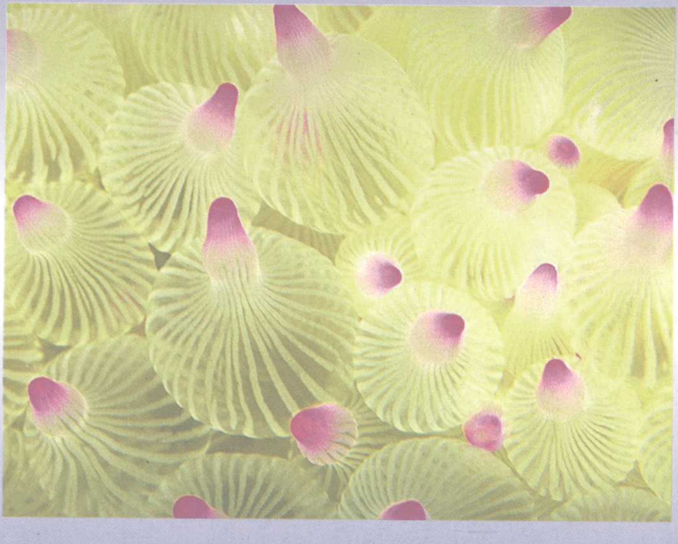
北京市成人高中试用教材

数学

上

SHUXUE

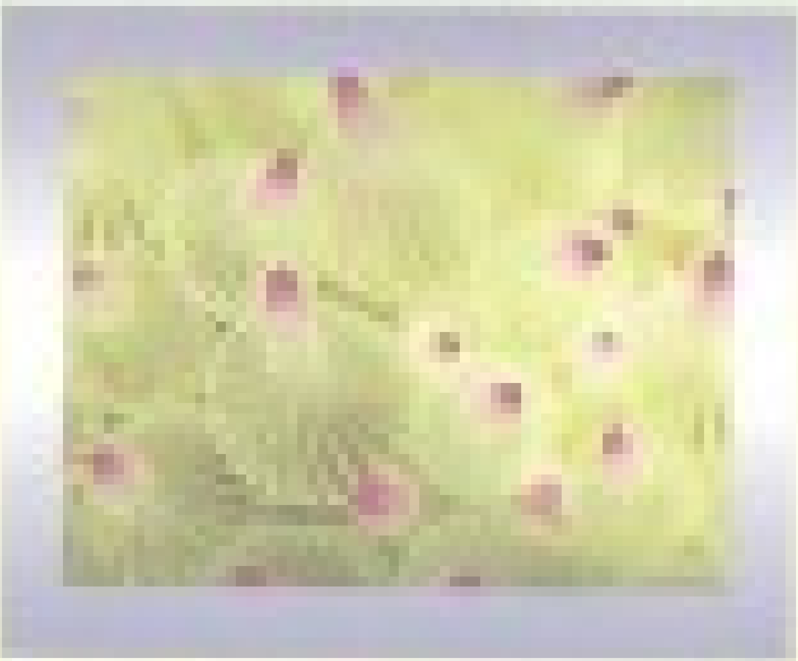
北京市教育委员会成人教育处　组编



北京工业大学出版社

北京市成人高中试用教材

数学



北京工业大学出版社

北京市成人高中试用教材

数　学

（上册）

北京市教育委员会成人教育处　组编

北京工业大学出版社

北京市成人高中试用教材

数　　学

（下册）

北京市教育委员会成人教育处　组编

北京工业大学出版社

出版说明

为落实北京市教委在《首都市民素质培训工程》中提出的对企事业单位的在职人员进行相当于高中阶段文化水平的教育培训、使多数人达到高中阶段以上文化程度的任务，根据国家教委成人教育司1992年颁发的《成人高级中学数学教学大纲》的要求，我们组织编写了这套《北京市成人高级中学数学课本》供成人高级中学使用。

这套数学教材分上、下两册。上册包括代数部分和立体几何部分，总学时约为158课时；下册包括三角函数部分和解析几何部分，总学时约为112课时。

在编写本书时，既体现了数学学科的系统性，又注意到成人学习的特点，教学内容力求简明扼要，重点突出；在讲授知识时，注意有计划、有针对性地复习初中的知识；在确保达到《教学大纲》水平的基础上，降低了习题难度和部分推理论证的要求，并配备了全部习题答案，便于学员自学。

参加教材编写的人员有：张学忠、何引、王君、陈泰康，还有徐培成、张明、张铁、赵宝生。全书由张学忠、王君统稿。

另外，在本书的编写过程中，北京市成人中等学校的部分数学教师曾提出宝贵意见和建议，在此向他们表示感谢。由于编写仓促与经验不足，本书难免存在一些错误与不足，恳请各位老师与学员对本书提出宝贵意见，批评指正。

北京教育科学研究院
成人教育教学研究中心
1998年1月

前　言

为适应我市成人教育的发展，提高成人高中的教学质量。我们委托北京教育科学研究院成人教育教学研究中心在调查我市成人高中教学情况，听取对现行教材使用意见的基础上，拟定了各科教材的编写方案，编写了这套北京市成人高中文化课教材。

新教材力求贯彻成人高中的培养目标，适合成人高中的教学实际，努力提高成人高中学员的文化素养，为进一步学习和工作打下良好的基础。本套教材的编写得到了有关部门和学校的大力支持。

这套教材（包括课本和教学参考书）已列入北京市教委成人教育、职业教育教材建设规划，将于1998年秋季陆续供应。希望各校在使用教材过程中提出宝贵意见，以便进一步修改和完善。

北京市教育委员会成人教育处

1997年12月

目　　录

代 数 部 分

立体几何部分

代 数 部 分

预 备 知 识

1. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

只要把 a、b、c 的值代入以上公式，即可求出原方程的根.

2. 一元二次方程根的判别式

根的判别式　$\Delta=b^2-4ac$

利用根的判别式，不解方程可以判别方程根的情况：

（1）当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

（2）当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a};$$

（3）当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根.

利用根的判别式，不解方程可以判别方程根的情况，并且可以根据方程根的情况确定方程中未知系数的取值范围.

例 1　不解方程，判断下列方程根的情况：

（1）$2x^2+3x-4=0$；　　　（2）$3x^2+5=4x$；

（3）$4x^2-4x+1=0$.

解　（1）　$\because$　$\Delta=3^2-4\times2\times(-4)=41>0$，

∴　原方程有两个不相等的实数根；

(2) 移项，得 $3x^2-4x+5=0$，

∵　$\Delta=(-4)^2-4\times3\times5=-44<0$，

∴　原方程没有实数根；

(3) ∵　$\Delta=(-4)^2-4\times4\times1=0$，

∴　原方程有两个相等的实数根.

例 2　当 m 取什么值时，方程 $y^2-(2m+1)y+m^2+1=0$

(1) 有两个不相等的实数根；(2) 没有实数根；(3) 有两个相等的实数根.

解　$\Delta=[-(2m+1)]^2-4\times1\times(m^2+1)=4m-3$.

(1) 当 $\Delta=4m-3>0$，即 $m>\frac{3}{4}$ 时，方程有两个不相等的实数根；

(2) 当 $\Delta=4m-3<0$，即 $m<\frac{3}{4}$ 时，方程没有实数根；

(3) 当 $\Delta=4m-3=0$，即 $m=\frac{3}{4}$ 时，方程有两个相等的实数根.

3. 一元二次方程根与系数的关系

如果方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$) 的两个根是 x_1，x_2，那么

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

利用一元二次方程根与系数的关系，不解方程可以求出这个方程两根的和与两根的积；可以已知方程的一个根，求方程的另一个根与方程中某一项的系数；还能根据方程的根，把这个方程写出来.

例 3　设 x_1，x_2 是方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两个根，不解方程求下列各式的值：

(1) $x_1^2+x_2^2$；　　(2) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

解 由根与系数关系，得

$$x_1+x_2=-\frac{3}{2},\qquad x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2}.$$

(1) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{4};$$

(2) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}=\dfrac{-\dfrac{3}{2}}{-\dfrac{1}{2}}=3.$

例 4 已知方程 $5y^2+my-6=0$ 的一个根是2,求它的另一个根和 m 的值.

解 设方程的另一个根为 y_1，那么

$$\begin{cases}2+y_1=-\dfrac{m}{5},\\[2ex]2\cdot y_1=-\dfrac{6}{5}.\end{cases}$$

解以上方程组，得

$$\begin{cases}y_1=-\dfrac{3}{5},\\[2ex]m=-7.\end{cases}$$

例 5 求作一个一元二次方程，使它的两个根是 2 和 -3.

解 设所求的方程为 $x^2+px+g=0$.

由根与系数关系，得

$$2+(-3)=-p,\quad 即\quad p=1,$$

$$2\cdot(-3)=q,\quad 即\quad q=-6.$$

故 $x^2+x-6=0$ 为所求的方程.

习　题

1. 不解方程，判别下列方程根的情况：

(1) $2x^2-4x+5=0$; (2) $4x(x+1)+1=0$;

(3) $x^2-6x+3=0$.

2. m 取什么值时，方程 $x^2+2mx+(m-2)^2=0$

(1) 有两个不相等的实数根；(2) 有两个相等的实数根；

(3) 没有实数根.

3. 如果 -5 是方程 $5x^2+bx-10=0$ 的一个根，求方程的另一个根及 b 的值.

4. 设 x_1，x_2 是方程 $2x^2-6x+3=0$ 的两个根，不解方程求下列各式的值：

(1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; (2) $(x_1+1)(x_2+1)$;

(3) $x_1x_2^2+x_1^2x_2$.

5. 不解方程，求作一个一元二次方程，使它的根是方程 $x^2+px+q=0$ 各根的 k 倍.

6. 已知方程 $2x^2+4x+m=0$ 的两根的平方和是 5，求 m 的值.

习题答案与提示

1. (1) $\Delta<0$，方程没有实数根；(2) $\Delta=0$，方程有两个相等的实数根；(3) $\Delta>0$，方程有两个不相等的实数根.

2. (1) $m>1$；(2) $m=1$；(3) $m<1$.

3. 另一根为 $\frac{2}{5}$，b 为 23.

4. (1) 2；(2) $\frac{11}{2}$；(3) $\frac{9}{2}$.

5. $x^2+pkx+k^2q=0$.

6. $m=-1$.

第一章　集合与简易逻辑

一　集合

1.1　集合

1. 集合的概念

在初中数学中，我们已接触过“集合”一词. 在学习数的分类时，就用到“正数的集合”，“负数的集合”等. 在解一元一次不等式时，我们把满足不等式解的集合，简称为不等式的解集. 在学习平面几何时，说圆是到定点的距离等于定长的点的集合，几何图形都可以看成是点的集合等.

一般地，某些具有共同特征的对象集在一起就成为一个**集合**，简称**集**. 集合中的每个对象叫做这个集合的**元素**.

我们常用大写拉丁字母 A，B，C，……表示集合，用小写拉丁字母 a，b，c，……表示集合中的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就说元素 $\boldsymbol{a}$ **属于集合** $\boldsymbol{A}$，记作 $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A}$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 $\boldsymbol{a}$ **不属于集合** $\boldsymbol{A}$，记作 $\boldsymbol{a}\notin\boldsymbol{A}$（**或** $\boldsymbol{a}\overline{\in}\boldsymbol{A}$）.

例如，集合 A 是由数字 2，3，4 组成的集合，那么

$2\in A$，$3\in A$，$4\in A$，而 $0\notin A$.

如果一个集合含有有限个元素，这样的集合叫做**有限集**；如果一个集合含有无限多个元素，这样的集合叫做**无限集**. 由所有的直角三角形形成的集合就是一个无限集.

只含有一个元素的集合叫做**单元素集**；不含有任何元素的集合叫做**空集**，用符号“$\varnothing$”表示.

2. 集合的表示法

我们常用列举法和描述法来表示集合.

列举法是把集合中的元素一一列举出来，写在大括号{ }内. 例如，集合 A 是由太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋组成的集合，可表示为 $A=$ {太平洋，大西洋，印度洋，北冰洋}. 再例如，方程 $x^2-2x-8=0$ 的解组成的集合可表示为 $\{4, -2\}$. 由元素 a 组成的单元素集可表示为 $\{a\}$.

描述法是把集合中元素所具有的共同属性描述出来，写在大括号 { } 内. 例如，不等式 $3x-6>0$ 的解集可表示为 $\{x\in\mathbf{R} \mid 3x-6>0\}$.

二元一次方程 $2x-y=1$ 的解集表示为 $\{(x,y) \mid 2x-y=1\}$.

用描述法表示集合时，大括号内竖线的左边写集合中的元素，右边写这些元素所具有的共同属性. 在不引起混淆的情况下，有些集合用描述法表示，可以省略掉竖线以左部分. 例如，所有直角三角形组成的集合可表示为 {直角三角形}.

3. 集合中元素的性质

(1) 集合中的元素必须是确定的. 这就是说，给定一个集合，任何一个对象是不是这个集合的元素也就确定了. 例如，身体不胖不瘦的人就不能组成一个集合，因为组成它的对象是不确定的.

(2) 集合中的元素是互异的. 这就是说，集合中的元素没有重复现象，两个相同的对象在一个集合中，只能算作这个集合的一个元素.

(3) 集合中的元素无顺序性. 就是说，只要集合中的元素相同，就认为是同一集合. 例如，$\{2, 3\}$ 与 $\{3, 2\}$ 表示同一集合.

4. 常用数集及其记法

全体自然数的集合通常简称**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$.

全体整数的集合通常简称**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$.

全体有理数的集合通常简称**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$.

全体实数的集合通常简称**实数集**，记作 $\mathbf{R}$.

习 题 1.1

1. 用列举法写出下列集合的所有元素：

   (1) {大于 2 而小于 6 的自然数}；

   (2) $\{x\in \mathrm{Z} \mid -2.5<x<+0.5\}$；

   (3) {一年中有 30 天的月份}.

2. 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

   1 __ N；0 __ N，-2 __ N，$\frac{1}{2}$ __ N，$\sqrt{2}$ __ N；

   1 __ Z，0 __ Z，-2 __ Z，$\frac{1}{2}$ __ Z，$\sqrt{2}$ __ Z；

   1 __ **Q**，0 __ **Q**，-2 __ **Q**，$\frac{1}{2}$ __ **Q**，$\sqrt{2}$ __ **Q**；

   1 __ R，0 __ R，-2 __ R，$\frac{1}{2}$ __ R，$\sqrt{2}$ __ R；

3. 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

   (1) 若 $A=\{x \mid x^2=x\}$，则 0 __ A，-1 __ A；

   (2) 若 $B=\{x \mid x^2+x-6=0\}$，则 3 __ B，-3 __ B；

   (3) 若 $C=\{x\in \mathrm{N} \mid -1\leqslant x<2\}$，则 -1 __ C，2 __ C；

   (4) 若 $D=\{x\in \mathrm{Z} \mid -2\leqslant x<3\}$，则 1.5 __ D，-1 __ D.

4. 分别用描述法和列举法写出方程 $x^2-3x-10=0$ 的解的集合.

5. 指出 a，$\{a\}$，0，$\{0\}$，$\{x\in \mathbf{R} \mid x^2+1=0\}$ 中哪些是元素？哪些是集合？它们各是是什么集合？

1.2 子集、补集

1. 子集

集合与集合之间，存在着“包含”与“相等”的关系.

先看集合与集合之间的“包含”关系.设

$$A=\{1,2,3\}, B=\{1,2,3,4,5\}.$$

显然，集合 A 是集合 B 的一部分，我们就说集合 B 包含集合

A，或说集合 A 包含于集合 B.

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们就说**集合 A 包含于集合 B**，或**集合 B 包含集合 A**，记作

$$\boldsymbol{A \subseteq B} \quad (\text{或 } \boldsymbol{B \supseteq A}).$$

这时我们称集合 A 是集合 B 的**子集**.

对于任何一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于集合 A，所以 $A \subseteq A$.

我们规定：**空集是任何集合的子集**. 也就是说，对于任何一个集合 A，有 $\varnothing \subseteq A$.

例 1 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集.

解 $\{a, b, c\}$ 的所有子集是：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{b, c\}$，$\{a, b, c\}$.

当集合 A 不包含于集合 B，或集合 B 不包含集合 A 时，则记作 $A \nsubseteq B$（或 $B \nsupseteq A$）.

再看集合与集合之间的“相等”关系. 设

$$A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}, B = \{-1, 1\}.$$

显然，集合 A 与集合 B 的元素是相同的.

一般地，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，我们就说**集合 A 等于集合 B**，记作

$$\boldsymbol{A = B}.$$

对于集合 A，B，如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，那么 $A = B$.

2. 真子集

对于两个集合 A 与 B，如果 $A \subseteq B$，并且 $A \neq B$，我们就说集合 A 是集合 B 的**真子集**，记作 $\boldsymbol{A \subset B}$ （**或 $\boldsymbol{B \supset A}$**）.

用图形表示如图 1-1.

显然，空集是任何非空集合的真子集.

例 1 中，集合 $\{a, b, c\}$ 的真子集是 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{b, c\}$.

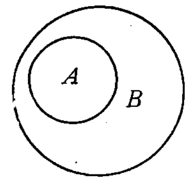


图 1-1

对于集合 A，B，C，如果 $A \subset B$，$B \subset C$，那么 $A \subset C$.

对于常见数集 $\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$，有 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

3. 补集

设 Ω 是全班同学的集合，A 是全班男同学的集合，B 是全班女同学的集合. 那么集合 B 是集合 Ω 中除去集合 A 之后余下来同学的集合.

一般地，设集合 A 是集合 S 的一个子集，即 $A \subseteq S$，由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中子集 A 的补集（或余集），记作 $\complement_S A$，即 $\complement_S \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$，且 $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}\}$. 如图 1-2 中的阴影部分.

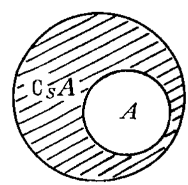


图 1-2

例 2 设 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$A = \{1, 3, 5\}$，求 $\complement_S A$.

解 $A \subseteq S$，

$$\complement_S A = \{2, 4\}.$$

如果一个集合含有我们所要研究的各个集合的全部元素，我们就把这个集合看作是一个**全集**，通常用 Ω 表示.

例如，在实数范围内讨论问题时，我们把实数集 $\mathbf{R}$ 看作全集 Ω，那么有理数集 $\mathbf{Q}$ 的补集 $\complement_\Omega \mathbf{Q}$ 就是无理数的集合.

习 题 1.2

1. 写出集合 $\{0, 1, 2\}$ 的所有的子集，并指出其中哪些是它的真子集.