高等职业技术院校规划创新教材

高等数学

马来焕　主编

陕西师范大学出版社

高等职业技术院校规划创新教材

高 等 数 学

主　编　马来焕
副主编　陈珠社　白甲志　陈福平
　　　　葛世斌　骞龙江　千洪英　王　波(女)
编　者　(以姓名拼音音序为序)
　　　　白甲志　陈福平　崔宏志　陈珠社
　　　　千洪英　葛世斌　马来焕　骞龙江
　　　　任刚练　王　波(女)　王　波
　　　　王博荣　王　丽　袁卫东　张安平

陕西师范大学出版社

图书代号 JC8N0324

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/马来焕主编. - 西安:陕西师范大学出版社,2008.8
ISBN 978 - 7 - 5613 - 4354 - 8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 马… Ⅲ. 高等数学 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 109711 号

高等数学

马来焕 主编

责任编辑 高振霞
责任校对 刘锋利 黄 良
视觉设计 吉人设计
出版发行 陕西师范大学出版社
社 址 西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)
网 址 http://www.snupg.com
经 销 新华书店
印 刷 高陵县印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 23.25
字 数 464 千
版 次 2008 年 8 月第 1 版
印 次 2008 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5613 - 4354 - 8
定 价 35.00 元

高等职业技术院校规划创新教材

出版人　高经纬

总策划　雷永利

策　划　杨雪玲　侯晋公　钱　栩

出版说明

职业技术教育是现代化教育的重要组成部分。发展职业技术教育是加快提高劳动者素质，振兴我国经济的必由之路。为了促进高等职业教育健康发展，2006年教育部下发了《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》。《意见》指出，要以课程建设与改革为核心，加强教材建设，这是发展高等职业教育的一项基础性工作，对实现办学指导思想和培养合格人才具有举足轻重的作用。为此，我们组织有关高等职业技术院校的专家，对相关专业的教材进行了多次研讨，遴选了一些较为成熟的成果，组织编写了“高等职业技术院校规划创新教材”，以推动高等职业院校教育教学的改革与发展。

本系列教材坚持科学的发展观和以人为本的指导思想，突出德育为先，立德树人；坚持以就业为导向，面向市场、面向社会，培养学生的可持续发展能力，为就业和再就业服务；坚持“必需、够用”原则，注重讲清基本概念、基本原理和基本方法，尽可能避免大篇幅的理论分析和繁琐的公式推导，实训教材简明实用，内容科学合理，让学生易于理解、掌握和运用，使其技能操作符合职业技能鉴定规范；坚持教学的适用性，根据学生水平、培养目标、课时数确定教材内容、深浅程度和篇幅，方便教师教学，符合学生发展需要，为学生进一步提高打下基础。

本系列教材的编写和出版，得到许多高等职业技术院校领导的亲切关怀和大力支持。各学科参编者多为长期在职业技术院校从事教学、具有丰富教学实践经验的骨干教师。为了确保教材质量，我们还约请了其他院校部分学术造诣深厚的专家参与编写大纲的讨论和审稿。本系列教材在坚持科学性、突出实用性、增强灵活性等方面具有许多创新之处。我们向有关高等职业技术院校的领导和教师表示衷心的感谢。今后，我们还将不断出版反映现代科学技术水平，具有职业教育特色，品种多样，系列配套，层次衔接，有利于培养高素质劳动者和高、中、初级实用人才的职业教育教材。

本系列教材还可供其他高专、成人高校、普通中专、职业中专相关专业选用。

陕西师范大学出版社

2008年7月

前言

为了优化高等职业教育人才培养机制，优化专业和课程设置，优化教学内容和教学过程，改革学籍管理和教学管理，提高教学质量，陕西师范大学出版社组织在全国高等职业教育一线从事数学教学的专家教授对高等数学课程建设这个课题进行了深入研究，并立足于编写蕴含着基础课教材改革理念、洋溢着各个高等职业院校教材改革热情的富有创新性的高等数学教材。本教材的编写指导思想是：以“基础理论厚、专业口径宽、实践能力强、综合素质高”，且具有国际视野和创新精神作为培养目标，以职业岗位能力培养为主线构建新的课程体系和教学内容。

本教材突出了以下特点：

1. **注重了科学性和前瞻性。**既遵循学科自身的发展规律，又反映了高等数学最新的思想方法。

2. **注重了体系的完整性和逻辑的严密性。**既保证内容详尽丰富和逻辑的内在一致，又突出了学科的核心内容。

3. **注重了专业性和通用性。**既表现出了较高的专业水准和学术水平，又注意其广泛的适用性。

本教材是针对不同学科、不同专业和层次的教学要求编写的，在编写过程中，特别重视结合不同专业的实际需要，对高等数学原有教学内容重新进行了整合，对部分知识进行了必要的更新，以充分体现“联系实际、深化概念、注重应用、重视创新”的教改思想。

在本教材中，将高等数学课程的教学内容划分为三个模块：

1. **公共基础模块。**主要内容是一元函数微积分和多元函数微积分。

2. **专业基础模块。**主要内容有常微分方程、向量代数和空间解析几何、无穷级数、线性代数、概率与数理统计等。

3. **数学实验与应用。**主要内容有实验课题、实验内容与实验方法。这个模块每章均有，为本教材的特色。

在编写过程中，尽量使用简洁易懂的语言，做到深入浅出，使读者易

于理解，便于掌握。

本教材由宝鸡职业技术学院组织编写，马来焕担任主编，陈珠社、白甲志、陈福平、葛世斌、骞龙江、千洪英、王波（女）担任副主编。参加编写的有：宝鸡职业技术学院千洪英（第一章），商洛职业技术学院崔宏志（第二章），商洛职业技术学院张安平（第三章），西安职业技术学院王波（第四章），商洛职业技术学院骞龙江（第五章），安康职业技术学院陈福平（第六章），咸阳职业技术学院王波（第七章），咸阳职业技术学院任刚练（第八章），渭南职业技术学院王丽（第九章），咸阳职业技术学院葛世斌（第十章），宝鸡职业技术学院陈珠社（第十一章）。宝鸡职业技术学院白甲志编写了各章中的“数学实验与应用”部分。参加编辑统稿的有：宝鸡职业技术学院马来焕、陈珠社、白甲志、袁卫东、王博荣。

本教材可供师范类、机电类、医学类、经济管理类等专业教学使用，也可作为工程技术人员高等数学知识更新的自学用书。

编　者

2008 年 7 月

目录

CONTENTS

第一章 极限与连续

第二章 导数与微分

第三章 导数的应用

第四章 不定积分

第五章 定积分及其应用

第六章 多元函数微积分

第七章 微分方程

附　录

第一章　极限与连续

§1.1　预备知识

§1.1.1　常见的数集

一、自然数集

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

二、整数集

$$\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n,\cdots\}$$

其中，偶数集为：$\{x \mid x=2n, x\in\mathbf{Z}\}$，奇数集为：$\{x \mid x=2n+1, n\in\mathbf{Z}\}$.

三、有理数集

$$\mathbf{Q}=\{\text{有理数}\}$$

其中，$\mathbf{Q}_+=\{\text{正有理数}\}$，$\mathbf{Q}_-=\{\text{负有理数}\}$.

四、无理数集

$$\mathbf{W}=\{\text{无理数}\}$$

五、实数集

$$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$$

其中，$\mathbf{R}_+=(0,+\infty)$，$\mathbf{R}_-=(-\infty,0)$.

六、二维平面

$$R^2=(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)=\{(x,y) \mid x,y\in(-\infty,+\infty)\}$$

七、三维空间

$$\begin{aligned}R^3&=(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\\&=\{(x,y,z) \mid x,y,z\in(-\infty,+\infty)\}\end{aligned}$$

推而广之，我们将 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体称为 n 维空间，记为 R^n，即：

$$R^n=R\times R\times\cdots\times R=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_k\in\mathbf{R}, k=1,2,\cdots,n\}$$

R^n 中的元素为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，记为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

n 维空间中的每一个元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为空间中的一个点或一个 n 维向量，数 x_k 称为该点的第 k 个坐标. 特别地，当所有 $x_k=0\,(k=1,2,\cdots,n)$ 时，称其为 R^n 中的零元，记为 $\mathbf{0}$ 或 0.

n 维空间 R^n 中两点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离定义为

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

特别地,点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和零元之间的距离为

$$\rho=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

§1.1.2 实数的绝对值

一、绝对值的定义

$$|a|=\begin{cases}a, a>0\\0, a=0\\-a, a<0\end{cases}$$

二、绝对值的几何意义

$|a|$ 表示数轴上点 a 到原点的距离. 如图 1－1 所示.

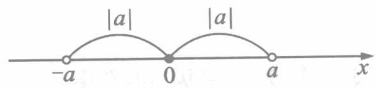

图 1－1

三、绝对值的性质

1. $|a|\geqslant 0$
2. $|a|=\sqrt{a^2}$
3. $|a|=|-a|$
4. $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$
5. $|a+b|\leqslant|a|+|b|$
6. $|a|-|b|\leqslant|a-b|$
7. $|ab|=|a||b|$
8. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(|b|\neq 0)$

§1.1.3 区间

区间是指介于某两个实数之间的全体实数,这两个实数叫做区间的端点.

一、有限区间

设 a,b 为两个实数,且 $a<b$. 我们规定:

1. 数集 $\{x|a<x<b\}$ 记作 (a,b),称为开区间,如图 1－2 所示;

图 1－2

图 1－3

2. 数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 记作 $[a,b]$,称为闭区间,如图 1－3 所示;
3. 数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 记作 $[a,b)$,称为左闭右开区间,如图 1－4 所示;

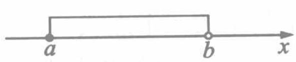

图 1－4

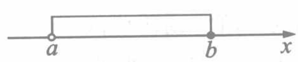

图 1－5

4. 数集 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 记作 $(a,b]$,称为左开右闭区间,如图 1－5 所示.

二、无限区间

设 a,b 为两个实数，

1. 实数集 $\{x|x\geqslant a\}$，记作 $[a,+\infty)$，如图 1-6 所示；

图 1-6

图 1-7

2. 实数集 $\{x|x>a\}$，记作 $(a,+\infty)$，如图 1-7 所示；
3. 实数集 $\{x|x\leqslant b\}$，记作 $(-\infty,b]$，如图 1-8 所示；

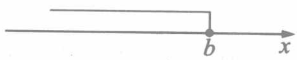

图 1-8

图 1-9

4. 实数集 $\{x|x<b\}$，记作 $(-\infty,b)$，如图 1-9 所示；
5. 实数集 R，记作 $(-\infty,+\infty)$.

§1.1.4　邻域

邻域是高等数学中一个常用的概念，下面分类进行讨论.

一、直线上的点的邻域

设 $x_0\in\mathbf{R}$，$\mathbf{R}$ 上所有与 x_0 的距离小于 $\delta(\delta>0)$ 的点集，称为 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$. 由定义可见，x_0 的 δ 邻域就是以 x_0 为中心，以 δ 为半径的开区间，即

$$U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

如图 1-10 所示.

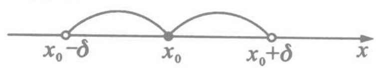

图 1-10

特别地，不包含中心点的邻域称为去心邻域，记作 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$. 邻域的左半部分和右半部分分别称为左邻域和右邻域，记作

左邻域：$U^-(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)$

右邻域：$U^+(x_0,\delta)=(x_0,x_0+\delta)$

二、平面上的点的邻域

图 1-11

设 $P(x_0,y_0)\in R^2$，R^2 上所有与 $P(x_0,y_0)$ 的距离小于 $\delta(\delta>0)$ 的点集，称为 $P(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域，记作 $U(P,\delta)$. $U(P,\delta)$ 的几何意义是：以 $P(x_0,y_0)$ 为中心，以 δ 为半径的开圆域. 如图 1-11 所示.

三、平面上的直线的邻域

设 $y=A\in R^2$，R^2 上所有与 $y=A$ 的距离小于 $\varepsilon>0$ 的点集，称为 $y=A$ 的 ε 邻域，记作 $U(A,\varepsilon)$. $U(A,\varepsilon)$ 的几何意义是：以 $y=A$ 为中心，以 ε 为半径的带形区域. 如图 1-12 所示.

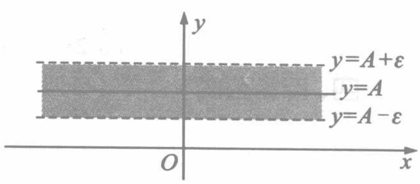

图 1-12

四、空间的邻域

三维空间的点邻域是以 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为中心，以 δ 为半径的开球，即

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y,z)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$$

§1.1.5 充分必要条件

数学命题中，通常用 A 表示条件，用 B 表示结论.

一、充分条件和必要条件

在命题"若 A 则 B"中，称 A 为 B 的充分条件，记作 $A\Rightarrow B$. 在命题"若 B 则 A"中，称 B 为 A 的必要条件，记作 $B\Rightarrow A$.

二、充要条件

在命题"若 A 则 B"与命题"若 B 则 A"同时成立时，则称 A 与 B 互为充要条件，记作 $A\Leftrightarrow B$.

§1.1.6 常用的三角公式

在高等数学的学习过程中，常用的三角公式有：

一、同角三角函数间的关系

倒数关系

$$\sin\alpha\csc\alpha=1$$
$$\cos\alpha\sec\alpha=1$$
$$\tan\alpha\cot\alpha=1$$

商数关系

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\qquad\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

平方关系

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$$
$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

二、两角和差公式

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$$
$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$$
$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}$$

三、倍角公式

$$\sin2x=2\sin x\cos x$$
$$\cos2x=\cos^2x-\sin^2x=1-2\sin^2x=2\cos^2x-1$$

四、降幂公式

$$\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}$$

$$\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}$$

五、积化和差公式

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$$

$$\cos x\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$

$$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$$

§1.1.7 常用数学符号

$\mathbf{N}$ ———— 自然数集合；

$\mathbf{N}_+$ ———— 正整数集合；

$\mathbf{Z}$ ———— 整数集合；

$\mathbf{Q}$ ———— 有理数集合；

$\in$ ———— 属于；

$\cup$ ———— (集合或事件的)并；

$\cap$ ———— (集合或事件的)交；

$\forall$ ———— 一切(任给)；

$\exists$ ———— 存在(找到)；

def ———— 定义为；

$\wedge$ ———— 且；

D ———— 定义域；

$\mathbf{R}$ ———— 一切实数的集合，直线；

$\mathbf{R}^2$ ———— 平面上一切点的集合；

$\varnothing$ ———— 空集(或不可能事件)；

Ω ———— 全集(样本空间或必然事件)；

$\supset$ ———— 包含；

$\Rightarrow$ ———— 推出(隐含)；

$\Leftrightarrow$ ———— 当且仅当(等价)；

$\leftrightarrow$ ———— 对应；

$\sum$ ———— 求和；

$\prod$ ———— 求积；

$\vee$ ———— 或；

M ———— 值域；

Det(A) ———— 矩阵 A 对应的行列式.

§1.2 函数

§1.2.1 函数的概念

一、常量与变量

在研究实际问题时，我们经常会遇到各种不同的量，如时间、距离、身高、体重、温度等.我们把在某一过程中始终保持同一数值的量，称为常量，可以取不同值的量，称为变量.

一个量是常量还是变量要根据具体过程和具体条件来确定.同一个量在某一过程或条件下可能是常量，而在另一过程或条件下就可能是变量.例如：人的身高，在研究青少年的生长过程中是变量，但在研究成年人的健康问题时就是常量.

常量也可看成是一种特殊的变量，即在某一变化过程中取相同数值的变量.

二、函数的概念

我们知道,圆的周长 C 随圆的半径 r 的变化而变化,两者之间的关系式为 $C=2\pi r$.

当变量 r 在区间$[0,+\infty)$内任取一值时,变量 C 按照的对应法则 $C=2\pi r$,总有唯一确定的数值与它对应.

抛开变量的实际含义,我们可以抽象出变量之间的依赖关系这一实质,得到函数的概念.

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量,D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的某个子集. 如果对任意的 $x\in D$,按照某种对应法则 f,变量 y 总有确定的值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,记作 $y=f(x)$. 称 D 为该函数的定义域,x 为自变量,y 为因变量.

当自变量 x 取数值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的因变量 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值,记为 $f(x_0)$,或 $y|_{x=x_0}$,当 x 取遍 D 的各个数值时,对应的变量 y 取值的全体组成的数集称作这个函数的值域.

如果自变量在定义域内任取一个值时,对应的函数值只有一个,这种函数称为单值函数,否则,称为多值函数.

例如,$y=2x-3$ 是单值函数,由方程 $2x^2+y^2=5$ 确定的函数 $y=\pm\sqrt{5-2x^2}$就是多值函数. 以后没有特别说明时,本书所讨论的函数都是指单值函数.

例 1　在自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s,如果取开始下落的时刻 $t=0$,则由物理学可知 s 与 t 之间的关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 g 为重力加速度. 若物体到达地面的时刻 $t=T$,则当时间 t 在$[0,T]$上任取一个数值时,s 就可以由上式确定出一个相对应的值,即 $s=f(t)=\frac{1}{2}gt^2$. 它是定义域为 $D=[0,T]$的一个函数,其值域为 $M=[0,\frac{1}{2}gT^2]$.

例 2　求函数 $y=\sqrt{x-1}+\frac{1}{x-3}+\ln(8-x)$的定义域.

解　要使函数有意义,x 必须满足

$$\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x-3\neq 0,\\ 8-x>0\end{cases}\text{即}\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x\neq 3,\\ x<8\end{cases}$$

取它们的公共部分,得到函数的定义域为:$[1,3)\cup(3,8)$.

例 3　已知 $f(x-1)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$,求 $f(x)$的表达式.

解　设 $x-1=t$,则 $x=t+1$,即

$$f(x-1)=f(t)=\frac{(t+1)+2}{[(t+1)+1]^2}=\frac{t+3}{(t+2)^2}$$