重庆市教育科学研究院教辅读物编写委员会/编著

经典助学

数学

高2（下）

同步辅导 范例剖析

要点精析 考点指津

重庆出版集团 重庆出版社

编写说明

为了推进基础教育课程改革，落实素质教育要求，帮助高中学生掌握学科基础知识和学习方法，提高学习能力，以适应全面实施素质教育、提高教育质量、积极应对高考的需要，我们特聘请了我市高中政治、语文、数学、英语、物理、化学、生物、历史、地理等学科的教学专家、研究员和特级教师分别担任主编，编写了这套高中《经典助学》丛书.

本丛书贯彻以学生全面发展为本的思想，坚持"利教、利学、利考、利评"的原则，与现行人教社高中各学科教科书配套，按章节分别就学科的知识结构、学习目标、重点难点以及学习方法进行了具体的指导，提供了多种题型的基本训练及解题思路，具有基础知识组块化，重点难点透释化，例题剖析策略化，思维训练层次化，实际应用建模化，自主学习方法化等特点，帮助学生掌握基础知识，培养学生的创新意识、创新能力和综合能力，引导学生将所学知识与生活经验、社会实际相联系.

本丛书的数学学科每一课时特设**课前自学**，以填空、表格或问题的形式帮助学生自主归纳各自然节的知识与方法；**要点精析**，引导学生掌握重点，释疑解难，学会学习；**范例剖析**，精选题目，重在解题策略指导，培养学生审题、析题能力，传授解题技巧和思维方法；**基础训练**，帮助学生对所学知识堂堂过手；**能力提升**，注重思维能力拓展训练，帮助学生就本节的"三维目标"的达成而自悟提升. 每一章的章末还设有**知识梳理**，引导学生高效盘点全章基础知识，突出内在联系，总结规律和方法；**考点指津**，对应高考的内容，反映本章知识高考考查重点，进行考试技能、技巧指导，帮助学生提高学习效率；**研究性课题推荐**，为学生课外研究提供帮助；**章末自测**，引导学生就本章学习的目标达成度进行科学测评.

本丛书的高二(下)数学分册的主编是杨祖旺，副主编是解传江、陶兴模、张世国. 参加编写的有孙虹、于小平、郑黎、胡智、陈昌杰. 由张晓斌统稿.

编写适应素质教育要求的学习指导用书，对我们来说还是一次新的探索，疏漏之处在所难免，恳请广大师生在使用中提出宝贵意见，以便不断修改，使之日臻完善.

重庆市教育科学研究院教辅读物编写委员会

目录

第九章　直线、平面、简单几何体

9.1　平　面(3课时)

课时一

课前自学

1. 平面的概念及画法：①几何里的平面是无限________；②通常用一个希腊字母______等来表示平面；③通常画______________来表示平面；表示点、线、面之间的关系的集合符号有____________.

2. 数字符号语言与数学文字语言的关系：

数学符号语言	数学文字语言
$A\in a$	
$A\notin a$	点 A 不在直线 a 上
$A\in\alpha$	点 A 在平面 α 内
$A\notin\alpha$	
$a\subset\alpha$	直线 a 在平面 α 内
$a\not\subset\alpha$	
$a\cap b=A$	
$\alpha\cap\beta=a$	平面 α、β 相交于直线 a

3. 公理1：如果一条直线上的______在一个平面内，那么这条直线上____________________.

4. 公理2：如果两个平面有______公共点，那么它们还有其他公共点，且所有这些公共点的集合是一条__________________.

5. 公理3：经过______________上的三点，__________一个平面.

要点精析

1. 平面的基本性质是这一章的基础，也是学习立体图形的基础.

2. 公理的作用：公理1的作用是判定直线是否在平面内；公理2的作用是判定两个平面是否相交，也常用来证明点共线、线共点这类问题；公理3是确定平面的依据.

3. 掌握三种数学语言(文字语言、图形语言、符号语言)的相互转化，这是学习立体几何的基本功.

范例剖析

例1　用符号表示下列语句，并画出图形：

(1)点 A 在平面 α 外，点 B 在平面 α 内，直线 l 经过点 A、B；

(2)直线 l 经过平面 α 外一点 P；

(3)直线 a 是平面 α 和 β 的交线，直线 b 经过 α 内不在直线 a 上的点 P，且经过 β 内不在直线 a 上的点 Q.

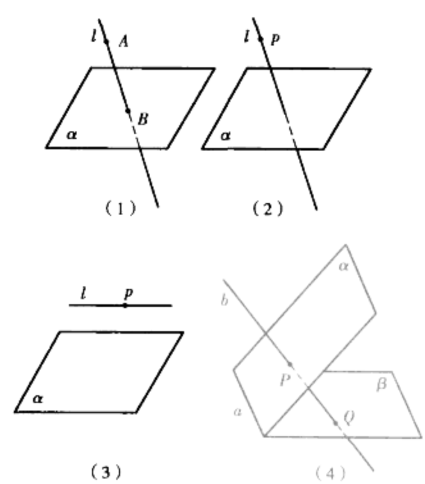


图9-1

分析：根据数学符号语言与数学文字语言的关系，注意被平面遮住的部分应画成虚线或者不画.

解：(1) $A\notin\alpha$，$B\in\alpha$，$A\in l$，$B\in l$，图象如图(1)所示.

(2) $P \notin \alpha, P \in l$，图象如图(2)和图(3)所示.

(3) $\alpha \cap \beta = a, P \notin a, Q \notin a, P \in \alpha, Q \in \beta, P \in b, Q \in b$，图象如图(4)所示.

拓展：(1)直线和平面相交的交点必须画在表示平面的图形的内部，直线被平面遮盖部分的线段应画成虚线或者不画；

(2)两平面相交必须画出交线，被平面遮盖部分的线段应画成虚线或不画.

例2 求证：如图9-2，$\triangle ABC$的三条边在同一个平面内.

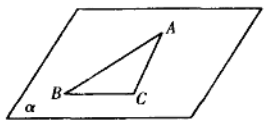


图9-2

分析：可依据公理1、公理3进行判断.

证明：∵ A、B、C三点是三角形的三个顶点，

∴ A、B、C三点不在同一条直线上.

由公理3，A、B、C可确定一个平面α.

∵ 点A在平面α内，点B也在平面α内，

由公理1，线段AB在平面α内，同理线段BC、线段CA也都在平面α内.

∴ $\triangle ABC$的三条边都在同一个平面内.

拓展：点、线段(或直线)都在一个平面内，称它们共面. 证明点、线段(或直线)共面的方法，常先确定一个平面，然后证明它们都在这个平面内.

例3 如图9-3，已知$\triangle ABC$的三个顶点都不在平面α内，它的三边AB、BC、AC延长后分别交平面α于点P、Q、R，求证点P、Q、R在同一条直线上.

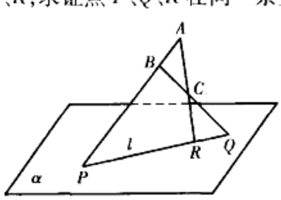


图9-3

分析：要证三点共线，可考虑证明这三点是两个相交平面的公共点.

证明：由于AB的延长线交平面α于点P，根据公理2，平面ABC与平面α必相交于一条直线，设直线为l.

∵ $P \in$直线AB，∴ $P \in$平面ABC. 又直线$AB \cap \alpha = P$，

∴ $P \in \alpha$. ∴ P是平面ABC与平面α的公共点.

∵ 平面$ABC \cap$平面$\alpha = l$，∴ $P \in l$. 同理，$Q \in l$，$R \in l$.

∴ 点P、Q、R在同一条直线l上.

拓展：(1)证明诸点共线可转化为平面相交的问题. 可先由点确定直线，再判断其他点也在该直线上.

(2)请思考：如果将三角形改成平面四边形，那么四边延长后与平面α的交点还共线吗？

基础训练

1. 下列命题：

(1)书桌面是平面；

(2)8个平面重叠起来要比6个平面重叠起来厚；

(3)平面的形状是平行四边形；

(4)任何一个平面图形都是一个平面. 其中正确命题的个数是(　　).

A. 0个　　B. 1个

C. 2个　　D. 3个

2. 下列说法中正确的是(　　).

A. 两个平面相交有两条交线

B. 两个平面可以有且只有一个公共点

C. 如果一个点在两个平面内，那么这个点在这两个平面的交线上

D. 两个平面一定有公共点

3. “直线l上有两点在平面α内”是“平面α经过直线l”的________条件；“两个平面有公共点”是“这两个平面相交”的________条件.

4. 已知$\triangle ABC$在平面α内，E、F分别是AB、AC的中点，则直线EF与平面α的位置关系是(　　).

A. $EF \in \alpha$　　B. $EF \notin \alpha$

C. $EF \subset \alpha$　　D. $EF \not\subset \alpha$

5. $a \subset \alpha, a \subset \beta, A \in \alpha, A \in \beta$，则$A$与$a$的关系是(　　).

A. $A \subset a$　　B. $A \not\subset a$

C. $A \in a$　　D. $A \notin a$

能力提升

1. 在同一平面内的两条直线可把平面分成________个部分.

2. 空间三个平面把空间分成(　　)个部分.

A. 4或7　　B. 6或4

C. 4，6或7　　D. 4，6，7或8

3. 如图9-4，$\alpha \cap \beta = l, a \subset \alpha, b \subset \beta, a \cap b = P$，判

断点 P 是否在直线 l 上,并说明理由.

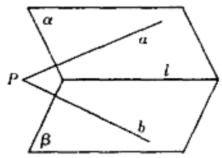


图 9-4

4. 如图 9-5,在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,E 是 BB_1 上的点,画出平面 AEC_1 和平面 $ABCD$ 的交线.

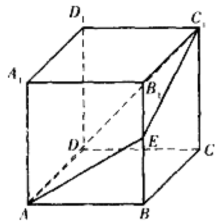


图 9-5

5. 如图 9-6,在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,对角线 A_1C 与平面 BDC_1 交于点 O,AC、BD 交于点 M,求证:点 C_1、O、M 三点共线.

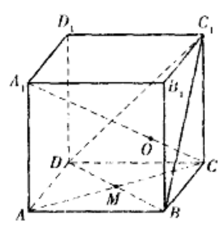


图 9-6

课时二

课前自学

1. 推论 1:经过直线与直线外一点,______________.

2. 推论 2:经过两条相交直线,______________.

3. 推论 3:经过两条平行直线,______________.

要点精析

1. 三个推论及公理 3 的作用:(1)它们是在空间中确定一个平面的依据;(2)它们是证明许多点共面问题、两平面重合问题的依据;(3)它们为立体几何问题转化为平面几何问题提供了理论依据和具体办法.

2. "有且只有"即是确定的意思,这里的"有"是说平面存在,"只有"是说平面唯一.

范例剖析

例 1 三条共点的直线可以确定平面的个数是______.

解:当三条直线不共面时,确定平面的个数为 3;当三条直线共面时,确定平面的个数是 1,所以确定平面的个数是 3 或 1.

例 2 求证:两两平行的三条直线如果都与另一条直线相交,那么这四条直线共面.

已知:$a // b // c$,$l \cap a = A$,$l \cap b = B$,$l \cap c = C$.

求证:直线 a、b、c 和 l 共面.

分析:先确定一个平面,再证有关点、线在此平面内.

证明:如图 9-7,$\because a // b$,由推论 3 可知,a 与 b 确定一个平面,设该平面为 α.

$\because l \cap a = A, l \cap b = B, \therefore A \in a, B \in b. \therefore A \in \alpha, B \in \alpha.$ 而 $A \in l, B \in l$,

$\therefore$ 由公理 1 可知 $l \subset \alpha$.

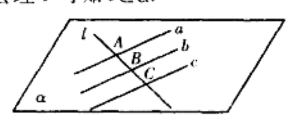


图 9-7

由推论 3 可知,直线 b 与 c 确定一个平面,设该平面为 β,同理可知 $l \subset \beta$.

$\because$ 平面 α 和平面 β 都包含直线 b 与 l,且 $b \cap l = B$,

$\therefore$ 根据推论 2,平面 α 与平面 β 重合.

故直线 a、b、c 及 l 共面.

拓展:证明一个图形是平面图形的常用方法:

(1)先确定一个平面,再证明有关点、线在此平面内;

(2)过有关的点、线分别作平面,再证明这些平面重合;

(3)反证法.

例 3 如图 9-8,在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,E 为 AB 的中点,F 为 AA_1 的中点,

求证:(1)E、C、D_1、F 四点共面;(2)CE、D_1F、

DA 三线共点.

分析:(1)证明点或线共面的问题时,可先由部分元素确定平面,再证明其他元素也在这个平面内;也可由全体元素确定若干个平面,再证这些平面重合.

(2)证明线共点的问题,可先证其中两条直线相交于一点,再证这点也在其他直线上.

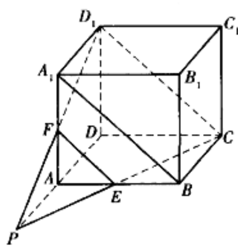


图 9-8

证明:(1)分别连结 EF、A_1B、D_1C,

$\because E$、F 分别是 AB、AA_1 的中点,

$\therefore EF /\!/ A_1B$,且 $EF=\frac{1}{2}A_1B$.

又$\because A_1D_1 \underline{\parallel} B_1C_1 \underline{\parallel} BC$,

$\therefore A_1B \underline{\parallel} CD_1$. 从而 $EF \underline{\parallel} CD_1$.

由推论 3,可知 EF 与 CD_1 确定一个平面.

$\therefore E$、F、D_1、C 四点共面.

(2)$\because EF \underline{\parallel} \frac{1}{2}CD_1$,$\therefore$ 直线 D_1F 和 CE 必相交.

设 $D_1F \cap CE=P$. $\because D_1F \subset$ 平面 AA_1D_1D,$P \in D_1F$,$\therefore P \in$ 平面 AA_1D_1D.

又 $CE \subset$ 平面 $ABCD$,$P \in CE$,$\therefore P \in$ 平面 $ABCD$. $\therefore P$ 是平面 $ABCD$ 与平面 AA_1D_1D 的公共点. 而平面 $ABCD \cap$ 平面 $AA_1D_1D=AD$,$\therefore P \in AD$(公理 2). $\therefore CE$、D_1F、DA 三线共点.

拓展:解决线共面、点共面、线共点等问题,关键是先要由元素确定平面,再证明点或线与面的关系.

基础训练

1. 一条直线与两条平行直线都相交,这三条直线一定为__________(填写"共面直线"或"不共面直线").

2. 四条直线相交于一点,用其中的两条确定平面,最多可以确定平面的个数是____个.

3. 一条直线和这条直线外不共线的三点,最多可确定(　　).

A. 三个平面　　B. 四个平面

C. 五个平面　　D. 六个平面

4. 下列四个条件中,能确定一个平面的条件有(　　).

①空间三个点;②一条直线和一个点;③和直线 a 都相交的两条直线;④两两相交的三条直线.

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

5. 两两相互平行的四条直线,最多可确定的平面个数是(　　).

A. 3 个　　B. 4 个

C. 5 个　　D. 6 个

能力提升

1. 下列结论中正确的是(　　).

A. 若经过三点有一个平面,则这三点不共线

B. 若经过三点只有一个平面,则这三点不共线

C. 若四条直线两两相交,则它们共面

D. 若四条直线中任意两条都不相交,则它们不共面

2. 四条线段顺次首尾连接,最多可确定平面的个数是(　　).

A. 4 个　　B. 3 个

C. 2 个　　D. 1 个

3. 已知正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,P、Q、R 分别是 AB、AD、B_1C_1 的中点,那么正方体的过 P、Q、R 的截面图形是(　　).

A. 三角形　　B. 四边形

C. 五边形　　D. 六边形

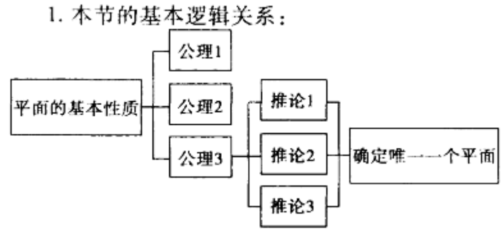
4. 求证:空间四边形各中点的连线共面.

5. 求证:每两条直线都相交而不经过同一点的四条直线在同一个平面内.

课时三

课前自学

1. 本节的基本逻辑关系:



2. 反证法：就是假设结论不成立，根据公理、定理或已知条件等推证出与＿＿＿＿＿＿，从而说明假设错误的一种证题方法.

要点精析.

本节应强调如下应用：

(1)证明点共线；(2)证明点共面；(3)证明线共点；(4)证明线共面.

范例剖析.

例1 如图9-9，已知直线 a 与 b 不共面，$c\cap a=M$，$b\cap c=N$，又 $a\cap\alpha=A$，$b\cap\alpha=B$，$c\cap\alpha=C$，求证 A、B、C 三点不共线.

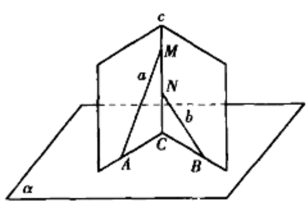


图 9-9

分析：这是三点共线的逆向思维问题，常采用反证法.

证明：用反证法证明. 假设 A、B、C 三点共线，设它们在直线 l 上.

$\because A,B,C\in\alpha$，$\therefore l\subset\alpha$.

$\because c\cap l=C$，$\therefore c$ 与 l 可确定一个平面 β.

$\because c\cap a=M$，$\therefore M\in\beta$. 又 $A\in\beta$，$\therefore a\subset\beta$.

同理 $b\subset\beta$，$\therefore a$、b 共面. 这与已知 a 与 b 不共面矛盾.

因此 A、B、C 三点不共线.

拓展：涉及“至多”“至少”，以及否定形式的结论的问题，一般用反证法证明.

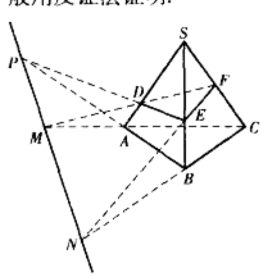


图 9-10

例2 如图9-10，已知 D、E、F 分别是射线 SA、SB、SC 上的点，且 FD 与 CA 交于点 M，FE 与 CB 交于点 N，DE 与 AB 交于点 P，求证：M、N、P 三点共线.

分析：欲证 M、N、P 三点共线，只需证 M、N、P 为某两个平面的公共点，即证 M、N、P 是平面 ABC 和平面 DEF 的公共点.

证明：$\because D$、E、F 三点不共线，$\therefore D$、E、F 三点可确定一个平面 DEF.

$\because EF\cap BC=N$，$\therefore N\in$ 平面 DEF，$N\in$ 平面 ABC.

同理，$M\in$ 平面 DEF，$M\in$ 平面 ABC；

$P\in$ 平面 DEF，$P\in$ 平面 ABC.

$\therefore M$、N、P 三点均在平面 ABC 与平面 DEF 的交线上. 故 M、N、P 三点共线.

拓展：证明点共线的问题，一般转化为证明这些点是某两个平面的公共点. 这样，根据公理2即可证明这些点都在这两个平面的公共直线上.

例3 如图9-11，已知直线 l 与四边形 $ABCD$ 的三边 AB、AD、DC 分别交于点 P、Q、R，求证 $ABCD$ 为平面四边形.

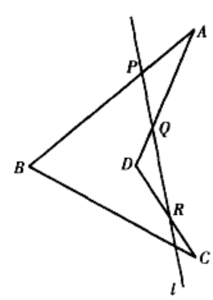


图 9-11

分析：欲证点共面，可先由三点确定一个平面，再证另一点也在该平面上.

证明：$\because P\in AB$，$Q\in AD$，

$\therefore P,Q\in$ 平面 ABD. $\therefore l\subset$ 平面 ABD.

又 $R\in l$，$\therefore R\in$ 平面 ABD.

又 $D\in$ 平面 ABD，$\therefore$ 直线 $DR\subset$ 平面 ABD.

又 $C\in$ 直线 DR，$\therefore C\in$ 平面 ABD.

故 $ABCD$ 为平面四边形.

拓展：证明一个图形是平面图形有三种常用方法：

(1)先确定一个平面，再证明有关点、线在此平面内；

(2)过有关的点、线分别作平面，再证明这些平面重合；

(3)反证法.

本题的证明方法为第一种方法,它是证明空间的点共面问题最常用的方法,具有普遍的指导意义.

基础训练

1. 如果空间的四点 A、B、C、D 共面而不共线,那么这四点中( ).

A. 必有三点共线　　B. 必有三点不共线

C. 至少有三点共线　D. 不可能有三点共线

2. 已知 $\alpha\cap\beta=l$,$A\in\alpha$,$B\in\beta$,且 $B\in l$,$C\in\alpha$,又 $AC\cap l=R$,过 A、B、C 三点确定的平面为 γ,则 $\beta\cap\gamma$ 是( ).

A. 直线 AB　　B. 直线 BC

C. 直线 BR　　D. 直线 CR

3. 长方体的十二条棱所能确定的平面个数为( ).

A. 6 个　　B. 12 个

C. 18 个　　D. 24 个

4. 在空间内,下列命题中真命题的个数为( ).

①两组对边分别相等的四边形是平行四边形;

②有三个角为直角的四边形是矩形;

③对角线互相平分的四边形是平行四边形;

④空间三直线可以确定平面的个数为 1 或 3.

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

5. 若空间的三个平面两两相交,则交线条数为______条.

能力提升

1. 若 A、B、C 表示不重合的三点,m、n 表示不重合的两条直线,α、β 表示不同的两个平面,则下列四个命题中,正确的是( ).

A. $m\not\subset\alpha$,$A\in m\Rightarrow A\notin\alpha$

B. $\alpha\cap\beta=m$,$m\cap n=A\Rightarrow n\subset\alpha$

C. $A\in\alpha$,$A\in\beta$,$B\in\alpha$,$B\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=AB$

D. $C\in\alpha$,$C\in\beta$,$C\in m\Rightarrow\alpha\cap\beta=m$

2. 如图 9-12,在长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,已知 O 是 B_1D_1 的中点,直线 A_1C 交平面 AB_1D_1 于点 M,则下列结论中错误的是( ).

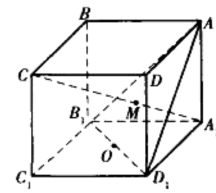


图 9-12

A. A、M、O 三点共线

B. A、M、O、A_1 四点共面

C. A、O、C、M 四点共面

D. B、B_1、O、M 四点共面

3. 如图 9-13,在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,E、F 分别为 CC_1 与 AA_1 的中点,请画出平面 BED_1F 与平面 $ABCD$ 的交线.

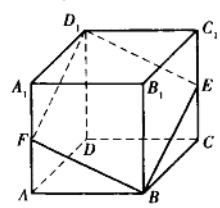


图 9-13

4. 求证:若 $A\in\alpha$,$B\notin\alpha$,则直线 $AB\not\subset\alpha$.

5. 已知:平面 α、β、γ 两两相交得直线 l_1、l_2、l_3,且 $l_1\cap l_2=P$. 求证:l_1、l_2、l_3 三线共点于 P.

9.2 空间直线（5课时）

课时一

课前自学

1. 空间两条直线的位置关系有三种：

(1) 相交直线——________公共点；

(2) 平行直线——________公共点；

(3) 异面直线——____任何一个平面内，____公共点.

2. 空间两条直线的位置关系的分类：

按照是否共面分为两类：(1) ________；(2) ________.

按照具有公共点个数分为两类：(1) ________；(2) ________.

3. 平行于同一条直线的两条直线________. 此结论又叫空间平行线的________，即公理4.

要点精析

1. 正确理解异面直线的概念是掌握空间两条直线位置关系的核心. 对定义可理解为"不可能找到一个平面，使它能同时包含这两条直线"，也可理解为"既不平行也不相交"，即不可能确定一个平面；不可错误理解为"分别在两个平面内的两条直线".

2. 公理4是论证平行问题的依据之一，利用它可将空间问题转化为同一平面内的问题或转化为证明共面问题.

范例剖析

例1 在长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 各条棱所在的直线中，

(1) 与 BD_1 成异面直线的有____条，它们是________；

(2) 与 BC_1 成异面直线的有____条，它们是________；

(3) 与 AD 成异面直线的有____条，它们是________.

分析：由异面直线的定义，抓住与指定线既不平行，又不相交的棱即可. (1)(2) 中只要找出与它们不相交的棱即可；(3) 只要找出与 AD 既不平行又不相交的棱即可.

解：(1) 6，A_1B_1、CD、B_1C_1、AD、AA_1、CC_1.

(2) 6，AA_1、DD_1、A_1B_1、CD、AD、A_1D_1.

(3) 4，A_1B_1、C_1D_1、BB_1、CC_1.

例2 如图9-14，长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 为面 A_1C_1 上一点，请在面 A_1C_1 内过点 M 作一直线 a，满足 $a/\!/BC$.

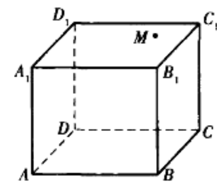


图 9-14

分析：由空间平行公理，在面 A_1C_1 内过点 M 作 B_1C_1 的平行线即可.

解：因为 $B_1C_1 /\!/ BC$，由公理4知，只需在面 A_1C_1 内过点 M 作与 B_1C_1 平行的直线 a，则 $a /\!/ B_1C_1 /\!/ BC$，a 即为所求.

拓展：(1) 平面几何中的平行公理在空间中仍然适用；

(2) 在空间中找(作)平行线可转化到在平面中进行.

例3 已知：棱长为 a 的正方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 中，M、N 分别为 CD、AD 的中点.

求证：四边形 $MNA'C'$ 是梯形.

分析：要证明梯形，只需找平行线. 由图9-15知，$A'N$ 与 $C'M$ 不可能平行，故需证 $MN/\!/A'C'$，由中点联想到中位线，此题可证.

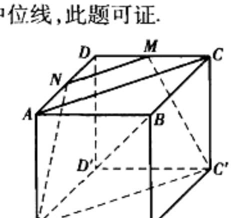


图 9-15

证明：如图9-15，连结 AC.

$\because M$、N 分别为 CD、AD 的中点，

$\therefore MN \underline{\parallel} \frac{1}{2}AC$.

由正方体的性质，可知 $AC \underline{\parallel} A'C'$.

$\therefore MN \underline{\parallel} \frac{1}{2}A'C'$. $\therefore$ 四边形 $MNA'C'$ 是梯形.

拓展：(1) 要证一个四边形是梯形，可以证明四边形有两边平行但不相等. 平行的证明要联想平面几何知识及公理 4.

(2) 解题时关键在于使空间问题平面化，并联系平面几何知识来解决空间问题.

基础训练

1. 没有公共点的两条直线的位置关系只能是(　　).

A. 平行　　B. 异面

C. 平行或异面　　D. 不平行，也不异面

2. 分别在两相交平面内的两条直线的位置关系是(　　).

A. 异面　　B. 平行　　C. 相交

D. 可能平行，可能相交，也可能异面

3. 两条异面直线指的是(　　).

A. 空间两条不相交的直线

B. 不同在任何一个平面内的两条直线

C. 分别位于两个平面内的两条直线

D. 某平面内的一条直线和这个平面外的一条直线

4. 下列四个命题中正确的是(　　).

①在空间中，若两条直线不相交，则它们一定平行；

②平行于同一条直线的两条直线平行；

③一条直线和两条平行直线中的一条相交，那么它也和另一条相交；

④空间四条直线 a、b、c、d，如果 $a \parallel b$，$c \parallel d$，且 $a \parallel d$，那么 $b \parallel c$.

A. ①②③　　B. ②④

C. ③④　　D. ②③

5. 已知直线 a、b、c，且 $a \parallel b$，$a \parallel c$，那么由直线 a、b、c 中的两条确定平面，可确定的平面个数是(　　).

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 1 或 3

能力提升

1. 若直线 a、b 与直线 l 相交成等角，则 a、b 的位置关系是(　　).

A. 异面　　B. 平行

C. 相交　　D. 以上都有可能

2. 如果两条异面直线称作“1 对”，那么在正方体的十二条棱中，共有异面直线(　　).

A. 12 对　　B. 24 对

C. 36 对　　D. 48 对

3. 对于任意的直线 l 与平面 α，在平面 α 内必有直线 m，使 m 与 l(　　).

A. 平行　　B. 相交

C. 垂直　　D. 互为异面直线

4. 如图 9-16，在长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为 B_1O 和 C_1O 的中点，则长方体的各条棱中与 EF 平行的有(　　).

A. 1 条

B. 2 条

C. 3 条

D. 4 条

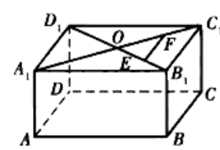


图 9-16

5. 已知空间四边形 $ABCD$ 中，$AC = BD$，M、N、P、Q 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点，试探究四边形 $MNPQ$ 是什么样的特殊四边形.

课时二

课前自学

1. 平行公理说明平行线具有________性. 它符合平面几何的结论，由此说明平面几何中的有关结论在空间几何中也同样适用，对吗?

2. 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角________.

3. 如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所形成的锐角(或直角)________.

要点精析

1. 平面几何中的结论在空间几何中不一定适用.

2. 等角定理的推论：如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等.

3. 若仅将等角定理中的条件"方向相同"改成"方向相反"，则这两个角也相等；若仅将它改成"一边方向相同，而另一边方向相反"，则这两个角互补.

范例剖析

例1 在平面几何中，经过直线外一点有且只有一条直线和这条直线平行，那么空间中这个结论是否成立？

分析：显然直接说明缺乏条件，故可用反证法.

解：假设过直线 a 外一点 P，有直线 b 和 c 与 a 平行，

于是 $a /\!/ b, a /\!/ c$.

进而由平行公理，可得 $b /\!/ c$. 这与 b、c 有公共点 P 矛盾.

故假设错误. 所以，该结论在空间中仍然成立.

拓展：若将本题中的"平行"改成"垂直"，则平面几何中的结论在空间几何中就不成立.

例2 如图 9-17，在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，BD 和 B_1D_1 是正方形 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 的对角线.

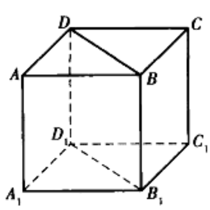


图 9-17

(1) $\angle DBC$ 的两边与________的两边分别平行且方向相同；

(2) $\angle DBC$ 的两边与________的两边分别平行且方向相反.

分析：(1) $\because B_1D_1 /\!/ BD, B_1C_1 /\!/ BC$，并且方向相同，

$\therefore \angle DBC$ 的两边与 $\angle D_1B_1C_1$ 的两边分别平行并且方向相同.

(2) $\because B_1D_1 /\!/ BD, D_1A_1 /\!/ BC$，并且方向相反，

$\therefore \angle DBC$ 的两边与 $\angle B_1D_1A_1$ 的两边分别平行并且方向相反.

解：(1) $\angle D_1B_1C_1$；(2) $\angle B_1D_1A_1$.

例3 如图 9-18，已知 E、E_1 分别是正方体 AC_1 的棱 AD、A_1D_1 的中点，求证 $\angle C_1E_1B_1 = \angle CEB$.

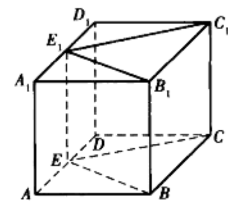


图 9-18

分析：用等角定理证明时，关键要抓住两点：一是两个角的两边分别平行；二是两个角的方向要相同.

解：连结 EE_1.

$\because E_1$、E 分别为 A_1D_1、AD 的中点，$\therefore A_1E_1 \underline{/\!/} AE$.

$\therefore A_1E_1EA$ 为平行四边形. $\therefore A_1A \underline{/\!/} E_1E$.

又 $\because A_1A \underline{/\!/} B_1B$，$\therefore E_1E \underline{/\!/} B_1B$.

$\therefore$ 四边形 E_1EBB_1 是平行四边形.

$\therefore E_1B_1 /\!/ EB$.

同理 $E_1C_1 /\!/ EC$.

又 $\angle C_1E_1B_1$ 与 $\angle CEB$ 方向相同，

$\therefore \angle C_1E_1B_1 = \angle CEB$.

拓展：证明角相等的问题，用等角定理及推论是较常用的方法；另外通过证明三角形相似或全等也可证明角相等.

基础训练

1. 已知空间两个角 α、β，且 α 与 β 的两边分别平行，若 $\alpha = 60°$，则 β 的度数为（　　）.

A. 60°　　B. 120°

C. 30°　　D. 60°或 120°

2. 如果两个三角形不同在一个平面内，并且它们的三边两两对应平行，那么这两个三角形（　　）.

A. 是全等三角形

B. 是相似三角形

C. 有一个角对应相等

D. 没有一个角对应相等

3. 下列命题中是假命题的是（　　）.

A. 如果两个角相等，那么其中一个角的两边平行于另一个角的两边

B. 如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等

C. 如果直线 a 平行于直线 b，直线 c 平行直线 b，那么 a 平行于 c

D. “一个角的两边和另一个角的两边分别平行”既不是这两个角相等的充分条件，也不是这两个角相等的必要条件

4. 在空间中，下列命题中正确的个数为(　　).

①两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

②四边相等的四边形是正方形；

③平行于同一条直线的两条直线平行；

④有两边及它们的夹角对应相等的两个三角形全等.

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

5. 在空间四边形 $ABCD$ 中，AB、BC、CD、DA 的中点分别是 E、F、G、H，若 $AC=4$ cm，$BD=6$ cm，则四边形 $EFGH$ 的面积的最大值是________.

能力提升

1. 在空间中，若一个角的两边和另一个角的两边分别垂直相交，则这两个角的关系是________.

2. 在空间四边形 $ABCD$ 中，已知 E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点，若 $AC=6$，$BD=2$，则 $EG^2+HF^2=$________.

3. 已知直线 a、b 是异面直线，A、B、C 是 a 上的三点，D、E、F 是 b 上的三点，A'、B'、C'、D'、E'分别为 AD、DB、BE、EC、CF 的中点，则 $\angle A'B'C'$________$\angle C'D'E'$.（填“>”“<”“=”）

4. 如图 9-19，设 D、E、F 分别是 OA、OB、OC 的三等分点，在△DEF 和△ABC 中，角一定相等的有(　　).

A. 1 对

B. 2 对

C. 3 对

D. 4 对

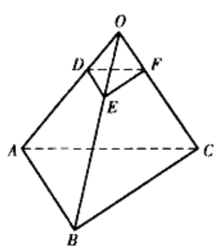


图 9-19

5. 如图 9-20，在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G 分别是棱 CC_1、BB_1 及 DD_1 的中点，试证明 $\angle BGC=\angle FD_1E$.

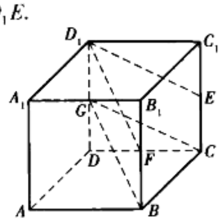


图 9-20

课时三

课前自学

1. 异面直线的定义：把________任何一个平面内的两条直线，叫做异面直线.

2. 异面直线的画法：平面衬托法.

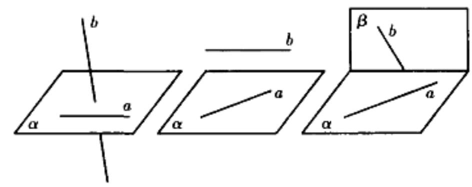


图 9-21

3. 异面直线的判定方法.

(1)定义法：(用反证法)

(2)定理法：连结________一点与____________的直线，和这个平面内________此点的直线是异面直线.

要点精析

1. 判定两直线为异面直线的常用方法是反证法. 反证法证题的步骤有三步：一是提出与结论相反的假设；二是由此假设推出与已知条件或某一公理、定理或某一已被证明是正确的命题相矛盾的结果；三是推翻假设，从而肯定与假设相反的结论，即命题的结论.

2. 定理法的内容见教材 P15 例 3，虽然教材中没有用黑体字标出，但它的重要性却显而易见，它所揭示的这一异面直线的判定方法又可简单概括成“两点一线一面”判定法.

范例剖析

例 1　已知 $\alpha\cap\beta=l$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，且 a、b 是异面直线，则直线 l(　　).

A. 至多与直线 a、b 中的一条相交

B. 至少与直线 a、b 中的一条相交

C. 与直线 a、b 都相交

D. 至少与直线 a、b 中的一条平行

分析：可以用两个平面的衬托来表示这两条异面直线，它通常有两种画法：①a、b 之一与 l 平行，另

一条与 l 相交;②a、b 与 l 分别交于两个不同的点.

解:答案选 B.

例 2 平面内两条直线有三种位置关系:相交、平行与重合. 已知 α、β 是两个相交平面,空间两条直线 a、b 在 α 内的射影分别是直线 a_1、b_1,直线 a、b 在 β 内的射影分别是直线 a_2、b_2,用 a_1 与 b_1,a_2 与 b_2 的位置关系,写出一个总能确定 a 与 b 是异面直线的充分条件:____________.

分析:根据异面直线的定义和性质与射影的定义相结合可得.

解:$a_1 /\!/ b_1$,并且 a_2 与 b_2 相交(或 $a_2 /\!/ b_2$,并且 a_1 与 b_1 相交).

例 3 如图 9-22,在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,M、N 分别是 A_1B_1、B_1C_1 的中点,问:

(1)AM 和 CN 是否是异面直线?说明理由.

(2)D_1B 和 CC_1 是否是异面直线?说明理由.

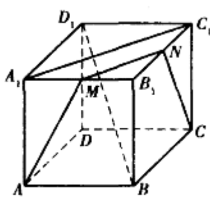


图 9-22

分析:(1)通过观察,AM 和 CN 显然不是异面直线,可以直接证明 AM 和 CN 共面. (2)直观感觉 D_1B 和 CC_1 成为异面直线的可能性大,可用定理判定或用反证法证明它们异面.

解:(1)(定义法)不是异面直线. 理由:$\because$ M、N 分别是 A_1B_1,B_1C_1 的中点,$\therefore$ $MN /\!/ A_1C_1$.

又$\because$ $A_1A \underline{/\!/} D_1D$,而 $D_1D \underline{/\!/} C_1C$,

$\therefore$ $A_1A \underline{/\!/} C_1C$,$\therefore$ A_1ACC_1 为平行四边形.

$\therefore$ $A_1C_1 /\!/ AC$. 从而得到 $MN /\!/ AC$.

$\therefore$ A、M、N、C 在同一个平面内. 故 AM 和 CN 不是异面直线.

(2)是异面直线.

证明 1:(反证法)假设 D_1B 与 CC_1 在同一个平面 CC_1D_1 内,

则 $B \in$ 平面 CC_1D_1,$C \in$ 平面 CC_1D_1.

$\therefore$ $BC \subset$ 平面 CC_1D_1. $\therefore$ $B \in$ 平面 CC_1D_1D. 这与 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 是正方体相矛盾. 故 D_1B 与 CC_1 为异面直线.

证明 2:(定理法)

$\because$ $CC_1 \subset$ 平面 C_1CBB_1,$B \in$ 平面 C_1CBB_1,$B \notin C_1C$,$D_1 \notin$ 平面 C_1CBB_1,

$\therefore$ D_1B 与 C_1C 为异面直线.

拓展:(1)解决这类开放性问题,常用方法有:直接法(即由条件入手经过推理、演算、变形等)、假设法、特例法等.

(2)证明空间两条直线的位置关系,反证法是常用的一种方法. 一般有两种假设:一是假设两直线共面;二是假设两直线平行或相交.

(3)用定理判定异面直线时,要积极寻找定理的条件.

基础训练

1. 若 a 和 b 是异面直线,b 和 c 是异面直线,则( ).

A. $a /\!/ b$　　B. a 和 c 是异面直线

C. a 和 c 相交　　D. 以上都有可能

2. 两条异面直线在同一平面内的射影必定( ).

A. 相交　　B. 平行

C. 平行或相交　　D. 以上都不对

3. 已知平面 α 外有两条直线 m 和 n,如果 m 和 n 在平面 α 内的射影分别是 m' 和 n',给出下列四个命题:

①$m' \perp n' \Rightarrow m \perp n$;②$m \perp n \Rightarrow m' \perp n'$;③$m'$ 与 n' 相交$\Rightarrow m$ 与 n 相交或重合;④m' 与 n' 平行$\Rightarrow m$ 与 n 平行或重合.

其中不正确的命题个数是( ).

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

4. 若 P 是两条异面直线 l、m 外的任意一点,则( ).

A. 过点 P 有且仅有一条直线与 l、m 都平行

B. 过点 P 有且仅有一条直线与 l、m 都垂直

C. 过点 P 有且仅有一条直线与 l、m 都相交

D. 过点 P 有且仅有一条直线与 l、m 都异面

5. $A \in \alpha$,$B \notin \alpha$,则直线 AB 和平面 α 内的直线的位置关系可能是________.

能力提升

1. 已知空间两条直线,则这两条直线异面是这两条直线没有公共点的( ).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分又不必要条件

2. 设 a、b 是一对异面直线，a 上有 8 个点，b 上有 5 个点，则这 13 个点可确定________个平面.

3. 已知 $\alpha\cap\beta=c$，异面直线 a、b 分别在平面 α 和平面 β 内，求证直线 a、b 中至少有一条与直线 c 相交.

4. 已知空间四边形 $ABCD$，求证它的对角线 AC 和 BD 是异面直线.

5. 如图 9-23，已知 $P\notin$ 平面 ABC，$PA\neq PB$、CM 是 AB 边上的中线，$PN\perp AB$，求证 CM 和 PN 是异面直线.

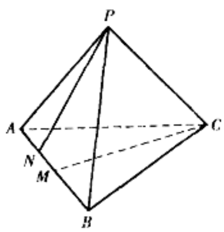


图 9-23

课时四

课前自学

1. 异面直线所成角的定义：直线 a、b 是异面直线，经过空间任意一点 O，作直线 a' 和 b'，并使 $a'/\!/a$，$b'/\!/b$. 我们把直线 a' 和 b' 所成的____________叫做异面直线 a 和 b 所成的角.

2. 异面直线所成角的取值范围：____________.

3. 如果两条异面直线所成的角是直角，我们就说两条异面直线__________. 异面直线 a 和 b 互相垂直，可记作________.

要点精析

1. 表示异面直线所成的角一般采用“平移线段法”将空间问题转化成平面问题. 常用手段有：平移直线、平移中位线、整体平移几何体（即补形平移）.

2. 异面直线所成角的表示关键在于 O 点的选取，为方便起见，可以把 O 选取在已知异面直线或某些特殊点上.

3. 异面直线所成角的取值范围与解析几何中两直线的夹角的取值范围是一致的，但要注意与直线的倾斜角的取值范围 $[0,\pi)$ 的区别.

范例剖析

例 1 如图 9-24，已知直线 a、b 相交于点 O，且 a、b 成 $60°$ 角，则过点 O 与 a、b 都成 $60°$ 角的直线有（　　）.

A. 1 条　　　　B. 2 条

C. 3 条　　　　D. 4 条

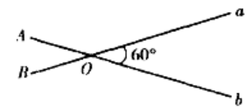


图 9-24

解析：以 $\angle AOB$ 及对顶角的平分线为射影的直线有 2 条，$\angle AOB$ 的补角的平分线 1 条，共 3 条. 故选 C.

例 2 如图 9-25，在棱长为 2 的正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，点 O 是底面 $ABCD$ 的中心，点 E、F 分别是 CC_1、AD 的中点，那么异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值等于（　　）.

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　　　B $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

C. $\dfrac{4}{5}$　　　　D. $\dfrac{2}{3}$

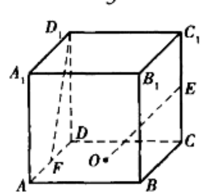


图 9-25

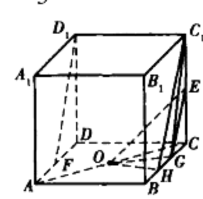


图 9-26

解析：如图 9-26，取 BC 的四等分点 H、G，连结 EG、OG、OH、C_1H，$\because EG/\!/C_1H$，又 $C_1H/\!/D_1F$，$\therefore EG/\!/D_1F$. $\therefore\angle OEG$ 为 OE 与 FD_1 所成的角. 易得 $EO=\dfrac{1}{2}AC_1=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$，$EG=\sqrt{EC^2+CG^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

$OG=\sqrt{OH^2+HG^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

$$\therefore\cos\angle OEG=\frac{EO^2+EG^2-OG^2}{2\cdot EO\cdot EG}=\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

故选 B.

例 3 如图 9-27，在正方体 AC_1 中，M、N 分别是 A_1B_1 和 BB_1 的中点，求：

（1）异面直线 AM 与 CN 所成的角的大小；

（2）异面直线 AM 与 BD 所成的角的大小；

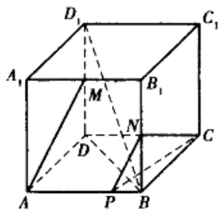


图 9-27

(3)异面直线 AM 和 BD_1 所成的角的大小.

分析:1."平移线段法"是寻找异面直线所成角的最基本的方法. 处理好平移两条直线中的一条(如(1)小题)或同时平移两条(如(2)小题)至恰当位置,是解决这类问题的关键. 用三角形的中位线来完成平移是最常用的手段.

2. 用整体平移几何体法(即补形平移法),构造可解的三角形(如(3)小题),也是求异面直线所成角的重要途径.

解:(1)如图 9-27,在面 AB_1 内作 $NP\,/\!/\,AM$,交 AB 于 P,则 $\angle PNC$(或其补角)为 AM 与 CN 所成的角.

设正方体的棱长为 a,则 $CN=\frac{\sqrt{5}}{2}a$, $NP=\frac{1}{2}AM=\frac{\sqrt{5}}{4}a$,

$CP=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}a$. $\therefore\ \cos\angle CNP=\frac{NP^2+CN^2-CP^2}{2\cdot NP\cdot CN}=\frac{2}{5}$. $\therefore\ \angle CNP=\arccos\frac{2}{5}$.

$\therefore$ AM 与 CN 所成角的大小为 $\arccos\frac{2}{5}$.

(2)如图 9-28,在面 A_1B 中,过 B_1 作 $B_1Q\,/\!/\,AM$,交 AB 于 Q,连结 B_1D_1、D_1Q,则 $\angle D_1B_1Q$(或其补角)为 AM 与 BD 所成的角.

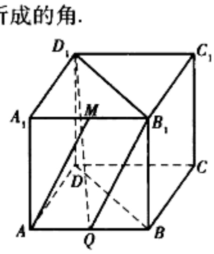


图 9-28

$\because\ B_1Q=\frac{\sqrt{5}}{2}a$, $B_1D_1=\sqrt{2}a$, $D_1Q=\frac{3}{2}a$,

$\therefore\ \cos\angle D_1B_1Q=\frac{B_1D_1^2+B_1Q^2-D_1Q^2}{2\cdot B_1D_1\cdot B_1Q}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

$\therefore\ \angle D_1B_1Q=\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

$\therefore$ AM 与 BD 所成角的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(3)如图 9-29,在正方形体 AC_1 右侧作一个辅助正方形 BG.

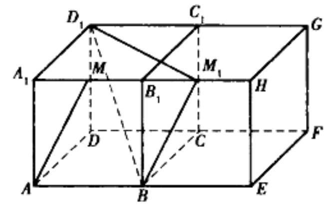


图 9-29

在平面 $BEHB_1$ 内,过点 B 作 $BM_1\,/\!/\,AM$,

则 $\angle D_1BM_1$(或其补角)为 AM 与 BD_1 所成的角.

$\because\ BD_1=\sqrt{3}a$, $BM_1=\frac{\sqrt{5}}{2}a$, $D_1M_1=\frac{\sqrt{13}}{2}a$,

$\therefore\ \cos\angle D_1BM_1=\frac{BD_1^2+BM_1^2-D_1M_1^2}{2\cdot BD_1\cdot BM_1}=\frac{\sqrt{15}}{15}$.

$\therefore\ \angle D_1BM_1=\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$.

$\therefore$ AM 与 BD_1 所成角的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$.

拓展:(1)求两条异面直线所成的角的大小的一般步骤是:①找出适合题意的角. 通常平移其中一条直线使其与另一条直线相交,找出两异面直线所成的角或其补角. ②求角(解三角形). 若求出的余弦值为负值,则异面直线所成的角必为其补角,因为异面直线所成角的取值范围是(0°,90°].

(2)当用平移法转化繁琐或无法平移时,可考虑两条异面直线是否垂直.

基础训练

1. 已知直线 a、b 是异面直线,过空间一点 O,分别作 $a'\,/\!/\,a$, $b'\,/\!/\,b$,那么 a' 和 b' 组成两组对顶角. 异面直线 a、b 所成的角指的是其中的(　　).

A. 锐角或直角　　B. 钝角或直角

C. 锐角或钝角　　D. 锐角

2. 已知正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$,则下列说法中正确的是(　　).

A. $A_1C_1\perp AD$

B. $D_1C_1\perp AB$

C. AC_1 与 DC 成45°角

D. A_1C_1 与 B_1C 成60°角

3. 过已知直线上一点可以作________条直线与已知直线垂直;过已知直线外一点可以作________条直线与已知直线垂直.

4. 已知 a、b 是一对异面直线,并且 a 平行于 $\triangle ABC$ 的边 AB 所在的直线,b 平行于边 AC 所在的直线,若 $\cos\angle BAC=\frac{-\sqrt{3}}{2}$,则 a、b 所成的角的大小为________.

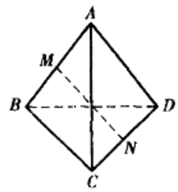


图 9-30

5. 如图 9-30,已知空间四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC=10$,$BD=6$,M、N 分别是 AB、CD 的中点,$MN=7$,求异面直线 AC 与 BD 所成的角的大小.

能力提升

1. 在空间四边形 $ABCD$ 中,如果 $AB=CD=2$,M、N 分别是 AD、BC 的中点,且 $MN=\sqrt{3}$,则直线 MN 与 AB、CD 所成的角(　　).

A. 都是60°　　B. 都是30°

C. 都是45°　　D. 都是90°

2. 在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的六个表面中,与 AC 异面且成60°角的直线共有(　　).

A. 4 条　　B. 6 条

C. 8 条　　D. 10 条

3. 在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,E、F、G、H、M、Q 分别是棱 AB、BC、CD、CC_1、C_1D_1、DD_1 的中点,则 CM 与 AA_1 所成的角的正切值等于________,EF 与 GH 所成的角为________,BH 与 B_1Q 所成的角为________,BD_1 与 AM 所成的角的余弦值等于________.

4. 如图 9-31,长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1=AB=2$,$AD=1$,点 E、F、G 分别是棱 DD_1、AB、CC_1 的中点,则异面直线 A_1E 与 GF 所成的角是(　　).

A. $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

5. 如图 9-32,S 是正三角形 ABC 所在平面外的一点,$SA=SB=SC$,且 $\angle ASB=\angle BSC=\angle CSA=90°$,$M$、$N$ 分别是 AB 和 SC 的中点,求异面直线 SM 与 BN 所成的角的余弦值.

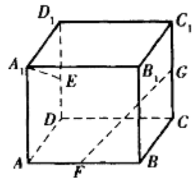


图 9-31

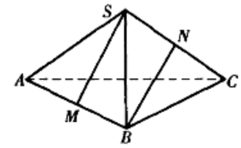


图 9-32

课时五

课前自学

1. ________________________叫做两条异面直线的公垂线.

2. ________________________________叫做两条异面直线的距离.

3. 空间两直线相互垂直分为两种情况:相交垂直和异面垂直. 异面垂直时,两条直线的公垂线有________条.

要点精析

1. 理解公垂线的定义要明确三点:一是垂直,二是相交,三是有且只有一条. 若不相交,便没有交点,也就没有公垂线段,距离也就无从定义了.

2. 新大纲在对于求解异面直线的距离方面,只要求能解答已给出公垂线或自己找出公垂线不困难的情况下的异面直线的距离问题.

范例剖析

例 1　如图 9-33,已知空间四边形 $ABCD$ 中,$AB=BD=AD=2$,$BC=CD=\frac{\sqrt{7}}{2}$,$AC=\frac{3}{2}$,延长 BC 到 E 使 $CE=BC$,F 是 BD 的中点,则异面直线 AF 与 DE 的距离是________.

解析:在 $\triangle ABD$ 中,$AB=BD=AD$,F 为 BD 的中点,则 $AF\perp BD$,即 $DF\perp AF$;在 ΔBDE 中,$\because BC=CE=CD$,$\therefore\angle BDE=90°$,即 $ED\perp DB$.

$\therefore DF$ 为异面直线 AF 和 DE 的公垂线.

又 $BD=2$,$\therefore DF=1$,即 AF 和 DE 的距离为 1. 所以答案为 1.

例 2　如图 9-34,已知空间四边形 $ABCD$ 中,$AB=BC=CD=AC=AD=BD=1$,$P\in AD$,$Q\in BC$,则