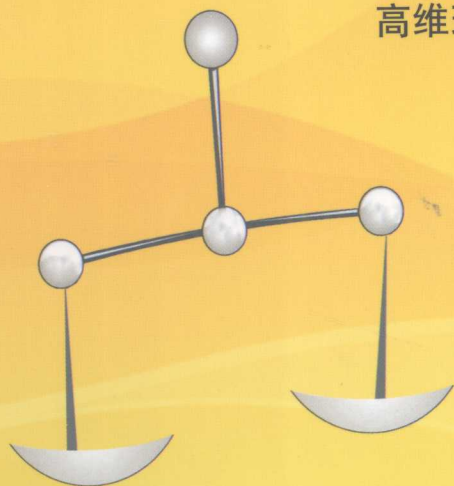


Youxizhong de Shuxue

游戏中的数学

高维理 编著



海洋出版社

游戏中的数学

高维理 编著

海洋出版社

2009 年 · 北京

图书在版编目(CIP)数据

游戏中的数学/高维理编著. —北京:海洋出版社,2009.4
ISBN 978-7-5027-7265-9

I. 游… II. 高… III. 智力游戏 IV. G898.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 209600 号

责任编辑:肖 炜

责任印制:刘志恒

海洋出版社 出版发行

<http://www.oceanpress.com.cn>

北京市海淀区大慧寺路 8 号 邮编:100081

北京海洋印刷厂印刷 新华书店北京发行所经销

2009 年 4 月第 1 版 2009 年 4 月第 1 次印刷

开本:850mm×1168mm 1/32 印张:4.875

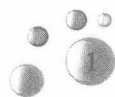
字数:131 千字 定价:12.00 元

发行部:62147016 邮购部:68038093 总编室:62114335

海洋版图书印、装错误可随时退换

目 录

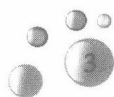
第一章 同船渡问题	(1)
第一节 “简明道方法”和“吴婷婷思想”	(1)
第二节 同船渡问题的推广	(5)
第二章 一窥知全豹	(9)
第一节 一称知每盒佛珠规格	(9)
第二节 数筹码知物品	(12)
第三章 移棋相间	(16)
第一节 “要过程”与“记目的”	(16)
第二节 移棋相间是国粹	(19)
第三节 归纳法使人聪明	(23)
第四节 移棋相间与数学建模	(26)
第四章 砝码与齿轮	(30)
第一节 砝码大小应如何安排	(30)
第二节 砝码问题的拓展	(32)
第三节 挂轮	(34)
第五章 探险者问题	(38)
第一节 孤独的勇士	(38)
第二节 富有牺牲精神的探险队员	(41)
第三节 向无穷远挑战	(44)



第六章 天平称宝石找赝品	(49)
第一节 知道赝品较轻(重)找赝品	(49)
第二节 天平称宝与等比数列	(53)
第三节 天平称量中的置换法	(56)
第七章 按序号淘汰	(60)
第一节 淘汰率不小于 $1/2$ 时的直线按序淘汰	(60)
第二节 淘汰率不小于 $1/2$ 时的环形按序淘汰	(65)
第三节 泰特公式	(69)
第四节 淘汰率小于 $1/2$ 时的环形按序淘汰	(73)
第五节 淘汰率不小于 $1/2$ 时的反射式按序淘汰	(78)
第六节 淘汰率小于 $1/2$ 时的反射式按序淘汰	(82)
第七节 按序淘汰与“韩信点兵”	(85)
第八章 夫妻过渡	(90)
第一节 渡船至多载 2 人时的夫妻过渡	(90)
第二节 夫妻过渡问题的数学模型	(93)
第三节 图示法解夫妻过渡问题	(98)
第四节 岛屿	(101)
第九章 图形的剖分	(106)
第一节 两方合一方	(106)
第二节 将长方形剖分成正方形	(109)
第三节 把任意多边形切拼成正多边形	(113)
第十章 从乌鸦喝水谈起	(118)
第一节 从乌鸦喝水到立方容球	(118)



第二节	密实度	(126)
第三节	一个尚未解决的平面装填问题	(130)
第十一章	梵塔问题的推广	(134)
第一节	三针梵塔问题的解	(134)
第二节	多针梵塔问题的特征	(137)
第三节	四针梵塔问题的解	(140)
第四节	多针梵塔问题一般公式	(144)
后记		(148)



第一章 同船渡问题

第一节 “简明道方法”和“吴婷婷思想”

“起立！”一位戴眼镜的瘦高个老师出现在讲台前。

“同学们，先自我介绍一下，我姓高，从今天开始，兴趣班的数学课由我教。大家能自愿报名参加数学兴趣班，肯定对数学比较喜欢……”



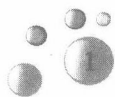
“哼！才不呢，我最讨厌数学了！”坐在后排的简明道嘟囔着。

“那你为什么要报数学兴趣班？”同桌的魏思敏问。

“老爸逼的呗，还说‘学好数理化，走遍天下都不怕……’”

“轻点声，老师望着我们呢！”魏思敏低头说。

果然，高老师把目光投过来，微笑着说：“可能有的同学不喜欢



数学,觉得它枯燥,太费脑筋。其实,通过自己的刻苦钻研,获得问题的解答是最有趣的,用新鲜一点的词来说,就是最有挑战性;另外,数学是应用最广的学科,任何学科,只有广泛采取了数学手段,它才可以算得上是一门成熟的学科。可以说,任何学科都跟数学有缘。学好了数学,可以使人更加聪明……”

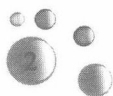
“嘻嘻,卖瓜说瓜甜……”爱笑的萧慧满听了不由窃笑,周围几位同学也会心地笑了笑。



“大家不相信是不是?那我就出一个著名的智力趣题给大家思考:凡坐过渡船过河的人都知道,渡船上的人多,很少有空位,乘客只能一步步地移动或紧贴在旋转易位。同船渡问题可以说是这种实际情况的合理抽象。题目是这样的:一条船有7个座位,船头船尾分别坐了3男3女,只有一个空位。现在男女乘客要调换座位,规定每次只能移到相邻的座位上,但遇到异性却可以直接转到后面的空位中。请问如何移动?并且至少要移动多少步?”高老师出了道题。

大家你望望我,我望望你,一时无人回答。

“好吧,既然没人举手,那么就点名了。简明道同学,你来移动



一下。”高老师照着“座位表”点到了“最讨厌数学”的简明道头上。

“这……这……太难了，我不会，如果简单点还差不多。”简明道毫无头绪，无可奈何地选择了放弃。

“哈哈……”全班一阵哄笑。

高老师摆了摆手说：“大家不要笑他，我倒觉得简明道同学回答得很好，提出了可用来解决各种问题的一个基本方法：当一个问题很复杂时，我们可以先把它化简单一些，多研究几个这样的实例，这样隐含的规律就会显现出来。简明道同学，你看要怎样改变条件，就好解答了呢？”

“要是只有一男一女两人就好了……”

“好吧，就按你简化的条件调换一下吧，但做题之前，要把问题抽象化，可以用数字1代表男人，2代表女人，0代表空位。这填写了数字的3个格子代表船。”

很快，简明道就在黑板上写出了以下移动过程：

“共3步：

102 012 210 201”

“完全正确。下面我对简明道同学的移动作一些说明：102，这是没有移动前的原始状况。毫无疑问，第一步只能由两旁中的一人去占领中间的空位。无论第一步走成012还是120，都不影响最后结果，都可以是最优解。第二步跳跃是必然，如果不跳，只有回原位，这样做将一事无成。第三步移位，达成最终目的。下面请萧慧满同学解一下2男2女的同船渡问题。”

“可以分10步完成：

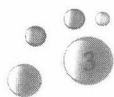
11022 10122 12102 12012 02112 20112

21012 21210 21201 20211 22011”

萧慧满飞快地写下了移动步骤。

“移动目的是达到了，但这是不是最好的方法呢？”高老师笑着问大家。

“不是。因为1的移动方向，从总体上看是从左到右，但第五步



却从右向左(由 20112 到 21012)。因此可用更少的步骤完成。”李世禄同学回答说。

“不错! 你就把更好的移动方法写出来吧。”

“共 8 步完成:

11022 10122 12102 12120 12021 02121

20121 22101 22011”

“完全正确, 下面请魏思敏同学解决一下 3 对男女的移动方式。”

“总共花了 24 步:

1110222 1101222 1121022 1120122 1021122

1201122 0211122 2011122 2101122 2110122

2112102 2112012 2112210 2112201 2112021

2102121 2120121 2122101 2122011 2120211

2021211 2201211 2221011 2220111

我这方法不好, 1 向左退了 2 次, 2 向右退了 2 次, 但我又不知怎么减少总的移动步数。”

“求同船渡问题的最优解, 关键在于不能后退。如男人目标是向右移, 那么中途就不能向左后退。而要做到这一点, 必须形成男女相间排列, 不可形成男或女的连续排列, 免得中途为留出跳跃的空位而后退。下面请季慕迪同学写出移动步骤, 并解释为什么要这么移动。”

“3 男 3 女同船渡问题, 分 15 步可移动成功:

1110222 1101222 1121022 1121202 1120212

1021212 0121212 2101212 2121012 2121210

2121201 2120211 2021211 2201211 2221011

2220111

到第六步为止, 是形成男女相间排列。不要让男或女同性站在一起。然后是跳跃与移动相结合, 一步步达到移动目标。”

“非常好! 那么, 问题是不是完全解决了? 或者说还有没有什



么待完善的地方呢？萧慧满，你来回答。”

“解决了。”

“有没有不同意见？”高老师又问大家。

“没有！”许多人齐声回答。

“不，还没解决。”一声清脆的“女高音”突然响起，同学们纷纷望了过去。

“看来，有时真理还掌握在少数人手里。吴婷婷同学，你说。”

“因为可以……可以把它推广，推广到4对、5对……直到n对时的情形。”

“对。”高老师笑着点点头：“我们每做一件事，每证明一个命题，都应该考虑它能不能推广，从而得出更普遍的结论。这是学习一切科学，研究一切问题的一个重要原则。现在我总结一下这节课的内容，这节课我们主要是学习简明道同学提出的‘由化简而显示其规律’的方法和吴婷婷同学提出的‘对任何结论都应不断推广’的思想。至于把同船渡问题推广到n对男女的情况，就留到下一节课讨论吧。下课！”

第二节 同船渡问题的推广

“上节课我们提出了‘简明道方法’和‘吴婷婷思想’，并按‘简明道方法’研究了1至3对男女的最少移动次数。下面按照‘吴婷婷思想’，大家思考：n对男女时，同船渡问题的表达式。为了便于寻找最少移动次数s与男女对数n之间的关系，我们列出下表：

$$n=1 \quad s=3$$

$$n=2 \quad s=8$$

$$n=3 \quad s=15$$

我们能发现什么规律吗？”

$$3=2^2-1 \quad 8=3^2-1 \quad 15=4^2-1$$



老师,我找到规律了!”赵桂玲同学导出了公式:

$$s = (n + 1)^2 - 1$$

“那么4对男女同船渡问题的最优解是多少?”

“ $(4 + 1)^2 - 1 = 24$,需要移动24步。”

“你能具体地摆出来吗?”

“可以!”说着,赵桂玲同学就在黑板上写出了结果:

111102222 111012222 111210222 111212022
 111202122 110212122 101212122 121012122
 121210122 121212102 121212120 121212021
 121202121 120212121 021212121 201212121
 221012121 221210121 221212101 221212011
 221202111 220212111 222012111 222210111
 222201111

“看来在男女人数相同时,同船渡问题基本上解决了。这个问题还能不能推广呢?”高老师进一步启发大家。

“可以推广到男女人数不同的情况。”吴婷婷同学说。

“很好!假设有 m 位男士、 n 位女士,分别坐在船的两头,如果只在男女之间有一个空位,而且每次只能移动一格,遇到异性可以跳到后面的空格中,问至少需要移动多少次才能成功?现在我们知道,当 $m = n$ 时,最少的移动次数为 $(n + 1)^2 - 1$ 。那么在一般情况下 $m \neq n$ 时,有什么规律呢?简明道你想出来了吗?”

“还是再观察几个特殊情况,如 $n = 2, m = 3$ 时,最少要多少次。”

“好, $n = 2, m = 3$ 时最少要多少次?哪个同学会移?”

“老师,我来!”得到老师同意后,姚国臣同学一个箭步就跃到黑板前写了起来:

总共要11步:

110222 101222 121022 121202 120212 021212
 201212 221012 221210 221201 220211 222011

“现在我们知道:



$n=2, m=2$ 时: $s=(2+1)(2+1)-1=8$

$n=2, m=3$ 时: $s=11$

$n=3, m=3$ 时: $s=(3+1)(3+1)-1=15$

注意: 当 $m=n$ 时, s 都减了 1, $11=12-1=(2+1) \times (3+1)-1$
.....”

“老师, 我知道了: $s=(n+1)(m+1)-1$ 。”赵桂玲同学说出了答案。

“回答正确。但为什么会有这一规律呢?”

.....

“大家不说, 就由我抛砖引玉吧。我们考虑, 有 n 位男士和 m 位女士排成一排:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \hline & & & & n \text{ 位} & & & m \text{ 位} & & & \end{array}$$

整个序列有 $m+n+1$ 位。其中最右边的男士, 即第 n 位的男士, 要到达船的最左侧, 即 $m+n+1$ 位, 如果不跳跃, 他必须移动 $m+1$ 步。第 $n-1$ 位的男士要到第 $(m+n+1)-1$ 位, 也必须移 $m+1$ 步; n 位男士总共要移动 $n(m+1)$ 。

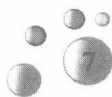
同样道理, 全体女士要移 $m(n+1)$ 步。

但是男女共要跳跃 mn 次, 跳跃本身算一次移动; 因为跳跃一次等于移动了二格, 所以每跳一次可以使移动总次数减少一次。于是总的移动次数为:

$$\begin{aligned} & n(m+1) + m(n+1) - mn \\ &= nm + n + mn + m - mn \\ &= mn + m + n \\ &= mn + m + n + 1 - 1 \\ &= (m+1)(n+1) - 1 \end{aligned}$$

证毕, 高老师深深地呼了一口气, 刚转身就发现吴婷婷同学举起了手……“高老师, 这道题还可以推广吗?”

“可以, 可以把它从一条线段推广到平面上, 如下面所示。再进



一步甚至可以推广到立体图形中,但移动的原理都是一样的。有兴趣的同学可以自己探究。”

1	1	1	1	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2
1	1	1	0	2	2	2
1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	2	2	2	2

第二章 一窥知全豹

第一节 一称知每盒佛珠规格

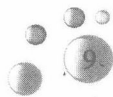
“今天上课我给大家讲一个故事：大唐长安元年，也就是公元701年，日本文武天皇派朝臣粟田真人（相当于尚书）进贡。武则天皇帝高兴地在麟德殿宴请他，并由宰相姚崇作陪。酒席上粟田说：‘贡品中有10盒玛瑙佛珠，其中1盒佛珠，每颗重2钱；其他9盒，每颗重1钱。请姚相称一次，指出哪盒佛珠是每颗重2钱的。’姚崇笑道：‘我回答对了怎么办？’‘愿在大唐为小吏。’结果，姚崇顺利解决了这道问题，粟田也被授为司膳卿。这件事使粟田认识到中华文明的博大精深，后来他把皇帝赏赐的东西都换成书籍，运回日本。

俗话说：管中窥豹，略见一斑。一次测量一般只能测出一个对象的一个数据。但姚崇怎么一次就能从10盒佛珠中找到那盒重的佛珠呢？萧慧满同学你说。”高老师由这个故事引入了新课。

“这……这不可能称一次就找到装2钱的盒子。用天平称一次最多只能从3颗佛珠中找到1颗重的佛珠……”

“如果不知道佛珠重多少钱，并且每盒只有一颗佛珠，萧慧满同学的观点成立。但现在不仅知道每种佛珠的重量，而且每盒佛珠都很多，利用这两个有利条件，称一次便可以找出装2钱佛珠的盒子。李世禄同学，你想到了吗？”

“我想在第1盒中取1颗，第2盒取2颗……第10盒取10颗佛珠。这样共取55颗佛珠。把总质量减55钱，得到的差为几，则第几



盒装的就是 2 钱的佛珠。”

“很好。李世禄同学的思路就是：不同的盒子取不同数量的佛珠，根据与标准质量相差值，求取出了多少颗 2 钱的佛珠，从而找出装 2 钱佛珠的盒子。下面我们把问题稍微拓展一下：有 10 盒佛珠，每盒佛珠的数量都足够多；10 盒佛珠有两种规格，或每颗 1 钱，或每颗 2 钱。要求称一次说出 10 盒中哪盒佛珠是每颗 1 钱的，哪盒佛珠是每颗 2 钱的。”

“老师，我知道。”

“好！赵桂玲同学请回答。”

“可以在第 1 盒取 1 颗佛珠，在第 2 盒取 10 颗佛珠，第 3 盒取 100 颗佛珠……第 10 盒取 10^9 颗佛珠一齐去称，称得质量是一个十位数。其中个位数上的数码表示第 1 盒中每颗佛珠的钱数，十位数码表示第 2 盒每颗钱数……十亿位数码表示第 10 盒每颗的钱数。”

“很好。因为每颗佛珠的钱数 a ，都是不大于 10 的自然数，取 10^k 个佛珠，它的质量就是 $10^k a$ 钱。因为 $10^{k-1} < 10^k a < 10^{k+1}$ ，所以第 k 盒每颗佛珠质量就等于称得数据中第 k 位数码的大小。在这里并不要求每颗佛珠只有 1 钱或 2 钱这两种情况，完全可以是 1~9 钱这九种情况……”

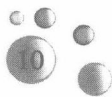
“高老师！”

“吴婷婷同学有什么问题？”

“老师，应该是每颗佛珠的质量可以是 1~10 钱！”

“刚刚我说得太绝对了，我向同学们道歉。吴婷婷能发现我的口误，说明她积极思考、善于动脑筋，大家应向她学习。下面请吴婷婷同学介绍一下她的做法。”

“假设有 10 盒佛珠，同一盒的佛珠规格相同，各盒佛珠的规格为每颗 1 钱到每颗 10 钱之间的自然数。现要求称一次，得出各盒佛珠的规格。方法是：第 1 盒取 1 颗佛珠；第 2 盒取 10 颗佛珠……第 10 盒取 10^9 颗佛珠。将这些佛珠称得的质量数减去 1111111111，得到数 N 。 N 的个位数码加 1 表示第 1 盒内每颗佛珠的钱数；十位数



码加 1 表示第 2 盒内每颗佛珠的钱数……”

“完全正确。下面我们根据‘吴婷婷思想’，把问题推广到 n 盒佛珠，每盒佛珠的规格（即盒内每颗的质量） a_k 为自然数，且 $1 \leq a_k \leq m$ 。要求只称一次就得到各盒佛珠的规格。简明道同学请回答。”

“有 n 盒佛珠，同一盒的佛珠规格相同，各盒佛珠的规格 a_k 为自然数，且 $1 \leq a_k \leq m$ 。现要求称一次，得出各盒佛珠规格 a_k 的值。

方法是：第 1 盒取 1 颗佛珠；第 2 盒取 m 颗佛珠……第 n 盒取 m^{n-1} 颗佛珠。将这些佛珠放在一块儿去称，把称得结果减佛珠的总颗数，得到数 N 。 N 除以 m 得到 N_1 ，而余数就是 $a_1 - 1$ ； N_1 除以 m 得 N_2 ，其余数就是 $a_2 - 1$ ……

这种方法的理由如下：如果第 k 盒佛珠每颗的钱数是 a_k 的话，第 k 盒取出的佛珠总质量为 $m^{k-1} a_k$ ，全部取出的佛珠质量共 $N_0 = m^0 a_1 + m^1 a_2 + m^2 a_3 + \cdots + m^{n-1} a_n$ 钱。把 N_0 减去取出的佛珠的颗数 $m^0 + m^1 + m^2 + \cdots + m^{n-1}$ 后得到：

$$N = (a_1 - 1)m^0 + (a_2 - 1)m^1 + (a_3 - 1)m^2 + \cdots + (a_n - 1)m^{n-1}$$

钱。

因为 $(a_1 - 1), (a_2 - 1), (a_3 - 1), \cdots, (a_n - 1)$ 是小于 m 的自然数，所以 N 除以 m 得 N_1 ，余数为 $a_1 - 1$ ； N_1 除以 m 得 N_2 ，余数为 $a_2 - 1$ ；等等。显然只要称一次就可以知道每盒佛珠的规格了。”

“非常好。当 m 为 10 时，我们可以用 10 进制数的各位数码加 1 表示每盒佛珠的规格；当 m 不等于 10 时，我们同样可以用 m 进制数的各位数码加 1 表示每盒佛珠的规格。简明道同学累次除以 m ，实际上就是求 m 进制数各位的数码而已。现在大家再想一想，简明道刚刚提出的方法，能不能再次推广呢？”

“不能！”魏思敏同学大声回答。

“其实还可把问题再深化一步：如果佛珠的规格不是 1~10 钱，而是 0.6、0.8 和 1.2 钱呢？萧慧满同学回答。”

“可以从第 1 盒取 1 颗，第 2 盒取 13 颗……第 10 盒取 13^9 颗。把称得的总数乘以 10，这数码为 6 的，规格就是 0.6 钱……”

