高等数学

一元函数微积分

主　编　吕　波

副主编　李爱玲

東北林業大學出版社

高等数学

一元函数微积分

主　编　吕　波
副主编　李爱玲

東北林業大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 一元函数微积分/吕波主编. —哈尔滨：东北林业大学出版社，2008. 5
ISBN 978-7-81131-246-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. 吕… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材②微积分—高等学校—教材
Ⅳ. 013 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 072039 号

责任编辑：任 俐
封面设计：杨 洋

NEFUP

高 等 数 学
——一元函数微积分
Gaodeng Shuxue
——Yiyuan Hanshu Weijifen
主 编 吕 波
副主编 李爱铃

东北林业大学出版社出版发行
（哈尔滨市和兴路 26 号）
哈尔滨市动力区哈平印刷厂印装
开本787×1092 1/16 印张9.75 字数250千字
2008 年 5 月 第 1 版 2008 年 5 月 第 1 次 印 刷
印数 1—1 000 册
ISBN 978-7-81131-246-1
O·87 定价：22.00 元

前　　言

本教材是根据编者多年的教学实践，按照新形势下教材改革的精神，结合高等数学课程教学基本要求编写而成的。它包含函数与极限、导数、不定积分、定积分、微分方程、无穷级数等内容，增加了应用性例题和习题，对一些内容作了适当的精简和合并，使内容和系统更加完整，也更便于教学。其目的是将高等数学的重点和难点以通俗易懂的方式传达给学生。本教材是在已经出版的同类教材的基础上进行的继续探索，在此对这些作者表示真诚的感谢。

本教材针对学生的实际水平，每章的前面都对该章的知识点、重点加以说明，使学生清楚该章的重点和难点，引起学生的注意，做到有备而学。对较难理解的概念，充分利用例题、图像及通俗的文字予以说明，逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学。对基本概念、重要的公式、解题方法，则不惜篇幅，清楚叙述，力求做到深入浅出、概念准确、知识结构完整。本教材由编写的过程中得到了同行的大力支持，提供了许多资料和帮助，并对初稿提出修改意见，在此一并感谢。

本教材由吕波(佳木斯教育学院)、李爱玲(上海电视大学松江分校)编写，其中第一章、第二章、第三章由李爱玲编写；第四章、第五章、第六章、第七章由吕波编写。

本教材虽经多次修改，但因编写时间紧、编者水平有限，书中的疏漏、差错难免，恳请读者批评指正，以便及时修正。

编　者

2008 年 5 月

目　　录

第一章　函数与极限

【本章知识点】

1. 几个常用初等函数的定义域、值域及性质.
2. 数列极限的概念.
3. 函数极限的概念.
4. 单调有界数列必有极限.
5. 函数连续性的概念.

【重点】

1. 复合函数、分段函数以及函数符号的运算.
2. 求极限的基本方法.
3. 确定无穷小的阶.
4. 判断函数的连续性以及确定函数间断点.

第一节　函　　数

一、常量与变量

在观察某种自然现象或技术过程中,我们往往可以注意到,在这种现象或过程里面所遇到的种种不同的量,有着非常不同的状态.其中有的量,在过程的进行中不起变化,也就是保持一定的数量,这种量叫做常量.但另外一些量却有变化,也就是可取各种不同的数值,这种量叫做变量.

常量:在变化过程中保持不变的量(或相对不变的量),称为常量.

变量:在变化过程中可以改数值的量,称为变量.

例如,在圆的公式 $L = 2\pi r$ 中,数量 2 和 π 总是保持不变的,是常量;因圆的大小不同,半径 r 和周长 L 是可以改变的,是变量.

我们必须注意到上述常量和变量的概念,要依赖于研究这个现象所在的场合.同一个量,在某种情况下可以认为是常量;而在别的情况下,就可能是变量.例如,称量物体的重量时,要认清秤量是在地球表面上同一地方进行,还是在不同的地方进行.若在同一地方秤量,则确定重量的重力加速度是常量;若是在不同的地方秤量,则重力加速度就不能算作常量而是变量.

常用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示常量,用字母 $x,y,z\cdots$ 行表示变量.

二、函数概念

在同一个自然现象或技术过程中,往往同时有几个变量共同变化着,但这几个变量并不是孤立地在变化,而是相互有联系的,遵循一定的规律变化着.

现在我们就两个变量的简单情形举几个例子.

例 1　考虑圆的面积 A 与它的半径间 r 的关系.大家知道,它们之间的关系由公式:

$$A = \pi \cdot r^2$$

给定.当半径 r 取定某一正的数值时,圆面积 A 也就跟着有一确定的数值.

例 2　考虑自由落体问题.设物体下落时间为 t,所落下的距离为 s,假定开始下落的时间

为 $t=0$,那么 s 与 t 之间的相依关系由公式:$s=\frac{1}{2}gt^2$ 给定.其中 g 是重力加速度.假定物体着地时刻为 $t=T$,那么当时间 t 取 $[0,T]$ 中的某一数值时,由上式就可确定 s 的一个数值.

抽去上面几个例子中所考虑的量的实际意义,我们看到它们都是表达了两个变量之间共同变化的相依关系,这种相依关系给出了一种对应法则,根据这一法则,当其中一个变量在某一范围内每取一个数值时,另一变量就有确定的值与之对应.两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义1 设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y,如果 x 在某一范围 D 内所取的每个值 a,变量 y 按照一定的规律有一个唯一确定的值 b 与之对应,则称 y 是 x 的函数,记做 $y=f(x)$,其中 x 称为自变量,y 称为因变量(或函数).

对应于 $x=a$,$y=b$ 叫做函数值,记做 $b=f(a)$.

函数有以下三个要素:

(1)定义域:x 的取值范围 D 叫做函数的定义域;

(2)值域:所有对应的函数值的集合叫做函数的值域;

(3)对应规律:表示由 $x=a$ 求得 $y=b$ 的过程或方法,有时也称为对应法则,用字母 f,g,φ 等表示.

求函数的定义域一般要考虑:

(1)如果与实际问题相关,则根据实际问题确定:

例如:类似如圆的问题,$y=2$ 或记为 $f(x)=2\pi x$,因半径不可能是负数,所以定义域为:$x\geqslant 0$.

(2)如果没有指明实际问题,而是用数学表达式给出,就要求 x 的取值能使表达式有意义(可以计算).

定义域的求法原则:

(a)分母不为零.

(b)$\sqrt{x}$,$x>0$.

(c)$\ln x$,$x>0$.

(d)$\arcsin x$,$\arccos x$,$-1\leqslant x\leqslant 1$.

(e)同时含有上述四项时,要求使各部分都成立的交集.

例如:$y=\sqrt{4-x^2}$,在这个函数中表达式含有开偶次方,因为负数不能开偶次方,所以定义域为:$-2\leqslant x\leqslant 2$.

例如:$y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}$,与例2相比,它还要求分母不等于0,所以定义域为 $-2<x\leqslant 2$.

函数的常用三种表示法(解析法、列表法、图示法):

(a)解析法:用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法即是解析法.

例:直角坐标系中,半径为 r,圆心在原点的圆的方程是:$x^2+y^2=r^2$.

(b)表格法:将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法即是表格法.

例如:在实际应用中,我们经常会用到的平方表、三角函数表等都是用表格法表示的函数.

(c)图示法:用坐标平面上的曲线来表示函数的方法即是图示法.一般用横坐标表示自变量,纵坐标表示因变量.

例如:直角坐标系中,半径为 r,圆心在原点的圆用图示法表示图1-1:

集合的概念　是指具有某些特定性质的事物的总体，组成这个集合的事物称为该集合的元素.通常用大写拉丁字母 $A,B,C\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c\cdots$ 表示集合的元素.通常有两种表示法，即列举法、描述法.

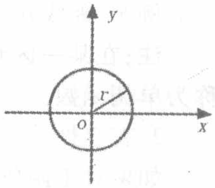

图　1－1

区间和邻域

(1)有限区间：开区间 (a,b)，闭区间 $[a,b]$，半开区间 $[a,b)$，$(a,b]$，

无限区间：$(-\infty,\infty)$

(2)邻域：设 δ 是任意正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 一个的邻域，这个邻域称为 a 的 δ，记做 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$.

例 1　求函数 $y=\dfrac{1}{x+2}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域.

解　对于 $\dfrac{1}{x+2}$，要求 $x+2\neq 0$，即 $x\neq -2$.

对于 $\sqrt{4-x^2}$，要求 $4-x^2\geqslant 0$，从而得出 $-2\leqslant x\leqslant 2$；

因此，函数 $y=\dfrac{1}{x+2}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域是，$(-2,2]$.

例 2　求函数 $y=\dfrac{1}{\ln(x-1)}+\sqrt{5-x}$ 的定义域.

解　对于 $\ln(x-1)$，要求 $x-1>0$，即 $x-1>0$，即：$x>1$；

对于 $\dfrac{1}{\ln(x-1)}$，要求 $\ln(x-1)\neq 0$，于是 $x-1\neq 1$，即：$x\neq 2$；

对于 $\sqrt{5-x}$，要求 $5-x\geqslant 0$，即：$x\leqslant 5$.

因此函数 $y=\dfrac{1}{\ln(x-1)}+\sqrt{5-x}$ 的定义域是 $(1,2)\cup(2,5]$

三、函数的几个初等性质

1. 单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 增大而增大，即：对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的.

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 增大而减小，即：对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减小的(如图 1－2).

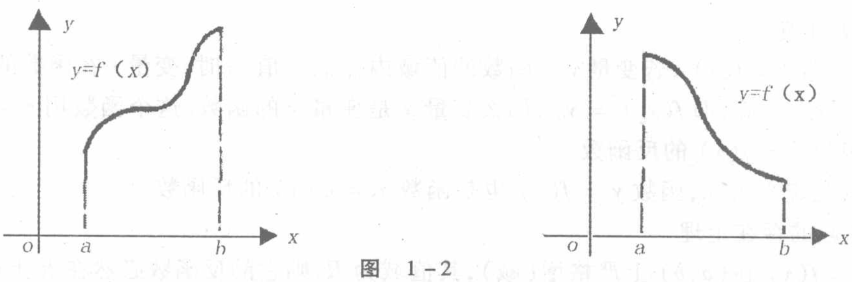

图　1－2

例题:函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是单调减小的,在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的.

注:在某一区间上判别单调性是函数的局部性质;如果函数在其定义域上具有单调性,就称为单调函数.

2. 有界性

如果对于函数 $y=f(x)$ 在某一区间内的一切 x 值,存在正数 M,使 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称 $y=f(x)$ 在该区间内有界,否则称 $y=f(x)$ 在该区间内无界. 如果函数 $y=f(x)$ 在它的定义域内有界,则称 $y=f(x)$ 为有界函数.

有界函数的图像位于两直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间.

3. 奇偶性

如果在函数 $y=f(x)$ 的定义域内,$f(-x)=-f(x)$ 恒成立,则称它为奇函数;

如果在函数 $y=f(x)$ 的定义域内,$f(-x)=f(x)$ 恒成立,则称它为偶函数;既不是奇函数也不是偶函数的函数,称为非奇非偶函数.

奇函数的图像关于原点对称(点对称图形),偶函数的图像关于 y 轴对称(轴对称图形).(如图 1-3)

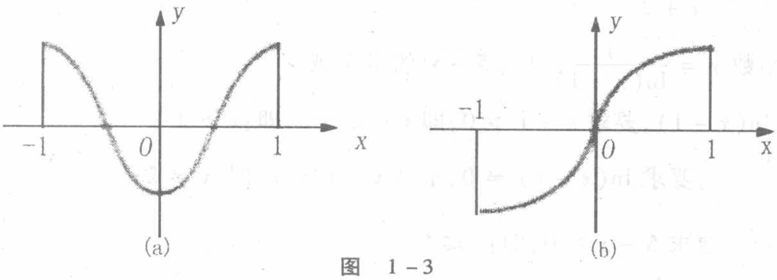

图 1-3

奇偶函数运算性质

(1)两偶函数之和是偶函数,两奇函数之和为奇函数;

(2)两奇函数(或偶数)之积(或商,分母不为0)是偶函数;

(3)一奇函数与一偶函数之积(或商,分母不为0)是奇函数.

有这几条性质,可判断 $x\sin x$,$x^2\cos x$,$x\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 是偶函数;$x\cos x$,$x^2\dfrac{a^x-1}{a^x+1}(a>0)$ 是奇函数.

4. 周期性

在函数 $y=f(x)$ 的定义域内,若存在正数 T,使等式 $f(x+T)$ 恒成立,则称它为周期函数. 使上述关系成立的最小正数 T 称为最小正周期,简称周期.

例如:$y=\sin x$ 就是周期函数,周期为 2π.

四、反函数

反函数的定义:

设有函数 $y=f(x)$,若变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0 时,变量 x 在函数的定义域内必有一值 x_0 与之对应,即 $f(x_0)=y_0$,那么变量 x 是变量 y 的函数. 这个函数用 $x=\varphi(y)$ 来表示,称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

注:由此定义可知,函数 $y=f(x)$ 也是函数 $x=\varphi(y)$ 的反函数.

反函数的存在定理

若 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上严格增(减),其值域为 R,则它的反函数必然在 R 上确定,且严格

增(减).

注:严格增(减),即是单调增(减).

例如:$y=x^2$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$对于y取定的非负值,可求得$x=\pm\sqrt{y}$.若我们不加条件,由y的值就不能唯一确定x的值,也就是在区间$(-\infty,+\infty)$上,函数不是严格增(减),故其没有反函数.如果我们加上条件,要求$x\geqslant 0$,则对$y\geqslant 0$,$x=\sqrt{y}$就是$y=x^2$在要求$x\geqslant 0$时的反函数,即函数在此要求下严格增(减).

反函数的性质:

在同一坐标平面内,$y=f(x)$与$x=\varphi(y)$的图形是关于直线$y=x$对称的.

例如:函数$y=2^x$与函数$y=\log_2 x$互为反函数,则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线$y=x$对称的.如图1-4所示.

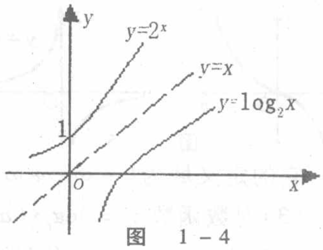

图　1-4

五、复合函数

现在举例说明一些复杂函数的构成情况,有以下两个函数:

$$y=\ln u$$
$$u=\sin x$$

可以得到函数$y=\ln\sin x$,对此我们理解为y是u的函数,而u是x的函数,那么y通过u就是x的函数.

定义:若函数$y=f(u)$的定义域为U,而任意函数$u=\varphi(x)$的定义域为X,且$u=\varphi(x)$得值域包含在U中,则对X中任意的x,通过u有唯一的y与之对应,即y是x的函数,记为:

$$y=f[\varphi(x)]$$

这种函数称为复合函数,其中u成为中间变量.

例如:$y=\sin^2 x$是由$y=u^2$及$u=\sin x$复合而成的复合函数,它的定义域为:$(-\infty,+\infty)$就是$u=\sin x$的定义域.又如$y=\sqrt{1-x^3}$是由$y=\sqrt{u}$及$u=1-x^3$复合而成的复合函数,它的定义域为$[-1,1]$,只是$u=1-x^3$的定义域$(-\infty,+\infty)$的一部分.

这里必须注意,不是任何两个都可以复合成一个复合函数的.例如$y=\arcsin u$及$u=2+x^2$就不能复合成一个复合函数,因为对于$u=2+x^2$的定义域$(-\infty,+\infty)$中任何x值所对应的u值(都大于或等于2),$y=\arcsin u$都没有意义.

复合函数不仅可以有两个函数,也可以有更多的函数.例如$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$就是由四个函数$y=\lg u$,$u=1+v$,$v=\sqrt{z}$,$z=1+x^2$复合而成的复合函数,它的定义域与$z=1+x^2$同为$(-\infty,+\infty)$.

如指出下列函数分解与合成过程.

(1) $y=u^2$,$u=\sin v$,$v=\ln x$,求$y=f(x)=?$

解　求$y=f(x)$,只要由$y\to u\to v\to x$逐级带入:

$$y=u^2=\sin^2 v=\sin^2(\ln x)$$

(2) $y(x)=e^{\arctan\sqrt{x^2}}$分解成基本初等函数.

解　$y=e^w$,$w=\arctan u$,$u=\sqrt{v}$,$v=x^{2+1}$

小结:正确分析一个复合函数怎样由基本函数复合而成,在微积分学习中是重要的.

复合过程是由里到外,分析过程由外到里,注意每一步都是基本初等函数或是基本初等函

数的加减运算.

六、初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常数这6类函数叫做基本初等函数. 这些函数在中学的数学课程里已经学过.

(1)幂函数 $y = x^a$(a 属于 R)

它的定义域和值域依 a 的取值不同而不同,但是无论 a 取何值,幂函数在 x 属于 $(0, +\infty)$ 内总有定义. 当 a 属于 N 或 $a = \dfrac{1}{2n-1}$ 时,定义域为 R. 常见的幂函数的图形如图 1-5 所示.

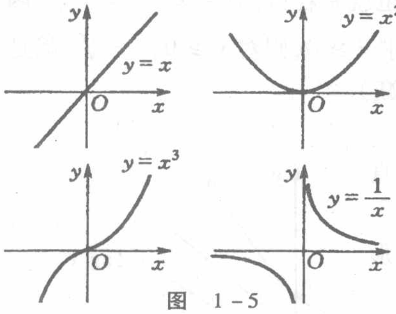

图 1-5

(2)指数函数 $y = a^x$($a > 0, a \neq 1$)

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为 $(0, +\infty)$. 指数函数的图形如图 1-6 所示.

(3)对数函数 $y = \log_a x$($a > 0, a \neq 1$)

定义域为 $(0, +\infty)$,值域为 $(-\infty, +\infty)$. 对数函数 $y = \log_a x$ 是指数函数 $y = a^x$ 的反函数. 其图形见图 1-7.

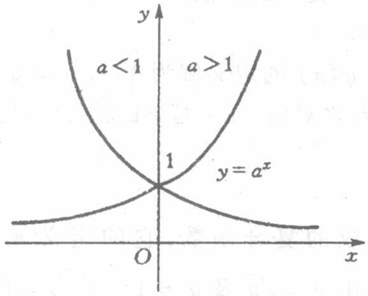

图 1-6

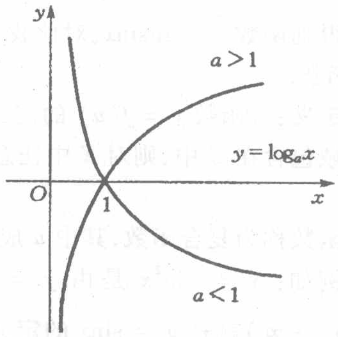

图 1-7

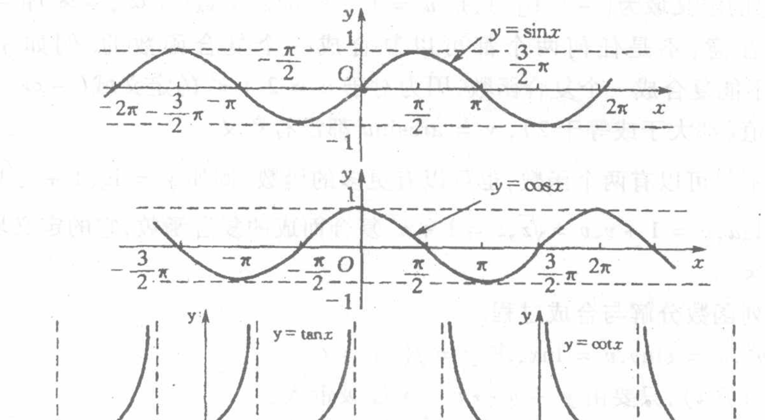

图 1-8

在工程中,常以无理数 e = 2.718 281 828… 作为指数函数和对数函数的底,并且记 $e^x = \exp x, \log_e x = \ln x$,而后者称为自然对数函数.

(4)三角函数

三角函数有正弦函数 $y = \sin x$、余弦函数 $y = \cos x$、正切函数 $y = \tan x$、余切函数 $y = \cot x$、正割函数 $y = \sec x$ 和余割函数 $y = \csc x$. 其中正弦、余弦、正切和余切函数的图形见图 1 - 8.

(5)反三角函数

反三角函数主要包括反正弦函数 $y = \arcsin x$、反余弦函数 $y = \arccos x$、反正切函数 $y = \arctan x$ 和反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 等. 它们的图形如图 1 - 9 所示.

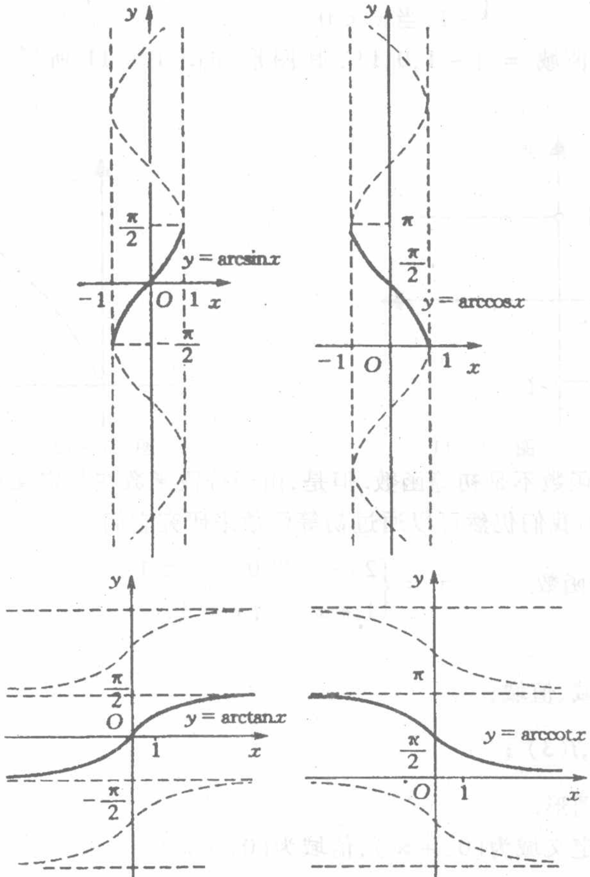

图　1 - 9

(6)常量函数为常数 $y = c$(c 为常数)

定义域为($-\infty$, $+\infty$),函数的图形是一条水平的直线,如图 1 - 10 所示.

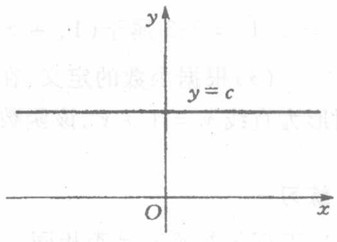

图　1 - 10

通常把由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的并用一个解析式表达的函数,称为初等函数.

例如: $y = \ln(\sin x + 4)$, $y = e^{2x}\sin(3x + 1)$, $y = \sqrt[3]{\sin x}$,

$$y = \frac{2 + \sqrt[3]{x}}{2 - \sqrt{x}}, \qquad y = \arctan\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}, \cdots$$

都是初等函数. 初等函数虽然是常见的重要函数,但是在工程技术中,非初等函数也会经常遇到. 例如符号函数、取整函数 $y = [x]$ 等分段函数就是非初等函数.

在微积分运算中,常把一个初等函数分解为基本初等函数来研究,学会分析初等函数的结

构是十分重要的.

本门课程所讨论的函数主要就是这类初等函数.

分段函数:在定义域的不同范围内用不同的式子表示的一个函数,称为分段函数.

例如:函数 $y = \mathrm{sgn}x = \begin{cases} 1, 当 x > 0 \\ 0, 当 x = 0 \\ -1, 当 x < 0 \end{cases}$ 称为符号函数,它就是一个分段函数,其定义域 $D = (-\infty, +\infty)$,值域 $= \{-1,0,1\}$,其图形如图 1-11 所示. 对于任何实数 x,有:$x = \mathrm{sgn}x \cdot |x|$.

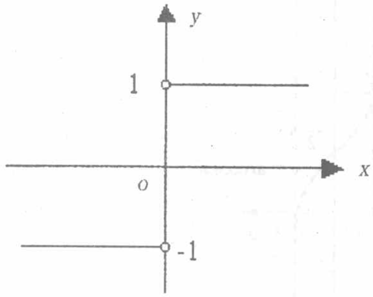

图 1-11

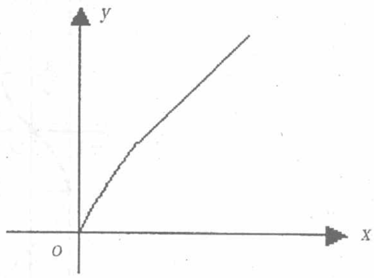

图 1-12

可以看出,分段函数不是初等函数. 但是,由于分段函数在其定义域的不同子区域上通常是用初等函数表示的,我们仍然可以通过初等函数来研究它们.

例 1　已知分段函数　$y = \begin{cases} 2\sqrt{x} & 当 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 + x & 当 x > 1, \end{cases}$

试求:

(1)函数的定义域、值域;

(2)$f(\frac{1}{2})$,$f(1)$,$f(3)$;

(3)画出函数的图形.

解　(1)函数的定义域为$[0, +\infty)$,值域为$[0, +\infty)$.

(2)因为 $\frac{1}{2}$ 属于 $[0,1]$,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$;1 属于$[0,1]$,所以 $f(1) = 2\sqrt{1} = 2$;3 属于$(1, +\infty)$,所以 $f(3) = 1 + 3 = 4$.

(3)根据函数的定义,在$[0,1]$上,函数的图形为曲线 $y = 2\sqrt{x}$,在$(1, +\infty)$上,函数的图形为直线 $y = 1 + x$,该函数的图形如图 1-10 所示.

练习一

1. 下列各对函数是否相同.

(1)$f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$;

(2)$f(x) = 1, g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$;

(3)$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, g(x) = x + 2$;

(4)$f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$;

(5) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$.

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$，求 $f(0)$，$f(2)$，$f(-1)$，$f(x+1)$，$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$，$f(x+\Delta x)$.

3. 设 $f(t)=\begin{cases} t^2-t+1 & t\geqslant 0 \\ 1-t & t<0 \end{cases}$，求 $f(1)$，$f(-1)$，$f(0)$，$f(a)f(t+1)$.

4. 已知 $f(x+1)=x^2-x+1$，求 $f(x)$.

5. 求下列函数的定义域：

(1) $y=x^2-2x+3$；　(2) $y=\dfrac{1}{1-x}$；

(3) $y=\sqrt{2-3x^2}$；　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}+\dfrac{1}{9-x^2}$；

(5) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$；　(6) $y=\dfrac{1}{\lg(3-x)}$；

(7) $y=\cos\sqrt{3x-1}$；　(8) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}-1}$；

(9) $y=\begin{cases} \dfrac{1}{5-x} & x<0 \\ x & 0\leqslant x<1 \\ 2 & 1\leqslant x<2 \end{cases}$.

6. 将下列复合函数分解成较简单的函数：

(1) $y=(\arccos\sqrt{x})^2$；　(2) $y=\ln(\tan e^{\frac{x}{2}})$；

(3) $y=e^{\sin\frac{x}{2}}$；　(4) $y=\sqrt{\ln(\tan x^2)}$；

(5) $y=\sin^2 x$；　(6) $y=\sqrt{1-x^3}$；

(7) $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$.

7. 将下列各题中的 y 表示成 x 的函数

(1) $y=u^2, u=\sin v, v=2^x$；

(2) $y=\lg u, u=\sqrt{v}, v=1+\tan x$；

(3) $y=3^u, u=v^2, v=2x+1$；

(4) $y=e^u, u=\sin v, v=x^2+1$.

第二节　数列的极限

高等数学的研究对象是变量，为了很好地掌握变量的变化规律，不仅要考察变量的变化过程，更重要的是要从它的变化过程来判断它的变化趋势，而变量的确定的变化趋势就是变量的极限. 本节将介绍数列的极限.

一、极限的思想

极限概念是在求某些实际问题之精确解答的过程中产生的，例如，我国古代数学家刘徽利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术，就是极限思想在几何学上的应用.

设有一个圆，首先作内接正六边形，把它的面积记为 A_1；再作内接正十二边形，其面积记

为 A_2；再作内接正二十四边形，其面积记为 A_3；循此下去，每次边数加倍，一般地把内接正 $6\times2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n（n 属于 N）．这样就得到一系列内接正多边形的面积：

$$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$$

它们构成一列有次序的数，当 n 越大，内接正多边形与圆的差别就越小，从而以 A_n 作为圆面积的近似值也就越精确，但是无论 n 取得如何大，只要 n 取定了，A_n 终究只是多边形的面积，还不是圆的面积，因此设想 n 无限增大（记为 $n\to\infty$，读作 n 趋向无穷大），即内接正多边形的边数无限增加，在这个过程中，内接正多边形就无限接近于圆，同时 A_n 也无限接近于某个确定的数值，这个确定的数值就可认为是圆的面积，这个确定的数值在数学上被称为这列有次序的数（所谓数列）$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，在求圆面积的问题中我们看到，正是这个数列的极限才精确地表达了圆的面积．

上述实际问题的解决就体现了极限的思想，现在极限的方法已经成为了高等数学中的一种基本方法，应用非常广泛．

二、数列的概念及几个特性

如果按照一定的法则，依次由自然数 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 编号排成的一列数

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots,$$

叫做数列，记为 $\{x_n\}$ 或数列 x_n．数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 x_n 叫做数列的一般项或通项，例如：

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots \tag{1}$$

$$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots \tag{2}$$

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots \tag{3}$$

都是数列的例子．

在几何上，数列 x_n 可看作数轴上的一个动点，它依次取数轴上的点 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 数列 x_n 可看作自变量为正整数 n 的函数

$$x_n=f(n)$$

它的定义域是全体正整数，当自变量 n 依次取 $1,2,3,\cdots$ 等一切正整数时，对应的函数值就排列成数列 x_n．

1. 单调数列

如果数列满足条件：

$$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_n+1\leqslant\cdots,$$

就称数列 x_n 是单调增加的；如果数列 x_n 满足条件

$$x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_n+1\geqslant\cdots,$$

就称数列 x_n 是单调减少的．单调增加和单调减少的数列统称为单调数列．例如 $\{\frac{1}{n}\}$ 是一个单调减少的数列，$\{3^n\}$ 是一个单调增加的数列，单调数列的点在数轴上只能单方向移动．

2. 有界数列

对于数列 x_n，如果存在着正数 M，使得对任何自然数 n，都有

$$|x_n|\leqslant M$$

成立，则称数列 x_n 是有界的；如果这样的正数 M 不存在，就说数列 x_n 是无界的．

例如,数列(1)、(2)、(3)都是有界数列,有界数列的点在数轴上都落在某闭区间$[-M,M]$.

对于数列x_n,我们要讨论的重要问题是:当n无限增大(即$n\to\infty$)时,对应的x_n是否能够无限趋近于某一个确定的数值,如果能够的话,这个数值是多少?这就是数列的极限问题.

三、数列的极限

对于给定的数列x_n,如果当n无限增大($n\to\infty$)时,对应的x_n无限趋近于一个确定的常数A,则称A为数列x_n的极限,记做$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$或$x_n\to A(n\to\infty)$.

例如,数列$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$的一般项$x_n=1+\frac{1}{n}$,当$n$无限增大时,$\frac{1}{n}$无限趋近于零,因而$x_n$无限接近1,也就是说,1是数列$\{1+\frac{1}{n}\}$的极限.

显然,上述例子比较简单,很容易从通项的变化趋势上分析出数列的极限,当然如果数列的通项比较复杂,想从直观上得出数列的极限就不太容易了,况且上述定义只是一种描述性定义,不够准确和严谨,为了确切地表明"无限增大"和"无限趋近"的意义,揭示数列极限的实质,我们必须用精确的数学语言来描述这一概念.

考察数列$\{1+\frac{1}{n}\}$.从数列的变化趋势来看,当$n\to\infty$时,$x_n\to 1$,这就意味着,当n充分大时,点x_n与1可以任意接近,即$|x_n-1|$可以任意地小,换句话说,只要n充分大,$|x_n-1|=\frac{1}{n}$就可以小于预先给定的任意小的正数,对此,可由表1-1进行观察:

表1-1

$\varepsilon=$	$\cdots$	0.1	0.01	0.001	0.000 1	0.000 01	$\cdots$
$n>$	$\cdots$	10	10^2	10^3	10^4	10^5	$\cdots$
$\|x_n-1\|<$	$\cdots$	0.1	0.01	0.001	0.000 1	0.000 01	$\cdots$

从表1-1中可看出,对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在着正整数,不妨记做N,当$n>N$时,即数列$\{1+\frac{1}{n}\}$从第$N+1$项开始,后面的一切项:$x_{N+1},x_{N+2},\cdots$都能使不等式

$$\left|\frac{n+1}{n}\right|<\varepsilon$$

成立,这就是当$n\to\infty$时,$\frac{1+n}{n}\to 1$的实质.由此推广到一般,可得数列极限的定义如下:

定义　设有数列x_n,A为一常数,如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在着正整数N,使得对于$n>N$时的一切x_n,不等式

$$|x_n-A|<\varepsilon$$

都成立,则称常数A是数列x_n的极限,或称数列x_n收敛于A,记为,记做$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$或$x_n\to A$($n\to\infty$).

如果数列没有极限,则称数列是发散的.

上面定义中正数ε可以任意给定是很重要的,因为只有这样,不等式$|x_n-A|<\varepsilon$才能表达出x_n与A无限接近的意思,此外,还应注意到:定义中的正整数N与正数ε有关,它随着ε的给定而选定.

在几何上,常数A和数列x_n的各项都可用数轴上的对应点表示.因为$|x_n-A|<\varepsilon$相当于