_{11}, a_{12} 的代数余子式．

下面我们给出 n 阶行列式定义．

1.2.1　n 阶行列式的定义

定义 1.1　$n=1$ 时，一阶行列式定义为 $|a_{11}| = a_{11}$，$n \geqslant 2$ 时，设已定义了 $n-1$ 阶行列

式，则由 n^2 个数 $a_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 n 阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}\,, \tag{1.6}$$

其中 $$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}\,,$$

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3\,j-1} & a_{3\,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 M_{1j} 为 a_{1j} 的**余子式**，它是由 D 中去掉 a_{1j} 所在的第一行和第 j 列元素后，剩余的 $(n-1)^2$ 个元素按 D 中原有顺序组成的 $n-1$ 阶行列式； A_{1j} 称为 a_{1j} 的**代数余子式**； a_{ij} 叫做第 i 行第 j 列**元素**， i 叫做**行指标**， j 叫做**列指标**； $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为行列式的**主对角线元素**；称式(1.6)为行列式 D **按第一行展开**．同样我们可以定义 a_{ij} 的余子式为

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.7}$$

它是由 D 中去掉 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元素后，剩余 $(n-1)^2$ 个元素按 D 中原有顺序组成的 $n-1$ 阶行列式；定义元素 a_{ij} 的代数余子式为

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}\,,\qquad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{1.8}$$

由定义看到：n 阶行列式是由 n^2 个数组成，共有 n 行 n 列的一个算式，依次展开(1.6)中的行列式，不难看出，这个算式是由行列式的元素乘积构成的和式，称为 D 的展开式，展开式中每一项乘积是 D 中不同行不同列的 n 个元素的乘积．n 阶行列式展开式中有 $n!$ 项且带正号和负号项各占一半．

例 1.4 证明 n 阶下三角行列式(当 $i<j$ 时， $a_{ij}=0$，即主对角线以上元素全为零)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\overset{\text{记}}{=}\prod_{i=1}^{n}a_{ii}\,.$$

证明 对阶数 n 作数学归纳法，当 n=1 时，结论显然成立，假设结论对 $n-1$ 阶下三

角行列式成立，则由定义得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

右端行列式是 $n-1$ 阶下三角行列式，根据归纳法假设得

$$D=a_{11}(a_{22}\cdots a_{nn})=\prod_{i=1}^{n}a_{ii},$$

这里“$\prod$”是连乘号.

同理可证明上三角行列式(主对角线以下元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii},$$

式中“*”表示主对角线以上元素为任意数，“O”表示主对角线以下元素全为零. 由此可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii};\quad \begin{vmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{vmatrix}=1.$$

例 1.5 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} O & & & a_n \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & & * \end{vmatrix}$.

解 由行列式的定义得

$$D_n=(-1)^{1+n}a_n\begin{vmatrix} O & & a_{n-1} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_2 & & \\ a_1 & & * \end{vmatrix}=(-1)^{1+n}a_nD_{n-1}=(-1)^{n-1}a_nD_{n-1}$$

上式这种 D_n 与 D_{n-1} 的关系，通常称为**递推公式**. 依次递推，可得

$$\begin{aligned} D_n&=(-1)^{n-1}a_n(-1)^{n-2}a_{n-1}D_{n-2} \\ &=\cdots \\ &=(-1)^{n-1+n-2+\cdots+1}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}a_i. \end{aligned}$$

本题需要注意的一点是对一般的 n 而言，$D_n\neq -a_1a_2\cdots a_n$.

1.2.2 行列式的性质

首先，我们给出等价于行列式定义的一个引理.

引理 1.1 行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, \tag{1.9}$$

称为行列式 D 按第一列展开. 该引理说明行列式按第一行展开等于行列式按第一列展开.

证明 对 n 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，式(1.9)显然成立，假设对阶数小于 n 的行列式成立，考虑 n 阶情况，由行列式定义 1.1 知

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

$$=a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j},$$

其中

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3\,j-1} & a_{3\,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 $n-1$ 阶行列式，按归纳法，M_{1j} 可按第一列展开，行指标 i=2 处于 M_{1j} 的第一行的位置，所以

$$M_{1j}=\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i-1+1}(M_{1j})_{i1}=\sum_{i=2}^{n}a_{i1}(-1)^{i}(M_{1j})_{i1}, \quad (j\neq 1),$$

其中 $(M_{1j})_{i1}$ 是 M_{1j} 中 a_{i1} 的余子式(i=2，3，…，n)，它是 D 中先去掉第一行，第 j 列($j\neq 1$)，再去掉第 i 行，第一列所得行列式，它与先去掉第 i 行($i\neq 1$)，第一列，再去掉第一行，第 j 列所得行列式相同，即

$$(M_{1j})_{i1}=(M_{i1})_{1j},$$

所以

$$D=a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$= a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\left[\sum_{i=2}^{n} a_{i1}(-1)^{i}(M_{1j})_{i1}\right]$$

$$= a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\left[\sum_{i=2}^{n} a_{i1}(-1)^{i}(M_{i1})_{1j}\right]$$

$$= a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+j+i} a_{1j}a_{i1}(M_{i1})_{1j}$$

$$= a_{11}A_{11} + \sum_{i=2}^{n} a_{i1}(-1)^{1+i}\left[\sum_{j=2}^{n} a_{1j}(-1)^{j}(M_{i1})_{1j}\right]$$

$$= a_{11}A_{11} + \sum_{i=2}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1}$$

$$= a_{11}A_{11} + \sum_{i=2}^{n} a_{i1}A_{i1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}\,,$$

此式恰好是 D 按第一列展开式．在以上证明中，我们用了双重连加号求和的性质，即

$$\sum_{i}\sum_{j} a_{ij} = \sum_{j}\sum_{i} a_{ij} \text{ 以及 } \sum_{i} a_i \sum_{j} b_j = \sum_{i}\sum_{j} a_i b_j = \sum_{j}\sum_{i} a_i b_j\,.$$

行列式的行和列按照原顺序互换，所得行列式记作 D^{T}，即若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 D^{T} 为 D 的**转置行列式**．

性质 1.1 行列式转置后其值不变，即

$$D^{\mathrm{T}} = D\,. \tag{1.10}$$

证明 对行列式阶数 n 用数学归纳法．

当 n=1 时结论显然成立，假设对 n-1 阶行列式结论成立，对 n 阶行列式，由引理 1.1 将 D^{T} 按第一列展开

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} M_{1j}^{\mathrm{T}}\,,$$

而 M_{1j}^{T} 是 $n-1$ 阶行列式，由假设知

$$M_{1j}^{\mathrm{T}} = M_{1j},$$

所以

$$D^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} M_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} = D.$$

我们将行列式按第一行(列)的展开式推广到一般情形，则得到下列性质.

性质 1.2　行列式 D 等于它任意一行(列)的元素与它的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}. \tag{1.11}$$

性质 1.2 说明行列式按任一行(列)展开，其值不变.

这个性质也可用数学归纳法证明，方法类似于引理，这里从略.

性质 1.3　如果行列式某行(列)的所有元素都有公因子 k，则因子 k 可以提到行列式的外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.12}$$

证明　利用性质 1.2，左边按第 i 行展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in}$$

$$= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1.1　如果行列式某行(列)元素全为零，则行列式的值为零.

性质 1.4　如果行列式某行(列)的每个元素可以写成两个元素之和，则此行列式可以写成两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.13}$$

证明 利用性质 1.2，左边按第 i 行展开，可得右边结果.

性质 1.5 如果行列式中有两行(列)的元素对应相等，则行列式的值为零，即 $a_{ik}=a_{jk}, i\neq j, k=1,2,\cdots,n$ 时，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0. \tag{1.14}$$

证明 对阶数 n 用数学归纳法证明，当 n=2 时，结论显然成立，假设结论对 n-1 阶行列式成立，在 n 阶情况下，将 D 按第 $k(k\neq i,j)$ 行展开，则

$$D=\sum_{l=1}^{n} a_{kl}A_{kl}=\sum_{l=1}^{n} a_{kl}(-1)^{k+l}M_{kl},$$

由于 M_{kl} ($l=1,2,\cdots,n$) 是 $n-1$ 阶行列式，且其中都有两行元素对应相等，所以 $M_{kl}=0(l=1,2,\cdots,n)$，故 $D=0$.

由性质 1.3 和性质 1.5，立即可得如下推论：

推论 1.2 如果行列式中有两行(列)元素对应成比例，即 $a_{il}=ka_{jl}(l=1,2,\cdots,n)$，则行列式的值为零.

性质 1.6 如果将行列式中某行(列)的所有元素乘以数 k 后加到另一行(列)的对应位置元素上，行列式的值不变，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.15}$$

这里是将 D 的第 i 行乘以 k 加到第 j 行上. 利用性质 1.4 和性质 1.5 的推论，即可证明(1.15)式成立.

性质 1.7 互换行列式中两行(列)的位置，行列式的值反号，即