GAODENG SHUXUE

高等数学

（上册）

姜 永 陈绩馨 编著

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

GAODENG SHUXUE

高等数学

（上册）

姜　永　陈绩馨　编著

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/姜永、陈绩馨编著．—厦门:厦门大学出版社，2005.8

ISBN 7-5615-2449-8

Ⅰ.高…　Ⅱ.①姜…②陈…　Ⅲ.高等数学-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 076342 号

厦门大学出版社出版发行

(地址:厦门大学　邮编:361005)

http://www.xmupress.com

xmup@public.xm.fj.cn

南平市武夷美彩印中心印刷

2005 年 9 月第 1 版　2005 年 9 月第 1 次印刷

开本:850×1168　1/32　印张:15　插页:2

字数:400 千字　印数:0001～8000 册

定价:26.00 元

内容提要

本书分为上、下两册，共 13 章，上册 7 章，下册 6 章. 上册内容包括函数、极限和连续，导数与微分，微分学的基本定理和导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，微分方程. 书末附有习题参考答案.

前 言

高等数学作为高等院校各专业的一门基础课，其重要性不言而喻. 本书是根据高等数学教学发展的需要，结合多年的数学教学实践经验编写成. 本书对高等数学的基本概念、基本理论和基本方法的阐述力求严谨简明、详略适当，同时突出其应用性. 随着计算机技术的飞速发展，数学教学与计算机技术和软件的结合日益密切. 本书在最后一章引入了 MATLAB 数学软件，简要介绍了数值计算在 MATLAB 的实现过程. 一方面让学生学习基本的数值计算的算法、初步学习了解 MATLAB 进行各种运算、绘制图形等一些基本功能，另一方面也使学生初步掌握利用数学知识和计算机软件解决实际问题的方法.

本书分为上、下两册，共 13 章，上册 7 章，下册 6 章. 本书每节后附有习题，每章后另附有测试题，供读者自我检查.

本书内容覆盖面比较广，可作为高等院校非数学类各专业学生的教材，教师可根据不同专业特点进行取舍.

本书由姜永、陈绩馨编写. 姜永负责第四、五、六、七、十一、十二、十三章的编写和下册的统稿. 陈绩馨负责第一、二、三、八、九、十章的编写和上册的统稿.

在本书的编写过程中，陈同英教授，张朝阳、温永仙副教授和李德新老师提供了许多宝贵意见和建议，在此谨表诚挚的谢意.

编者才疏学浅，不足之处在所难免. 敬请使用本书的教师和读者们不吝批评指正.

编 者

2005 年 仲夏

目　录

第一章 函数、极限和连续

高等数学是以变量为研究对象的科学. 在中学数学课程中，我们已经学习过常量、变量以及变量之间的依赖关系的函数. 在学习了这些知识的基础上，我们进一步来研究极限与连续. 本章将介绍极限的概念、性质及运算法则，无穷小与无穷大的概念和性质，两个重要极限，无穷小的比较，函数的连续性概念及闭区间上连续函数的性质.

§1.1 函数

一、函数的概念

在客观世界中，往往同时有几个变量共同变化着，但这几个变量并不是孤立地在变化，而是相互联系，遵循一定的规律变化着. 如图1-1，在 O 处有一个质点，起始时刻是静止的，在重力的作用下开始下落，设经过时间 t 后它落到 P 点，下落的距离 $s=|OP|$，显然 s 由 t 唯一确定，且随 t 的变化而变化. 经过两个世纪左右的探索，伽利略先是猜想，后通过做小球在斜板上滚动的实验，确定了

$$s=ct^2,$$

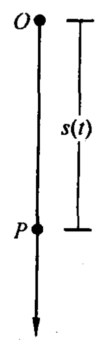

图 1-1

其中 c 是一个常数，对在同一地点自接近地球表面的真空中下落的一切物体具有相同的值. 经过精确的实验，测得 c

$=\frac{1}{2}g$，其中 $g\approx 9.81$ 米/秒^2，它表示重力作用下自由落体的加速度，所以

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

这里 $t\geqslant 0, s\geqslant 0$，$s$ 与 t 之间的关系就是函数关系. 现在我们来给出函数的定义.

定义 1 设有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有一个确定的数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，数集 D 称为函数的**定义域**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.

定义中的 f 反映自变量 x 与因变量 y 的对应法则，对应法则还可以用 F、g、φ、h 等记号表示，这时的函数就分别记为 $F(x)$、$g(x)$、$\varphi(x)$、$h(x)$等. 有时为简化符号，也将 y 是 x 的函数记为 $y=y(x)$，等号左边的 y 是因变量，等号右边的 y 是对应法则.

对于自变量 x 在定义域内所取的一个值，因变量 y 有且只有一个值与它对应，这类函数称为**单值函数**. 我们还会遇到另一种情况，即当自变量 x 在定义域内任取一个确定的值时，因变量 y 有多个值与它对应，这类函数称为**多值函数**.

例如，$y=\arcsin x$ 是多值函数，而规定 $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时 $y=\arcsin x$就变成了单值函数.

以后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数.

1. 值域

若自变量 x 取某一数值 x_0 时，函数 $y=f(x)$有确定的值与它对应，则称**函数在 x_0 有定义**. 当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 的**函数值**，记为

$$f(x_0)、y|_{x=x_0} \text{或 } y_0.$$

当 x 取遍 D 的每一个数值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$W=\{y\,|\,y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

2. 确定函数的要素

函数定义中涉及定义域 D、对应法则 f 和值域 W. 若定义域 D 和对应法则 f 确定了，则这个函数的值域 W 就确定了，因此定义域 D 和对应法则 f 是确定函数的两个要素. 当两个函数的定义域和对应法则相同时，这两个函数就是相同的，至于自变量和因变量用什么字母表示是无关紧要的，例如，$y=2x+1$ 与 $z=2t+1$ 是相同的函数；而 $f(x)=2\lg x$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 的函数关系，$g(x)=\lg x^2$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 的函数关系，因此 $f(x)=2\lg x$ 与 $g(x)=\lg x^2$ 是定义域不同的两个不同的函数.

3. 函数定义域的确定

在实际问题中，函数的定义域就是使实际问题有意义的自变量的值的全体. 如在图 1-1 所示例中，设质点落地的时刻为 T，则 s 与 t 的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

它的定义域为 $[0,T]$.

在数学问题中，函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的值的全体. 例如，函数 $f(x)=\lg(1-x)$ 的定义域是 $D=(-\infty,1)$，$f(x)=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-1}+\ln(x+3)$ 的定义域是 $D=(-3,1)\cup(1,4]$.

4. 邻域

为了阐述函数的局部性态，还经常用到邻域的概念，它是由某点附近的所有点组成的集合.

设 a 是任一实数，以点 a 为中心的任何一个开区间称为点 a 的**一个邻域**，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 是点 a 的一个邻域（如图 1-2），称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，点 a 称为该**邻域的中心**，δ 称为该**邻域的半径**. 所以

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$
$$=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

它表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

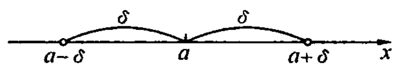

图 1-2

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉.

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的**去心 δ 邻域**,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$. 所以

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

这里 $0<|x-a|$就表示 $x\neq a$.

为了说明函数在点的一侧附近的情况,还要用到左、右邻域的概念.

开区间$(a-\delta,a)$称为点 a 的**左 δ 邻域**,$(a,a+\delta)$称为点 a 的**右 δ 邻域**,a 的任意一个左(右)δ 邻域简称为 a 的**左(右)邻域**.

5. 函数的表示法

表示函数的方法通常有三种:图像法、列表法、解析法. 用得较多的是解析法. 除此以外,有时还直接用语句来反映一个函数. 用解析法表示函数也是多种多样的,如分段表示法、参数表示法和方程表示法等等.

下面着重介绍一下分段函数. 例如:函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$(见图 1-3)称为**绝对值函数**,表示当 x 取不同区间内的数值时函数用不同的式子来表示. 当 $x=1>0$ 时,由 $f(x)=x$ 计算得到 $f(1)=1$;当 $x=-2<0$ 时,由 $f(x)=-x$ 计算得到 $f(-2)=2$. 像这样的一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围中对应法则用不同式子来表示的函数,通常称为**分段函数**.

例 1 函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0\\ 0, & \text{当 } x=0\\ -1, & \text{当 } x<0\end{cases}$ 称为**符号函数**. 它