2009卷（第1辑）
No. 1 2009

Chinese Research on Elementary Mathematics

# 中国初等数学研究

# Chinese Research on Elementary Mathematics

主编 杨学枝



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

2009卷(第1辑)
No. 1 2009

Chinese Research on Elementary Mathematics

# 中国初等数学研究

# Chinese Research on Elementary Mathematics

主编 杨学枝

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

**图书在版编目(CIP)数据**

中国初等数学研究/杨学枝主编. 一哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.3

ISBN 978-7-5603-2006-9

Ⅰ.初… Ⅱ.杨… Ⅲ.初等数学-文集 Ⅳ.012-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 033095 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 张 瑞
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本 880mm×1230mm 1/16 印张 8 字数 259 千字
版　　次 2009 年 4 月第 1 版 2009 年 4 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-2006-9
印　　数 1~3 000 册
定　　价 20.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

中国初等数学研究

陈省身

1995年5月20日

已故国际著名数学大师陈省身先生生前为本文集所题写的书名

# 《中国初等数学研究》编辑委员会

**顾　问**:周春荔　杨世明

**主　任**:沈文选

**副主任**:杨学枝　吴　康　刘培杰

**主　编**:杨学枝

**副主编**:刘培杰　吴　康

**编辑部主任**:刘培杰(兼)

**编辑部副主任**:江嘉秋

**编委(按姓氏笔画为序)**:

王中峰　王光明　田彦武　叶中豪　江嘉秋
孙文彩　刘培杰　沈文选　吴　康　汪江松
杨学枝　杨志明　张小明　曹一鸣　黄邦德
曾建国　萧振纲


试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

# 献词

初等数学研究，在中国既有光辉的历史记录，又有庞大的现代学者队伍，所以，此中国初等数学研究专业系列文集终于出版了，这是很值得庆幸的事！

众所周知，公元1000年至14世纪初，曾是中国数学史上的“宋元全盛时代”．那时中国的数学曾领先于世界．例如，秦九韶的“大衍求一术”（不定方程的中国独特解法）及高次代数方程数值解法，郭守敬创立的三次内插法，还有朱世杰由“天元术”发展成的“四元术”（相当于代数学或方程论）等成就，都是中世纪欧洲学术界所望尘莫及的．

20世纪40年代以后，世界数学史进入现代时期，从那时起，经历了长期衰落的中国的数学开始融入世界潮流．特别近30年来，中国数学界（包括数学教育界）已出现了一系列可喜景象：除了已培育成长出众多能在国际数学界崭露头角的数学工作者之外，还有数以万计的中学与高校数学教师，从事着数学教育与数学创作活动，他们的论著及作品，每年都在海内外各种文集上传播问世．

特别值得提到的是，近现代的中国初等数学研究工作者，已做出了许多令人喜悦的成果．这些成果分属于“不等式研究”、“不定方程研究”、“初等数论问题研究”、“组合计数问题研究”、“圆锥曲线特性研究”以及联系数学奥林匹克“竞赛题研究”等方面．根据知情者的综合报导，可以如实地评论说：“中国当代学者在初等数学领域的工作成就，是居于世界前列的”．国际数学教育界都已看到，中国青年学子在国际数学奥林匹克竞赛中获得的金银牌是最多的．其实这与如上所说的评论事实是有内在联系的．很难想像，如果没有一流的初等数学研究工作者队伍做后盾，那么怎能产生一流的数学奥林匹克参赛队伍呢？

初等数学研究直接关联到基础数学教材建设及数学方法论等方面的问题研究，所以它又是推进数学教改的巨大动力之一．中国现已逐步成为“数学大国”并以发展成“数学强国”为目标，因此现今创办全国性初等数学专业系列文集，既已具备了充分条件，同时也反映了时代发展的客观要求，所以国际数学大师陈省身先生生前特为本文集题写了“中国初等数学研究”，以示支持与鼓励．

这里让我们来谈谈关于办好一种初等数学研究文集的希望和要求．首先，为了保证和不断提高文集的质量与水平，必须依靠编者与作者的相互支持与合作．同时还期望能有稿件审阅者与读者的支持和合作．

希望文集的编者与作者都能意识到本文集还肩负着培育人才的功能与职责．所以对待能促进数学教改的学术作品，理应特别青睐．例如，有关专题研究的一些综述介绍与评论等，对指导年青人走上科研之路就会有较多启示和帮助．

由于数学科学是一个有机统一体,许多分支学科都有共同的客观本原,这就决定了“初等数学”与“高等数学”必然是互通的.例如,高等数学中的许多基本概念与思想方法,都可以在初等数学中找到它们的具体背景和原型.另一方面,又可以看到初等数学中的一些命题、公式和定理如何在高等数学中取得了应用上更为宽广的抽象形式.诸如此类,都说明了初、高等数学在内容与方法上的统一性.因此,我们很希望将来在本书上还会不断出现“用高等观点看初等数学”以及“用初等观点看高等数学”的有关作品.事实上,德国著名数学家克莱因(F. Klein)的名著已给人们提供了宝贵启示.

据所知,已故的杰出数学家华罗庚与匈牙利著名数学家埃尔特希(P. Erdös)等都特别重视用初等方法求解高等数学问题,以及用初等方法证明高等数学定理.事实上,数学中的初等方法和初等证明最能揭示问题与定理的本质,还能显示“数学美”的特征,故最能激发和满足人们的好奇心和审美情趣.正是这个原因,20世纪40年代中期美国数学学会曾将数学大奖(菲尔兹奖)颁发给了塞尔贝格(A. Selberg)和埃尔特希,以奖赏他们各自独立地用初等方法证明了素数理论中的核心定理——“素数分布定理”.

自然,我们也很希望将来会有一些关于高等数学定理的初等证法的精美作品出现在初等数学研究专业文集上.显然,这类作品也将是对高等数学教材建设的一种贡献.最后,让我们祝愿这本全国性专业系列文集的成长与发展对中国数学事业的革新进程起到一份促进作用.

徐利治

2009年3月于广州

**徐利治简介:**

徐利治,1920年生,原名徐泉涌.教授.江苏常熟人.1945年毕业于西南联合大学数学系.次年加入中国共产党.1949年、1950年先后在英国亚贝丁大学、剑桥大学学习.1951年回国.历任清华大学副教授,吉林大学教授、教务长,大连工学院教授、应用数学研究所所长.在渐近分析、逼近论方面取得重要成果,在国际上被誉为“徐氏渐近公式”、“徐氏逼近”,1985年获国家教委科技进步奖二等奖.著有《渐近积分和积分逼近》、《高维的数值积分》、《数学方法论选讲》,合著《函数逼近的理论与方法》.

◉祝《中国初等数学研究》诞生

# 《中国初等数学研究》诞生了,值得庆贺!

初等数学有大量的问题,需要研究.

中国研究初等数学的人很多,成千上万!

中国研究初等数学的成绩斐然,在平面几何、不等式、组合、初等数论等方面都有很好的成果.大量初等数学的书籍、文章就是有力的证明.

有人以为研究只能属于高等的数学,只能是前沿的、深邃的问题.其实研究本身并无高等、初等的分别.得到高深的结论是新发现,解决初等的问题同样是新发现,都是人类向未知领域的迈进.而且很多人们耳熟能详的大问题,如费马大定理,如哥德巴赫问题,论起它们的"出身",无不属于初等数学.

初等数学研究好比"下里巴人","和者众",吸引了大量的数学爱好者,为数学研究输送、储备了人才.

数学研究不仅需要"阳春白雪",同样也需要"下里巴人".如果只有少数"精英"研究数学;如果研究者过于专门,"know more and more about less and less";那么数学也就不能获得大众的认同,数学本身也就难以发展.

初等数学研究并不容易,它也有深刻的内涵与精巧的方法.陆家羲先生的大集定理就是一个经典的例子.再如在国际双微会议上曾经讨论过如下的几何不等式:

> 在$\triangle ABC$的边上取三个点$D,E,F$,使得沿着三角形的边界从$D$到$E$,从$E$到$F$,从$F$到$D$,所走的长都相等(即都等于$\triangle ABC$的周长$a+b+c$的三分之一).求证:
>
> $$\triangle DEF\text{ 的周长}\geqslant\frac{1}{2}(a+b+c)$$

这道题难倒了众多与会的数学家,在会议期间没有能够解决.后来福建的杨学枝先生(也就是本刊的主编)给出了一个简洁优雅的证明.

对于初等数学,我是很有兴趣的,也颇想做些研究,但却没有多少成绩.我做得最多的是数学的普及与传播,或许这也可以说是初等数学研究的一个部分.

普及与提高,二者不可缺一.普及可以使更多的人了解数学,喜爱数学,甚至参与研究数学.但没有提高,就只能停滞在低水平上,没有长进.反过来,一味强调提高,轻视普及,参与的人将越来越少.大量"凡夫俗子"被摒弃在数学研究大门之外,虽然他们非常喜爱数学.如果出现这样的情况,提高也就难以为继了.

其实，普及中也有提高．一些理论的更好的阐述，某个问题的更通俗的解释，不少解法的简化或推广，往往更接近事物的本质，未尝不是一种提高．

从事数学的普及与传播，不仅于人有益，对自己也大有好处．从事这种工作，可以培养学习与研究数学的兴趣；可以进行研究的尝试，小试身手．在条件可能的情况下，可以进一步走上研究的道路．甚至进入更高深的研究．当年华罗庚先生就是这样步步登高的．

初等数学十分有趣，但年轻人切不可沉溺于初等问题．年轻人应当志存高远，应当尽快占领尽可能高的数学高地．如果一开始就陷入一两个初等问题中不能自拔，那么就会与真正的数学研究渐行渐远了．初等数学研究可能更适合数学教师，有固定职业的业余数学家或年岁较大的人．

最后，祝中国初等数学研究取得更多的成就．

**单墫简介：**

单墫(Shan Zun)，教授，男，1943年11月生，江苏泰州市人，中共党员，1964年扬州师范学院数学系毕业，1983年在中国科学技术大学获理学博士学位．现任南京师范大学数学与计算机科学学院教授，博士生导师，南京市第十届政协委员，南京数学学学会理事长．曾任南京市第九届政协委员，南京师范大学数学系主任，中共十四大代表，国家教委理科实验班专家组组长，中国国家数学奥林匹克代表队总教练、领队．他长期从事数论及数学课程与教学论研究，发表各种论文100余篇，出版专著20余部．1991年被评为全国优秀教师并享受国务院特殊津贴，1992年被授予国家级有突出贡献的中青年专家称号．1997年被评为南京师范大学优秀学科带头人．

# 目　录

## ● 专题研究



## ● 数学教育与教学



## ● 竞赛数学



## ● 测试数学



## ● 研究动态与综述

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

# 限定条件的有序集组计数(Ⅱ)

吴 康[1] 苏文龙[2] 罗海鹏[3] 许晓东[3]

(1. 华南师范大学数学科学学院,广东 广州 510631;
2. 梧州学院,广西 梧州 543002;
3. 广西科学院,广西 南宁 530031)

**摘 要**:推导了条件 $A_1\cup\cdots\cup A_m=N_n$ 以及再加上条件 $A_1,\cdots,A_m\neq\varnothing$ 之下,集函数 $x_1^{|A_1|}\cdots x_m^{|A_m|}$,$x^{|A_1|+\cdots+|A_m|}$,$x^{|A_1\cup\cdots\cup A_m|}$,$x^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|}$,$x_1^{\tau(A_1)}\cdots x_m^{\tau(A_m)}$ 和 $x^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)}$ 的相关计数式,并作出一系列推广及应用.

**关键词**:有序集组 有序覆盖 集函数 有序集组计数

## 1. 符号系统和已有结果

本文接续文[1],对限定条件的有序集组计数进行深入探究,仍应用一一对应计数原理、加法原理、乘法原理、容斥原理、递推方法以及生成函数方法. 限于篇幅,一些公式只给出简证或不证明.

为免阅读困难,现把文[1]使用的特定符号系统简要重录:对有限集 $A$,$|A|$ 表示 $A$ 的元素个数;若 $A\subset\mathbf{C}$(复数集),$\tau(A)$ 表示 $A$ 的元素和,约定 $\tau(\varnothing)=0$. 对 $a,b\in\mathbf{Z}$(整数集),$a\leqslant b$,$N_{a,b}$ 表示集合 $\{a,a+1,\cdots,b\}$;对 $n\in\mathbf{Z}^+$(正整数集),$N_n$ 表示集合 $N_{1,n}$. 为方便,文[1]用到的7种集函数再命名如下:对(有序)$m$ 集组 $(A_1,\cdots,A_m)$,定义集函数

① 长度:$f_1(A_1,\cdots,A_m)=m$.

② 宽度:$f_2(A_1,\cdots,A_m)=|A_1|+\cdots+|A_m|$.

③ 广度:$f_3(A_1,\cdots,A_m)=|A_1|\cdots|A_m|$.

④ 丰度:$f_4(A_1,\cdots,A_m)=|A_1\cup\cdots\cup A_m|$.

⑤ 浓度:$f_5(A_1,\cdots,A_m)=|A_1\cap\cdots\cap A_m|$.

⑥ 密度:$f_6(A_1,\cdots,A_m)=\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)$.

⑦ 跨度:$f_7(A_1,\cdots,A_m)=\tau(A_1)\cdots\tau(A_m)$.

本文沿用[1]之限定条件:对 $n\in\mathbf{Z}^+$,$k\in\mathbf{Z}_0$(非负整数集),$k\leqslant n$,设定条件

$$A_1,\cdots,A_m\subset N_n; \tag{1}$$

$$A_1\cup\cdots\cup A_m=N_n; \tag{2}$$

$$A_1,\cdots,A_m\neq\varnothing. \tag{3}$$

在限定条件(1)的基础上,本文研究以下集函数产生的计数问题,其中 $x_1,\cdots,x_m,x\in\mathbf{C}$,且

$$g_1(A_1,\cdots,A_m)=x_1^{|A_1|}\cdots x_m^{|A_m|}, \tag{4}$$

$$g_2(A_1,\cdots,A_m)=x^{|A_1|+\cdots+|A_m|}, \tag{5}$$

$$g_3(A_1,\cdots,A_m)=x^{|A_1\cup\cdots\cup A_m|}, \tag{6}$$

$$g_4(A_1,\cdots,A_m)=x^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|}, \tag{7}$$

$$g_5(A_1,\cdots,A_m)=x_1^{\tau(A_1)}\cdots x_m^{\tau(A_m)}, \tag{8}$$

$$g_6(A_1,\cdots,A_m)=x^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)}. \tag{9}$$

为简明,和式 $\sum\limits_{A_1,\cdots,A_m\subset N_n}f_2(A_1,\cdots,A_m)g_1(A_1,\cdots,A_m)=\sum\limits_{A_1,\cdots,A_m\subset N_n}(|A_1|+\cdots+|A_m|)x_1^{|A_1|}\cdots x_m^{|A_m|}$ 简记为 $\sum\limits_{(1)}f_2g_1$ 等,依此类推.

文[1]已证明的主要结果为

$$\alpha_1(m,n)=\sum_{(1)}g_1=\prod_{i=1}^{m}(1+x_i)^n, \tag{10}$$

$$\alpha_2(m,n)=\sum_{(1)}g_2=(1+x)^{mn}, \tag{11}$$

$$\alpha_3(m,n)=\sum_{(1)}g_3=[(2^m-1)x+1]^n, \tag{12}$$

$$\alpha_4(m,n)=\sum_{(1)}g_4=(x+2^m-1)^n, \tag{13}$$

$$\alpha_5(m,n)=\sum_{(1)}g_5=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1+x_i^j), \tag{14}$$

$$\alpha_6(m,n)=\sum_{(1)}g_6=\prod_{j=1}^{n}(1+x^j)^m; \tag{15}$$

$$\beta_1(m,n)=\sum_{(1)(3)}g_1=\prod_{i=1}^{m}[(1+x_i)^n-1], \tag{16}$$

$$\beta_2(m,n)=\sum_{(1)(3)}g_2=[(1+x)^n-1]^m, \tag{17}$$

$$\beta_3(m,n) = \sum_{(1)(3)} g_3 = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i}\binom{m}{i}[(2^i-1)x+1]^n, \quad (18)$$

$$\beta_4(m,n) = \sum_{(1)(3)} g_4 = (x+2^m-1)^n + (2^n-1)^m - 2^{mn}, \quad (19)$$

$$\beta_5(m,n) = \sum_{(1)(3)} g_5 = \prod_{i=1}^{m}[\prod_{j=1}^{n}(1+x_i^j)-1], \quad (20)$$

$$\beta_6(m,n) = \sum_{(1)(3)} g_6 = [\prod_{j=1}^{n}(1+x_i^j)-1]^m. \quad (21)$$

文[1]指出了式(10)～(21)的一些变换与应用,例如

$$\sum_{(1)} (|A_1|+\cdots+|A_m|)x^{|A_1|+\cdots+|A_m|} = mnx(1+x)^{mn-1}, \quad (22)$$

$$\sum_{(1)} |A_1|\cdots|A_m|\, x_1^{|A_1|}\cdots x_m^{|A_m|} = n^m x_1\cdots x_m(1+x_1)^{n-1}\cdots(1+x_m)^{n-1}, \quad (23)$$

$$\sum_{(1)} |A_1\cup\cdots\cup A_m|\, x^{|A_1\cup\cdots\cup A_m|} = n(2^m-1)x[(2^m-1)x+1]^{n-1}. \quad (24)$$

## 2. 有序覆盖计数问题

**定义 1** 对集合 $A$,如集合 $A_1,\cdots,A_m\subset A$, $A_1\cup\cdots\cup A_m = A, m\in\mathbf{Z}^+$,则称 $m$ 集组 $(A_1,\cdots,A_m)$ 为 $A$ 的有序 $m$ 覆盖,简称为有序覆盖;若 $A_i\neq\varnothing$, $i\in N_m$,则称 $(A_1,\cdots,A_m)$ 为 $A$ 的非空有序 $m$ 覆盖,简称为非空有序覆盖.

**定理 1** 和式

$$\gamma_1(m,n) = \sum_{(1)(2)} g_1 = \sum_{\substack{A_1,\cdots,A_m\subset N_n\\ A_1\cup\cdots\cup A_m=N_n}} x_1^{|A_1|}\cdots x_m^{|A_m|} = [\prod_{i=1}^{m}(1+x_i)-1]^n, \quad (25)$$

$$\gamma_2(m,n) = \sum_{(1)(2)} g_2 = \sum_{(1)(2)} x^{|A_1|+\cdots+|A_m|} = [(1+x)^m-1]^n. \quad (26)$$

**证明** $\gamma_1(m,n) = \prod_{a\in N_n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant m\\ a\in A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_i}}} x_{j_1}\cdots x_{j_i} = \prod_{a\in N_n}[\prod_{i=1}^{m}(1+x_i)-1] =$ 式(25)右边,在式(25)中令 $x_1=\cdots x_m = x$ 即得式(26).

**例 1** 在式(26)中令 $x=\pm1$ 得

$$\sum_{(1)(2)} 1 = (2^m-1)^n, \quad (27)$$

$$\sum_{(1)(2)} (-1)^{|A_1|+\cdots+|A_m|} = (-1)^n. \quad (28)$$

在式(25)两边对 $x_1,\cdots,x_m$ 求偏导数 $\dfrac{\partial^m\gamma_1(m,n)}{\partial x_1\cdots\partial x_m}$ 后再乘 $x_1\cdots x_m$ 得

$$\sum_{(1)(2)} f_3 g_1 = x_1\cdots x_m\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^m\cdot[(1+x_1)\cdots(1+x_m)]^{j-1}. \quad (29)$$

在式(29)中令 $x_1=\cdots=x_m=\pm1$ 得

$$\sum_{(1)(2)} |A_1|\cdots|A_m| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}2^{m(j-1)}j^m, \quad (30)$$

$$\sum_{(1)(2)} |A_1|\cdots|A_m|(-1)^{|A_1|+\cdots+|A_m|} = (-1)^{m+n-1}n. \quad (31)$$

在式(26)两边对 $x$ 求导数后再乘 $x$ 得

$$\sum_{(1)(2)} f_2 g_2 = mnx(1+x)^{m-1}[(1+x)^m-1]^{n-1}, \quad (32)$$

在式(32)中令 $x=\pm1$ 得

$$\sum_{(1)(2)} (|A_1|+\cdots+|A_m|) = 2^{m-1}mn(2^m-1)^{n-1}, \quad (33)$$

$$\sum_{(1)(2)} (|A_1|+\cdots+|A_m|)(-1)^{|A_1|+\cdots+|A_m|} = 0, m\geqslant 2. \quad (34)$$

式(27),(28)表明:$N_n$ 的有序 $m$ 覆盖个数 $R_1=(2^n-1)^m$,其中偶(奇)宽度有序 $m$ 覆盖个数记为 $P_1(Q_1)$,则 $P_1-Q_1=(-1)^n$, $P_1=[(2^m-1)^n+(-1)^n]/2$, $Q_1=[(2^m-1)^n-(-1)^n]/2$.

式(30),(31)表明:$N_n$ 的全体有序 $m$ 覆盖的广度之总和 $R_2=$ 式(30)右边,其中偶(奇)宽度有序 $m$ 覆盖的广度和记为 $P_2(Q_2)$,则 $P_2-Q_2=(-1)^{m+n-1}n$, $P_2=[R_2-(-1)^{m+n}n]/2$, $Q_2=[R_2+(-1)^{m+n}n]/2$.

式(33),(34)表明:$N_n$ 的全体有序 $m$ 覆盖的宽度之总和 $R_3=2^{m-1}mn(2^m-1)^{n-1}$,其中偶(奇)宽度有序 $m$ 覆盖的宽度和记为 $P_3(Q_3)$,则当 $m\geqslant2$ 时, $P_3=Q_3=2^{m-2}mn(2^m-1)^{n-1}$.

**定理 2** 和式

$$\gamma_3(m,n) = \sum_{(1)(2)} g_3 = \sum_{(1)(2)} x^{|A_1\cup\cdots\cup A_m|} =$$

$$(2^m-1)^n x^n, \tag{35}$$

$$\gamma_4(m,n)=\sum_{(1)(2)} g_4=\sum_{(1)(2)} x^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|}=(x+2^m-2)^n. \tag{36}$$

**证明** 由式(27)立得 $\gamma_3(m,n)=\sum_{(1)(2)} x^n=(2^m-1)^n x^n$. 下证式(36). 任给 $k\in N_{0,n}$,设 $|A_1\cap\cdots\cap A_m|=k$,则 $A_1\cap\cdots\cap A_m$ 有 $\binom{n}{k}$ 种选择. 对确定的 $A_1\cap\cdots\cap A_m=A=\{a_1,\cdots,a_k\}$,每一 $a_i(i\in N_k)$ 均必属于 $A_j(j\in N_m)$;每个 $a\in N_n-A$ 均可属于 $A_j$ 或不属于 $A_j(j\in N_m)$,但 $a$ 不能同时属于或同时不属于 $A_1,\cdots,A_m$,由乘法原理知 $a$ 有 $2^m-2$ 种选择. 因此由乘法原理,满足 $A_1\cap\cdots\cap A_m=A,A_1\cup\cdots\cup A_m=N_n$ 的集组 $(A_1,\cdots,A_m)$ 共有 $(2^m-2)^{n-k}$ 个. 由加法原理和二项式定理得

$$\gamma_4(m,n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2^m-2)^{n-k}x^k=(x+2^m-2)^n.$$

**例 2** 在式(36)中令 $x=\pm 1$ 得式(27)和

$$\sum_{(1)(2)}(-1)^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|}=(2^m-3)^n. \tag{37}$$

在式(36)两边对 $x$ 求导数后再乘 $x$ 得

$$\sum_{(1)(2)} f_5 g_4=nx(x+2^m-2)^{n-1}. \tag{38}$$

在式(38)中令 $x=\pm 1$ 得

$$\sum_{(1)(2)}|A_1\cap\cdots\cap A_m|=n(2^m-1)^{n-1}, \tag{39}$$

$$\sum_{(1)(2)}|A_1\cap\cdots\cap A_m|(-1)^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|}=-n(2^m-3)^{n-1}. \tag{40}$$

式(27),(37)表明:设 $N_n$ 的偶(奇)浓度有序 $m$ 覆盖个数为 $P_4(Q_4)$,则 $P_4-Q_4=(2^m-3)^n$,$P_4=[(2^m-1)^n+(2^m-3)^n]/2$,$Q_4=[(2^m-1)^n-(2^m-3)^n]/4$.

式(39),(40)表明:$N_n$ 的全体有序 $m$ 覆盖的浓度之总和 $R_5=n(2^m-1)^{n-1}$,其中偶(奇)浓度有序 $m$ 覆盖的浓度和记为 $P_5(Q_5)$,则 $P_5-Q_5=-n(2^m-3)^{n-1}$,$P_5=n[(2^m-1)^{n-1}-(2^m-3)^{n-1}]/2$,$Q_5=n[(2^m-1)^{n-1}+(2^m-3)^{n-1}]/2$.

**定理 3** 和式

$$\gamma_5(m,n)=\sum_{(1)(2)} g_5=\sum_{(1)(2)} x_1^{\tau(A_1)}\cdots x_m^{\tau(A_m)}=\prod_{k=1}^{n}\Big[\prod_{i=1}^{m}(1+x_i^k)-1\Big], \tag{41}$$

$$\gamma_6(m,n)=\sum_{(1)(2)} g_6=\sum_{(1)(2)} x^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)}=\prod_{k=1}^{n}[(1+x^k)^m-1]. \tag{42}$$

**证明** 类似于定理 1 之证明,可得

$$\gamma_5(m,n)=\prod_{k\in N_n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{1\le j_1<\cdots<j_i\le m\\ k\in A_{j_i}\cap\cdots\cap A_{j_i}}} x_{j_1}^k\cdots x_{j_i}^k=\prod_{k\in N_n}\Big[\prod_{i=1}^{m}(1+x_i^k)-1\Big]=\text{式(41)右边}.$$

在式(41)中令 $x_1=\cdots=x_m=x$,即得式(42).

**例 3** 在式(42)中令 $x=\pm 1$ 得式(27)和

$$\sum_{(1)(2)}(-1)^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)}=(-1)^n(1-2^m)^{[\frac{n}{2}]}, \tag{43}$$

其中【$a$】表示不大于 $a$ 的最大整数.

在式(41)两边对 $x_1,\cdots,x_m$ 求偏导数 $\frac{\partial^m\gamma_5(m,n)}{\partial x_1\cdots\partial x_m}$ 后再乘 $x_1\cdots x_m$ 得

$$\sum_{(1)(2)} f_7 g_5=x_1\cdots x_n\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\sum_{\substack{1\le j_1<\cdots<j_i\le n\\ j_1+\cdots+j_i=r}} r^m[(1+x_1)\cdots(1+x_m)]^{r-1}. \tag{44}$$

在式(44)中令 $x_1=\cdots=x_m=\pm 1$ 得

$$\sum_{(1)(2)}\tau(A_1)\cdots\tau(A_m)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\sum_{\substack{1\le j_1<\cdots<j_i\le n\\ j_1+\cdots+j_i=r}} r^m 2^{m(r-1)}, \tag{45}$$

$$\sum_{(1)(2)}\tau(A_1)\cdots\tau(A_m)(-1)^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)}=-1. \tag{46}$$

在式(42)两边对 $x$ 求导数后再乘 $x$ 得

$$\sum_{(1)(2)} f_6 g_6=mx\prod_{k=1}^{n}[(1+x^k)^m-1]\sum_{i=1}^{n}\frac{ix^{i-1}(1+x^i)^{m-1}}{(1+x^i)^m-1} \tag{47}$$

在式(47)中令 $x=\pm 1$ 得

$$\sum_{(1)(2)}[\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)]=2^{m-2}(2^m-1)^{n-1}mn(n+1). \tag{48}$$

$$\sum_{(1)(2)}[\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)](-1)^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)}=(-1)^{n-1}2^{m-1}(1-2^m)^{[\frac{n}{2}]-1}. \tag{49}$$

式(27),(43)表明:设 $N_n$ 的偶(奇)密度有序 $m$ 覆盖个数为 $P_6(Q_6)$,则 $P_6-Q_6=(-1)^n(1-$

$2^m)^{[\frac{n}{2}]}$, $P_6=(-1)^n[(1-2^m)^n+(1-2^m)^{[\frac{n}{2}]}]/2$, $Q_6=(-1)^n[(1-2^m)^n-(1-2^m)^{[\frac{n}{2}]}]/2$.

式(45),(46)表明:$N_n$ 的全体有序 $m$ 覆盖的跨度之总和 $R_7=$ 式(45)右边,其中偶(奇)密度有序 $m$ 覆盖的跨度和记为 $P_7(Q_7)$,则 $P_7-Q_7=-1$, $P_7=(R_7-1)/2$, $Q_7=(R_7+1)/2$.

式(48),(49)表明:$N_n$ 的全体有序 $m$ 覆盖的密度之总和 $R_8=2^{m-2}(2^m-1)^{n-1}mn(n+1)$,其中偶(奇)密度有序 $m$ 覆盖的密度和记为 $P_8(Q_8)$,则 $P_8-Q_8=(-1)^{n-1}2^{m-1}(1-2^m)^{[\frac{n}{2}]-1}$, $P_8=(-1)^{n-1}\cdot 2^{m-3}[(1-2^m)^{n-1}\cdot mn(n+1)+2(1-2^m)^{[\frac{n}{2}]-1}]$, $Q_8=(-1)^{n-1}2^{m-3}[(1-2^m)^{n-1}mn(n+1)-2(1-2^m)^{[\frac{n}{2}]-1}]$.

对定理1,2,3,还可以利用微积分和赋值法,进行更深入的探究.

### 3. 限定子集非空的有序覆盖计数问题

**定理4** 和式

$$\delta_1(m,n)=\sum_{(1)(2)(3)}g_1=\sum_{\substack{A_1,\cdots,A_m\subset N_n\\A_1\cup\cdots\cup A_m=N_n\\A_1,\cdots,A_m\neq\varnothing}}x_1^{|A_1|}\cdots x_m^{|A_m|}=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant m}[(1+x_{j_1})\cdots(1+x_{j_i})-1]^n,\tag{50}$$

$$\delta_2(m,n)=\sum_{(1)(2)(3)}g_2=\sum_{(1)(2)(3)}x^{|A_1|+\cdots+|A_m|}=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}[(1+x)^i-1]^n.\tag{51}$$

**证明** 记 $V$ 为 $N_n$ 的全体有序 $m$ 覆盖 $(A_1,\cdots,A_m)$ 之集合,$V_j$ 为 $N_n$ 的满足 $A_j=\varnothing$ 的有序 $m$ 覆盖 $(A_1,\cdots,A_m)$ 之集合,则满足条件(1)(2)(3)的 $m$ 集组 $(A_1,\cdots,A_m)$ 之集合为 $V-(V_1\cup\cdots\cup V_m)$. 由 $m$ 阶容斥原理的权形式和定理1得

$$\delta_1(m,n)=\sum_{(1)(2)(3)}g_1=\sum_{(A_1,\cdots,A_m)\in V-(V_1\cup\cdots\cup V_m)}g_1=\sum_{(A_1,\cdots,A_m)\in V}g_1+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\sum_{\substack{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m\\(A_1,\cdots,A_m)\in V_{j_1}\cap\cdots\cap V_{j_k}}}g_1.$$

注意到 $V_1\cap\cdots\cap V_m=\varnothing$,并换 $m-k$ 为 $i$,则

$$\delta_1(m,n)=\sum_{(1)(2)}g_1+\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i}\sum_{\substack{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant m\\A_{j_1}\cup\cdots\cup A_{j_i}=N_n}}x_{j_1}^{|A_{j_1}|}\cdots x_{j}^{|A_{j_i}|}=$$
$$[(1+x_1)\cdots(1+x_m)-1]^n+\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i}\cdot\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant m}[(1+x_{j_1})\cdots(1+x_{j_i})-1]^n=$$
式(50)右边.

在式(50)中令 $x_1=\cdots=x_m=x$,即得式(51).

**例4** 在式(51)中令 $x=\pm1$ 得

$$\sum_{(1)(2)(3)}1=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}(2^i-1)^n.\tag{52}$$

$$\sum_{(1)(2)(3)}(-1)^{|A_1|+\cdots+|A_m|}=(-1)^{m+n-1}.\tag{53}$$

在式(50)两边对 $x_1,\cdots,x_m$ 求偏导数 $\frac{\partial^m\delta_1(m,n)}{\partial x_1\cdots\partial x_m}$ 后再乘 $x_1\cdots x_m$,可得与式(29)相同的结果,即

$$\sum_{(1)(2)(3)}f_3g_1=\sum_{(1)(2)}f_3g_1=\text{式(29)右边}.\tag{54}$$

从而令 $x_1=\cdots=x_m=\pm1$,可得与式(30),(31)相同的结果,即

$$\sum_{(1)(2)(3)}|A_1|\cdots|A_m|=\sum_{(1)(2)}|A_1|\cdots|A_m|=\text{式(30)右边},\tag{55}$$

$$\sum_{(1)(2)(3)}|A_1|\cdots|A_m|(-1)^{|A_1|+\cdots+|A_m|}=\sum_{(1)(2)}|A_1|\cdots|A_m|(-1)^{|A_1|+\cdots+|A_m|}=\text{式(31)右边}=(-1)^{m+n-1}n.\tag{56}$$

在式(51)两边对 $x$ 求导后再乘 $x$ 得

$$\sum_{(1)(2)(3)}(|A_1|+\cdots+|A_m|)x^{|A_1|+\cdots+|A_m|}=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}nix(1+x)^{i-1}\cdot[(1+x)^i-1]^{n-1}.\tag{57}$$

在式(57)中令 $x=\pm1$ 得

$$\sum_{(1)(2)(3)}(|A_1|+\cdots+|A_m|)=mn\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\binom{n-1}{j}2^j(2^{j+1}-1)^{m-1}.\tag{58}$$

$$\sum_{(1)(2)(3)}(|A_1|+\cdots+|A_m|)(-1)^{|A_1|+\cdots+|A_m|}=(-1)^{m+n-1}mn.\tag{59}$$

式(52),(53)表明:$N_n$ 的非空有序 $m$ 覆盖个数 $R'_1=$ 式(52)右边,其中偶(奇)宽度非空有序 $m$ 覆

盖个数记为 $P'_1(Q'_1)$,则

$$P'_1 - Q'_1 = (-1)^{m+n-1},$$
$$P'_1 = [R'_1 - (-1)^{m+n}]/2,$$
$$Q'_1 = [R'_1 + (-1)^{m+n}]/2.$$

式(55),(56) 表明:$N_n$ 的全体非空有序 $m$ 覆盖的广度之总和 $R_2 = R'_2$,其中偶(奇)宽度非空有序 $m$ 覆盖个数记为 $P'_2(Q'_2)$,$P'_2 = P_2$,$Q'_2 = Q_2$.

式(58),(59) 表明:$N_n$ 的全体非空有序 $m$ 覆盖的宽度之总和 $R'_3$ = 式(58) 右边,其中偶(奇)宽度非空有序 $m$ 覆盖的宽度和记为 $P'_3(Q'_3)$,则 $P'_3 - Q'_3 = (-1)^{m+n-1}mn$,$P'_3 = [R'_3 - (-1)^{m+n}mn]/2$,$Q'_3 = [R'_3 + (-1)^{m+n}mn]/2$.

**定理5** 和式

$$\delta_3(m,n) = \sum_{(1)(2)(3)} g_3 = \sum_{(1)(2)(3)} x^{|A_1\cup\cdots\cup A_m|} = x^n \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i}\binom{m}{i}(2^i - 1)^n, \quad (60)$$

$$\delta_4(m,n) = \sum_{(1)(2)(3)} g_4 = \sum_{(1)(2)(3)} x^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|} = (x + 2^m - 2)^n + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{m-i}\binom{m}{i}(2^i - 1)^n. \quad (61)$$

**证明** 由式(52) 立得 $\delta_3(m,n) = \sum_{(1)(2)(3)} x^n$ = 式(60) 右边. 又 $\delta_4(m,n) = \sum_{(1)(2)} g_4 - [\sum_{(1)(2)} 1 - \sum_{(1)(2)(3)} 1]$,由式(36),(27),(52) 代入得证式(61).

**例5** 在式(61) 中令 $x = \pm 1$ 得式(52) 和

$$\sum_{(1)(2)(3)} (-1)^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|} = (2^m - 3)^n + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{m-i}\binom{m}{i}(2^i - 1)^n. \quad (62)$$

在式(61) 两边对 $x$ 求导数后再乘 $x$ 可得与式(38) 相同的结果,即

$$\sum_{(1)(2)(3)} f_5 g_4 = \sum_{(1)(2)} f_5 g_4 = nx(x + 2^m - 2)^{n-1}. \quad (63)$$

从而令 $x = \pm 1$,可得与式(39),(40) 相同的结果,即

$$\sum_{(1)(2)(3)} |A_1 \cap \cdots \cap A_m| = \sum_{(1)(2)} |A_1 \cap \cdots \cap A_m| = n(2^m - 1)^{n-1}, \quad (64)$$

$$\sum_{(1)(2)(3)} |A_1 \cap \cdots \cap A_m| (-1)^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|} = \sum_{(1)(2)} |A_1 \cap \cdots \cap A_m| (-1)^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|} = -n(2^m - 3)^{n-1}. \quad (65)$$

式(52),(62) 表明:设 $N_n$ 的偶(奇)浓度非空有序 $m$ 覆盖个数为 $P'_4(Q'_4)$,则 $P'_4 - Q'_4$ = 式(62) 右边,$P'_4 = [(2^m - 1)^n + (2^m - 3)^n]/2 + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}(2^i - 1)^n$,$Q'_4 = [(2^m - 1)^n - (2^m - 3)^n]/2$.

**定理6** 和式

$$\delta_5(m,n) = \sum_{(1)(2)(3)} g_5 = \sum_{(1)(2)(3)} x_1^{\tau(A_1)}\cdots x_m^{\tau(A_m)} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant m}\prod_{k=1}^{n}[(1 + x_{j_1}^k)\cdots(1 + x_{j_i}^k) - 1], \quad (66)$$

$$\delta_6(m,n) = \sum_{(1)(2)(3)} g_6 = \sum_{(1)(2)(3)} x^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}\prod_{k=1}^{n}[(1 + x^k)^i - 1]. \quad (67)$$

**证明** 沿用定理4证明之符号和方法,由 $m$ 阶容斥原理的权形式和定理3 得

$$\delta_5(m,n) = \sum_{(1)(2)(3)} g_5 = \sum_{(A_1,\cdots,A_m)\in V-(V_1\cup\cdots\cup V_m)} g_5 = \sum_{(A_1,\cdots,A_m)\in V} g_5 + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \sum_{\substack{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m\\ (A_1,\cdots,A_m)\in V_{j_1}\cap\cdots\cap V_{j_k}}} g_5.$$

注意到 $V_1 \cap \cdots \cap V_m = \varnothing$,并换 $m - k$ 为 $i$,则

$$\delta_5(m,n) = \sum_{(1)(2)} g_5 + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i}\sum_{\substack{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant m\\ A_{j_1}\cup\cdots\cup A_{j_i}=N_n}} x_{j_1}^{\tau(A_{j_1})}\cdots x_{j_i}^{\tau(A_{j_i})} = \prod_{k=1}^{n}[(1 + x_1^k)\cdots(1 + x_m^k) - 1] + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant m}\prod_{k=1}^{n}[(1 + x_{j_1}^k)\cdots(1 + x_{j_i}^k) - 1] = \text{式(66) 右边}.$$

在式(66) 中令 $x_1 = \cdots = x_m = x$,即得式(67).

**例6** 在式(67) 中令 $x = \pm 1$ 得式(52) 和

$$\sum_{(1)(2)(3)} (-1)^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m+n-i}\binom{m}{i}(1 - 2^i)^{[\frac{n}{2}]}. \quad (68)$$

在式(66) 两边对 $x_1,\cdots,x_n$ 求偏导数 $\frac{\partial^m \delta_5(m,n)}{\partial x_1\cdots\partial x_m}$ 后再乘 $x_1\cdots x_m$,可得与式(44) 相同的结果,即

$$\sum_{(1)(2)(3)} f_7 g_5 = \sum_{(1)(2)} f_7 g_5 = \text{式(44)右边}. \quad (69)$$

从而令 $x_1 = \cdots = x_m = \pm 1$,可得与式(45),(46)相同的结果,即

$$\sum_{(1)(2)(3)} \tau(A_1)\cdots\tau(A_m) = \sum_{(1)(2)} \tau(A_1)\cdots\tau(A_m) = \text{式(45)右边}, \quad (70)$$

$$\sum_{(1)(2)(3)} \tau(A_1)\cdots\tau(A_m)(-1)^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)} = \sum_{(1)(2)} \tau(A_1)\cdots\tau(A_m)(-1)^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)} = -1. \quad (71)$$

在式(67)两边对 $x$ 求导数后再乘 $x$ 得

$$\sum_{(1)(2)(3)} f_6 g_6 = x\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i} i \prod_{k=1}^{n}[(1+x^k)^i - 1]\sum_{j=1}^{n}\frac{jx^{j-1}(1+x^j)^{i-1}}{(1+x^j)^i - 1}. \quad (72)$$

在式(72)中令 $x = \pm 1$ 得

$$\sum_{(1)(2)(3)}[\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)] = mn(n+1)\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-1-i}\binom{m-1}{i}2^{i-1}(2^{i+1}-1)^{n-1}, \quad (73)$$

$$\sum_{(1)(2)(3)}[\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)](-1)^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)} = m\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m+n-i}2^i(1-2^{i+1})^{[\frac{n}{2}]-1}. \quad (74)$$

式(52),(68)表明:设 $N_n$ 的偶(奇)密度非空有序 $m$ 覆盖个数为 $P'_6(Q'_6)$,则 $P'_6 - Q'_6 =$ 式(68)右边,$P'_6 = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m+n-i}\binom{m}{i}[(1-2^i)^n + (1-2^i)^{[\frac{n}{2}]}]/2$,$Q'_6 = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m+n-i}\binom{m}{i}\cdot[(1-2^i)^n - (1-2^i)^{[\frac{n}{2}]}]/2$.

式(73),(74)式表明:$N_n$ 的全体非空有序 $m$ 覆盖的密度之总和 $R'_8 =$ 式(73)右边,其中偶(奇)密度非空有序 $m$ 覆盖的密度和记为 $P'_8(Q'_8)$,则 $P'_8 - Q'_8 =$ 式(74)右边,$P'_8 =$ [式(73)右边 + 式(74)右边]/2,$Q'_8 =$ [式(73)右边 - 式(74)右边]/2.

### 4. 若干说明和补充

文[1]的若干说明如下:强度、烈度(集函数⑩,⑪)应定义在 $A \subset \mathbf{R}$(实数集)的前提下;厚度(集函数⑫)为非负整数. 文[1]中的式(20)应为 $\sum_{(1)}(|A_1|+\cdots+|A_m|)x^{|A_1|+\cdots+|A_m|} = mnx(1+x)^{mn-1}$,式(53)的第一式应为 $\sum_{(1)(2)(3)}|A_1 \cup \cdots \cup A_m|\cdot(-1)^{|A_1\cup\cdots\cup A_m|} = n\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}(1-2^i)(2-2^i)^{n-1}$.

由本文式(36),(38),(61),(63),令 $x = 2$ 可得若干有趣式子,写成:

**例 7** 
$$\sum_{(1)(2)} 2^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|} = 2^{mn}, \quad (75)$$

$$\sum_{(1)(2)(3)} 2^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|} = 2^{mn} + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}(2^i-1)^n, \quad (76)$$

$$\sum_{(1)(2)(3)} |A_1\cap\cdots\cap A_m|\cdot 2^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|} = \sum_{(1)(2)} |A_1\cap\cdots\cap A_m|\cdot 2^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|} = 2^{mn-m+1}n. \quad (77)$$

### 参考文献

[1] 吴康,苏文龙,罗海鹏,等. 限定条件的有序集组计数(Ⅰ)[J]. 中学数学研究,2007(6):43-48.

[2] LOUIS COMTET. 高等组合学[M]. 谭明术,等,译. 大连:大连理工大学出版社,1991.

[3] 王天明. 近代组合学[M]. 大连:大连理工大学出版社,2008.

### 作者简介

吴康,1957 年生,男,华南师范大学数学科学学院副教授,硕士研究生导师,数学教育指导组(硕士和教育硕士)组长,原《中学数学研究》主编。

数学教育专家,数学竞赛研究专家,初等数学研究专家。首批中国数学奥林匹克高级教练,原 IMO 中国国家集训队教练。

主要学术兼职:全国初等数学研究会副理事长兼秘书长,《初等数学研究》副主编,中国高等教育学会教育数学专业委员会副秘书长,《数学教育学报》编委,丘成桐中学数学奖南部赛区组委会主任等。

主要学术荣誉:广西壮族自治区科技进步奖一等奖(2001 年)、二等奖(2007 年),广西科学院科技进步奖特等奖(2000 年,2007 年),广东省高校教学成果奖一等奖(2004 年)。



试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com