

高等院校物理学教材



大气湍流

刘式达 梁福明 刘式适 辛国君 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

大气湍流

刘式达 梁福明 刘式适 辛国君 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

大气湍流/刘式达等编著. —北京:北京大学出版社, 2008. 6
ISBN 978-7-301-11201-4

I. 大… II. 刘… III. 大气湍流-研究生-教材 IV. P421.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 129030 号

书 名: 大气湍流

著作责任者: 刘式达 梁福明 刘式适 辛国君 编著

责任编辑: 顾卫宇

标准书号: ISBN 978-7-301-11201-4/O · 0705

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 电子邮箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021
出版部 62754962

印 刷 者: 世界知识印刷厂

经 销 者: 新华书店

850 mm × 1168 mm A5 6.375 印张 183 千字

2008 年 6 月第 1 版 2008 年 6 月第 1 次印刷

印 数: 0001—3000 册

定 价: 14.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:010-62752024 电子邮箱:fd@pup.pku.edu.cn

内 容 简 介

本书是作者多年来从事“大气湍流”研究生教学课程的结晶。共分十章,叙述简洁,既介绍传统的统计方法,更着重介绍近代对湍流新认识的科学概念和工具,如混沌、分形和标度律、孤波、子波、螺旋度、异常扩散、Euler 示性数等,以从不同的角度共同认识物理学中最复杂的湍流现象。本书强调大气湍流应是内在随机性和有序结构两者的统一;从大气湍流方程组中既可以得到描述内在随机性——混沌的方程,也可以得到描述大气三维螺旋结构的方程。读者应侧重了解对大气湍流认识的最新概念和科学思想。通过阅读本书,可起到对湍流深入研究的引导作用。

本书可作为研究生教学参考书,也可供对湍流有兴趣的读者参考。

目 录

第一章 湍流是什么	(1)
§ 1 Reynold 实验	(1)
§ 2 混沌	(2)
§ 3 大气湍流的特点	(3)
§ 4 湍流的本质——非线性	(4)
§ 5 确定性还是随机性	(4)
§ 6 研究湍流的方法	(5)
§ 7 解释湍流发生问题的困难	(6)
§ 8 湍流的自由度	(9)
第二章 大气湍流方程组	(11)
§ 1 大气运动方程组	(11)
§ 2 分层流的大气运动	(12)
§ 3 大气运动方程组无因次形式	(13)
§ 4 五个参数的物理意义	(15)
§ 5 描述大气对流和湍流的简单模型	(16)
§ 6 描述热对流三维螺旋结构的简化模型	(19)
§ 7 Reynold 平均运动方程及其应用	(24)
§ 8 湍流动能、位温方差方程 黏性耗散	(28)
第三章 湍流的统计描述	(30)
§ 1 各向同性和各态历经	(30)
§ 2 概率密度	(32)
§ 3 偏斜度和陡峭度	(34)
§ 4 特征函数、Levy 分布	(36)
§ 5 自相关函数和功率谱	(38)

§ 6	自组织临界性和 $1/f$ 噪声	(44)
§ 7	分数维布朗运动	(45)
§ 8	尺度和分数维	(47)
第四章	湍流的 Kolmogorov 理论及标度不变性	(50)
§ 1	Kolmogorov 思想	(50)
§ 2	2 阶结构函数的“ $2/3$ 次方”定律	(51)
§ 3	3 阶结构函数 $S_3(r)$ 的“ $-4/5$ ”定律	(52)
§ 4	速度差的概率密度分布 $p(\Delta v(r))$	(53)
§ 5	能谱的“ $-5/3$ 次方”定律	(54)
§ 6	Richardson 扩散的“ 3 次方”定律	(56)
§ 7	q 阶结构函数的标度指数	(57)
§ 8	多分形	(60)
§ 9	间歇湍流的 β 模型	(64)
§ 10	She 湍流模型	(65)
§ 11	p 模型	(68)
§ 12	N-S 方程中的标度不变性	(69)
§ 13	壳模型	(71)
第五章	孤波、子波和湍流	(73)
§ 1	三者的关系	(73)
§ 2	速度场的奇点	(74)
§ 3	同(异)宿轨道	(78)
§ 4	重要的非线性演化方程的物理	(82)
§ 5	演化方程的孤立波解	(86)
§ 6	子波是孤波	(100)
§ 7	孤波和湍流	(102)
第六章	湍流运动的结构	(107)
§ 1	湍流是有结构的	(107)
§ 2	湍流涡管	(108)
§ 3	湍流产生的机理	(111)
§ 4	螺旋度	(113)

§ 5 大气涡旋场的拓扑结构	(116)
第七章 与湍流和大气运动有关的拓扑	(127)
§ 1 Euler 示性数	(127)
§ 2 由风创立的涡旋	(130)
§ 3 奇点的指数	(132)
§ 4 Euler 示性数和奇点的指数的关系	(135)
§ 5 环绕数、扭曲数、盘绕数	(137)
§ 6 奇怪吸引子	(140)
第八章 湍流的分析工具——子波变换	(143)
§ 1 子波变换是显微镜	(143)
§ 2 子波变换的尺度自相似性	(144)
§ 3 子波变换解出 t_0 处信号的突变性	(145)
§ 4 湍流序列的分解	(147)
§ 5 二维建筑块	(150)
§ 6 傅里叶变换研究湍流的缺陷	(154)
§ 7 子波变换的模最大值方法	(157)
§ 8 多尺度系统的映射关系	(159)
§ 9 从子波变换建立映射	(163)
第九章 近地面层大气湍流	(166)
§ 1 近地面层的基本特点	(166)
§ 2 Π 定理和通量廓线关系	(167)
§ 3 湍流动能平衡方程的无因次形式	(170)
§ 4 湍流交换系数和 φ_m 的关系	(172)
§ 5 Keyps 方程	(172)
§ 6 湍流的发生判据	(175)
§ 7 σ_w/u_* 和 z/L 的关系	(175)
§ 8 能谱和结构函数	(178)
§ 9 大气边界层的湍流结构	(181)

第十章 大气扩散	(185)
§ 1 扩散是湍流的表现	(185)
§ 2 大气扩散方程的解	(188)
§ 3 湍流边界层中的扩散	(190)
§ 4 异常扩散	(191)
§ 5 分数 FPK 方程	(193)

第一章 湍流是什么

§ 1 Reynold 实验

一提起湍流(turbulence),首先给人们以杂乱无章的感觉.湍流的提出,首先是在1883年的Reynold实验.一个长而直的玻璃圆管,将水从左端流入管中,并仔细地不使玻璃管受到震动,为了清楚地观察水在玻璃管中流动的状况,管的入口处注入的水流中含一股染色的细流.实验发现,如果使管中的水流动足够慢,带颜色的细流由入口处到圆管右端出口维持一完整的直线,从玻璃管外看见带颜色的细流顺流而下,颜色并不增宽.但是,如果水的流动速度增大,并超过某一数值,带颜色的细流很快就断裂,明显地与周围未着色的水流混合,到下游时玻璃管中的水已变成淡的颜色,再也分不出带有颜色的细流了;带颜色的细流和周围水混合是很不规则,随机的,因此Reynold称为湍流(turbulent flow),而未相混合的细流称为层流(laminar flow).

Reynold还找到了由层流状态转变成湍流状态的判据——Reynold数

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad (1.1)$$

其中, L 是运动的尺度,在Reynold实验中就是圆管的直径, U 是水流速度, ν 是分子动力学黏性系数,其量纲为 $\frac{[L]^2}{[T]}$.由于惯性力 $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ 的量纲为 $\frac{[L]}{[T]^2}$,黏性力 $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$ 的量纲是 $\frac{[L]}{[T]} \cdot \frac{[L]}{[L]^2} = \frac{[L]}{[T]^2}$,所以Reynold数 Re 代表惯性力与黏性力之比,即

$$Re = \frac{d\mathbf{v}/dt}{\nu \nabla^2 \mathbf{v}} = \frac{\text{惯性力}}{\text{黏性力}}. \quad (1.2)$$

实验表明,当 $Re < 2000$ 时流体运动是层流,当 $Re > 2000$ 时流体运动是湍流,数值 2000 是临界 Reynold 数。

§ 2 混 沌

自 Reynold 实验以来,许多科学家对湍流进行了持续不断地研究,但湍流是什么?它是如何发生的?黏性流体的 Navier-Stokes 方程能否描述湍流?这些问题仍然没有多大的进展.但是在 Reynold 实验 80 年后,即 1963 年,美国气象学家 Lorenz 依据下列三个确定的方程

$$\begin{cases} \dot{x} = -Prx + Pry, \\ \dot{y} = Rax - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中, Ra 是 Rayleigh 数, Pr 是 Prandtl 数, b 是常数,取 $Pr=10, b=8/3$,当 $Ra > 24.74$ 时发现出现了非周期的随机现象(称为混沌)。

这样一个有限维(三维)确定的动力系统都可以出现像湍流那样的随机结果,那么对流体力学无穷动力系统——Navier-Stokes 方程(以下简称 N-S 方程)出现湍流也就是很自然的事了.所以许多科学家相信,用确定的动力系统(包括 N-S 方程)来研究湍流有了希望.以 N-S 方程为例:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1.4)$$

从物理上 N-S 方程也可写成

$$u_{t+1} - u_t = 1 - 2u_t^2 - u_t. \quad (1.5)$$

(1.4)式左端第一项为局地变化项,从物理上可以用两个不同时刻的速度差 $u_{t+1} - u_t$ 来代替,左端第二项是非线性平流项,它和右端第一项,即气压梯度力项一起,可以用二次非线性 $1 - 2u_t^2$ 来代替,右端第二项是黏性力项,它可以用线性项 $-u_t$ 代替,见(1.5)式。

(1.5)式就是一个抛物线映射(map):

$$u_{t+1} = 1 - 2u_t^2, \quad (1.6)$$

它是产生混沌(chaos)的典型例子.

§ 3 大气湍流的特点

大气和一般流体之不同之处有三点:

1. 大气处于旋转的地球上,因此所有大气运动(包括湍流)必须考虑科里奥利力(Coriolis force)的重要作用.一般将惯性力(其量纲为 $\frac{[L]}{[T]^2}$)和科里奥利力(量纲为 $\frac{[L]}{[T]^2}$)之比

$$Ro = \frac{dv/dt}{fv} = \frac{\text{惯性力}}{\text{科里奥利力}} \quad (1.7)$$

称为 Rossby 数. Rossby 数愈小,说明科里奥利力愈重要.

2. 大气的温度、压力、密度、速度都是随高度变化的,即大气是分层的(stratified),属于地球流体.由于白天和晚上大气平均位温 $\bar{\theta}$ 随高度变化不同,而造成湍流状况不同.在白天大气边界层内 $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$ 的数值(绝对值)超过绝热(过程)递减率 $\frac{d\bar{T}}{dz} = -0.98 \text{ K}/100 \text{ m}$ 的数值,使得 $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} < 0$,即大气处于不稳定状态(在流体力学上 $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} > 0$ 为不稳定, $\bar{\rho}$ 是平均密度),湍流很强;而晚上大气边界层内 $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$ 数值小于绝热递减率,甚至出现 $\bar{T}$ 随高度增加(逆温层),使得 $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} > 0$,即大气处于稳定状态(在流体力学中 $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} < 0$ 为稳定),湍流较弱,常常波和湍流间歇出现.为此常用 Richardson 数

$$Ri = \frac{\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2} = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2} \quad (1.8)$$

来区别湍流的不同情况,其中 N 称为 Brunt 频率.白天 $Ri < 0$,晚上 $Ri > 0$.一般 Ri 愈小愈容易产生湍流,常用的临界 Richardson 数为 0.25.

3. 大气的 Reynold 数极高.式(1.1)中,由于 $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$,

常见的 U 取为 10 m/s . 因此只要 $L=1 \text{ m}$, 那么 Re 就高达 10^6 . 在讨论湍流时常用湍流(涡旋)交换系数 K , K 正比于湍流的速度尺度乘以湍流的长度尺度, 因而, 由(1.1)式可以将 Reynold 数写成

$$Re = \frac{K}{\nu} = \frac{\text{湍流交换系数}}{\text{分子黏性系数}}. \quad (1.9)$$

因为 Reynold 数特别大, 所以一般只考虑湍流黏性, 而可以不考虑分子黏性.

§ 4 湍流的本质——非线性

湍流研究的困难之处在于它含有大大小小尺度不同的湍流涡旋. 例如大气中大的涡旋达数千公里, 小的涡旋仅几毫米. 这些涡旋是如何形成的? 为了说明这个问题, 我们应该区分形成湍流的三个因素: 不稳定、非线性和耗散. 简单地说, 局部不稳定是使扰动离开原有状态而转化到其他状态, 例如白天 $Ri < 0$, 空气团一受扰动就离开原有的静止状态. 而非线性则有多种状态, 例如白天 $Ri < 0$, 空气团离开原有的静止状态后就变成对流状态, 若没有非线性平流项 (如 $w \frac{\partial \theta}{\partial z}$, w 是速度 v 的垂直分量), 空气团不稳定就跑到无穷远去了. 对流状态形成后, 下面热空气向上, 上面冷空气向下, 反而削弱了最初造成不稳定的温度差. 黏性的作用从整体上使状态保持在有限的空间中, 例如若形成对流状态后, 再受扰动后就离开对流状态, 来回游荡在静止状态和对流状态中间. 这样不断地伸长(局部不稳定)和折叠(整体稳定), 加上黏性的作用, 将空气团不断撕裂成大大小小的涡旋.

§ 5 确定性还是随机性

自 1883 年湍流提出后的一个很长时间内, 总是把湍流看成是随机性的. 但是 20 世纪 60 年代就发现湍流中有相干结构(coherent structure). 湍流的关键是涡旋, 所以涡旋的确定性也是湍流表现出

来的一面. 因此我们认为湍流既有确定性的一面, 也有随机性的一面, 这两方面如何统一呢?

图 1.1 是一种常见的三维螺旋结构轨道, 它是由确定性系统产生的, 图中箭头的方向表示流动的方向, 即时间增加的方向. 可以看出图 1.1 是一种螺旋涡旋. 由于 $t \rightarrow \pm\infty$ 都趋向图中黑点 A , 在动力系统理论中也称为同宿轨道 (homoclinic orbit). 从物理上考虑, 箭头向上的方向表示从黑点处出去 (即伸长), 而箭头向下以螺旋方式进至 A 点的方向表示进入黑点 (即折叠). 这样, 在三维螺旋涡旋中伸长和折叠的结合, 即为局部不稳定和整体稳定的结合.

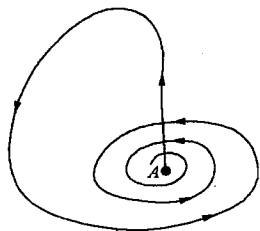


图 1.1 三维螺旋涡旋, 也称 Silnikov 同宿轨道

Silnikov 证明只要给图 1.1 扰动, 就会出现随机的混沌.

从波动的角度看, $t \rightarrow \pm\infty$ 趋向于同一状态就是非线性孤立波 (solitary wave), 如图 1.2(a), 只要对图 1.1 稍加扰动, 就可以使图 1.2(a) 的波形变成图 1.2(b), 它好像是两个孤立波 (周期 2). 由于不断地伸长和折叠, 最后有可能就变成无周期的各种尺度都有的湍流状态, 如图 1.2(c).

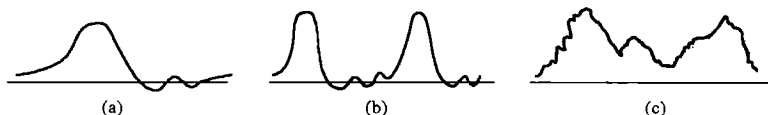


图 1.2 由孤立波到湍流

由此看出, 将湍流的随机性和确定性联系起来的桥梁很可能是同宿轨道一类的结构.

§ 6 研究湍流的方法

人们对湍流的认识也是逐步的. 因而研究湍流的方法也有所不同, 从历史上讲大致有三种方法: 统计方法、 K 理论和相似理论.

由于最初认识湍流侧重于随机性的一面, 因此主要想借用统计

上的理论和方法处理湍流,包括湍流的概率分布、自相关函数、功率谱、方差等,这自然导致对湍流作均匀各向同性(isotropic)和平稳各态历经(ergodic)的假设.

也还是基于湍流的随机性,导出了湍流平均运动所满足的方程——Reynold 平均运动方程.由于该方程中多出了 Reynold 应力项,如 $u'w'$,使得该方程不闭合.如果类似于分子黏性应力,假设湍流的 Reynold 应力项仍与平均速度梯度成正比,即

$$\overline{u'w'} = -K \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad (1.10)$$

这样 Reynold 平均运动方程就闭合了.(1.10)式中的比例系数 K 就是(1.9)式中的湍流交换系数,因此称这种方法为 K 理论.

相似理论的方法来源于量纲分析,根据物理考虑建立湍流的定量关系.例如,前苏联科学家 Kolmogorov(1941 年)用量纲分析得到湍流功率谱 $S(k)$ (量纲为 $\frac{[L]^2/[T]^2}{1/[L]}$) 与湍流动能耗散率 ϵ (量纲为 $[L]^2/[T]^3$) 和波数 k (量纲为 $[L]^{-1}$) 之间的关系为

$$S(k) \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (1.11)$$

(1.11)式就是著名的湍流能谱的“ $-5/3$ 次方”定律.从物理上讲,相似理论更反映了湍流中大大小小不同尺度(其尺度跨了好几个量级)之间的自相似性:大涡旋中有小涡旋,小涡旋中有更小的涡旋.正像英国科学家 Richardson 所说:

大涡用动能哺育小涡,
小涡照此把儿女养活.
能量沿代代涡旋传递,
但最终耗散在黏滞里.

这就是说,湍流涡旋的个数是随尺度而变化的,但存在在尺度变化过程中不变的量,这就是分形(fractal)理论和重正化群理论的核心.

§ 7 解释湍流发生问题的困难

湍流是如何发生的?这是一个非常有趣和值得研究的问题.过去常用线性不稳定理论来解释,去求解小扰动方程在给定边界条件下

的本征值问题,给出不稳定波数 k ,相速度 $C=C_r+iC_i$ 和 Re 之间的关系式 $f(Re, k, C)=0$. 由于扰动的形式为 $e^{ik(x-ct)}$, 因此当 $C_i>0$ 时扰动增长,即不稳定; $C_i<0$ 时扰动衰减; $C_i=0$ 属于临界情况, $C_i=0$ 的曲线称为临界曲线,由临界曲线确定最小的 Re ,即通常定义的临界 Reynold 数 Re_c . 线性理论结果不符合实际的原因在于: 扰动不稳定并不见得是湍流. 而非线性的作用是使不稳定的模饱和 (saturation), 对定常情况可以饱和成非均匀的空间斑图 (pattern), 也可以饱和成行波列 (traveling wave train).

1944 年苏联科学家 Landau 在他的一篇著名论文“论湍流问题”中提出了湍流发生的非线性理论. 他认为当 Reynold 数接近临界值 Re_c 时,按非线性理论扰动的振幅 $|A|$ 以指数形式 $A_0 e^{\lambda t} = A_0 e^{(\sigma+i\omega)t}$ 增长,其中 λ 的实部为

$$\operatorname{Re}(\lambda) = \sigma = a(Re - Re_c) + O(Re - Re_c)^2. \quad (1.12)$$

当 $0 < Re - Re_c \ll 1$ 时,不稳定的模增长很慢,而其他模则衰减,也就是说最不稳定的模占优势. 但是由于非线性的相互作用使扰动的指数增长受到抑制(即饱和),因此在线性理论的基础上应该考虑高阶修正, Landau 得到最不稳定的模振幅 $|A|$ 满足的方程为

$$\frac{d|A|}{dt} = \sigma|A| - \frac{l}{2}|A|^3, \quad (1.13)$$

或者

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\sigma|A|^2 - l|A|^4.$$

其中, l 称为 Landau 常数.

将方程(1.13)除以 $|A|^4$ 得到

$$-\frac{d|A|^{-2}}{dt} = 2\sigma|A|^{-2} - l,$$

它是关于 $|A|^{-2}$ 的线性方程,其显式解为

$$|A|^{-2} = \frac{l}{2\sigma} + \left(A_0^{-2} - \frac{l}{2\sigma} \right) e^{-2\sigma t}, \quad (1.14)$$

$$|A|^2 = \frac{A_0^2}{\frac{l}{2\sigma} A_0^2 + \left(1 - \frac{l}{2\sigma} A_0^2 \right) e^{-2\sigma t}}, \quad \sigma \neq 0. \quad (1.15)$$

问题的性质完全取决于 Landau 常数 l 的符号. 分两种情况:

(1) $l > 0$

当 $Re < Re_c$ (即 $\sigma < 0$), $t \rightarrow \infty$ 时, $|A| \rightarrow 0$; 而当 $Re > Re_c$ (即 $\sigma > 0$), $t \rightarrow \infty$ 时, $|A| \rightarrow \sqrt{2\sigma/l} = \sqrt{2a(Re - Re_c)/l}$, 解随 Re 的变化见图 1.3(a), 由图看出, 当 $Re < Re_c$ 时, 是一种定常状态 $|A| = 0$; 而当 $Re > Re_c$ 时, 状态 $|A| = 0$ 变成不稳定, 分岔出另外一种状态, 它正比于 $(Re - Re_c)^{\frac{1}{2}}$, Re_c 点是分岔点, 叫超临界分岔. 分岔出的状态当 $\text{Im}(\lambda) = \omega \neq 0$ 时为周期状态. 通常认为它们是通向湍流的状态, 例如内柱旋转的同轴圆柱间的流体出现的 Taylor 涡旋就属于这种过渡状态.

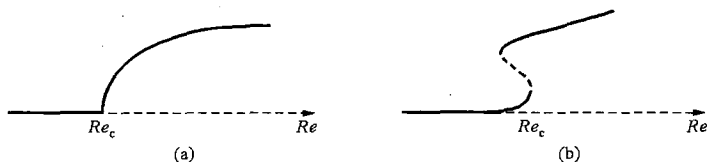


图 1.3 超临界分岔(a)和亚临界分岔(b)

(2) $l < 0$

当 $Re < Re_c$ (即 $\sigma < 0$), 若 $|A| < A_T = \sqrt{2\sigma/l}$ 时, 方程(1.13)右边两项符号相反, 且使右边为负, $t \rightarrow \infty$ 时, $|A| \rightarrow 0$; 而当 $|A| > A_T = \sqrt{2\sigma/l}$ 时, 方程(1.13)右边为正, 只要 $t \rightarrow \frac{1}{-2\sigma} \ln \frac{A_0^2}{A_0^2 - A_T^2}$ (其中 $A_0 > A_T$ 是初始振幅), 就变成不稳定状态. 当 $Re > Re_c$ (即 $\sigma > 0$), 方程(1.13)右边两项全为正, 即 $|A|$ 按指数增长, $|A| \rightarrow \infty$. 这表明在 $Re < Re_c$ 处只有当振幅 $A_0 > A_T$ 时才出现失稳, 分岔出新的状态, 这种分岔称为亚临界分岔, 见图 1.3(b). 亚临界分岔对小振幅扰动是稳定的, 而对有限振幅是不稳定的. 这种分岔常常不经过中间阶段, 当 $A_0 > A_T$ 时失稳或直接进入湍流. 边界层的流动变成湍流很可能属于这种情况.

由此, Landau 提出了湍流发生机制的设想: 湍流是一连串不断分岔的结果, 最后成为由 n 个频率 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 组成的运动. 然而实验发现产生湍流的过程往往只出现少数几个频率, 且功率谱不是线谱, 而

是连续的宽谱. 所以, Landau 的湍流发生机制还是不完全正确的.

§ 8 湍流的自由度

湍流的自由度定义为描述湍流运动所需要的独立变量的数目, 或按通常所说, 是数值计算时所需的网格点数目. 若 N-S 方程(1.4)可以描述湍流, 那么(1.4)式就代表一个无穷维动力系统(从傅氏分析讲, 变量 $\mathbf{v}$ 可以展开成无穷多个傅氏模), 但 Lorenz 方程(1.3)描述混沌只需有限的三维动力系统. 混沌和湍流虽然都是确定性的随机, 但是混沌主要是指随时间的演化行为, 而湍流不但有时间而且还有空间的演化行为. 湍流究竟需要多大的自由度 N 才能描述呢?

一般认为, 湍流的最小尺度是 Kolmogorov 微尺度 η , 它由湍流能量耗散率 ϵ (量纲为 $[L]^2/[T]^3$) 和分子黏性系数 ν (量纲为 $[L]^2/[T]$) 所决定, 为

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (1.16)$$

比 η 再小的尺度一般认为是分子耗散区. 湍流的最大尺度一般认为是包含湍流能量最多的尺度 L , 称为含能涡区尺度. 由于含能涡旋含的能量正比于 U^2 , 因此耗散率为 $\epsilon = U^3/L$, 或者

$$L = \frac{U^3}{\epsilon}. \quad (1.17)$$

比 L 再大的尺度研究湍流时一般不考虑. 通常将介于尺度 η 和 L 之间的区域作为湍流研究的尺度范围, Kolmogorov 称之为惯性区 (inertial range). 由(1.16)和(1.17)式得到

$$\frac{L}{\eta} = \frac{L}{\left(\frac{\nu^3}{U^3/L} \right)^{\frac{1}{4}}} = \left(\frac{UL}{\nu} \right)^{\frac{3}{4}} = Re^{\frac{3}{4}}. \quad (1.18)$$

将(1.18)式两边三次方即得到湍流的自由度

$$N = \left(\frac{L}{\eta} \right)^3 = Re^{\frac{9}{4}}. \quad (1.19)$$