

Easy and Quick Access
to Comprehension



● 主 编 / 李 军 齐淑华 党 娜

数理化生 公式定律

快易通

〔高中版〕

新课标



吉林教育出版社

Easy and Quick Access
to Comprehension



数理化生 公式定律

快易通

〔高中版〕

新课标



● 主 编	李 军	齐淑华	党 娜
● 编 者	朱 宇	马 特	蔡 莹
	丁 齐	冷 岩	姜中伟
	李 洋	张云成	吕 越
	李耀田	赵大川	李己平
	张 宇	刘 刚	姜世碧

吉林教育出版社



版权所有 翻印必究
举报电话(0431)85645959(总编办)

图书在版编目(CIP)数据

数理化生公式定律快易通: 高中版/李军, 齐淑华, 党娜
主编. —长春: 吉林教育出版社, 2008. 4

ISBN 978 - 7 - 5383 - 5451 - 5

I. 数… II. ①李… ②齐… ③党… III. ①理科(教育) - 公式 - 高中 - 教学参考资料 ②理科(教育) - 定律 - 高中 - 教学参考资料 IV. G634. 73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 046901 号

☐总策划: 房海滨 杨琳 ☐封面设计: 张沐沉
☐责任编辑: 杨琳 孙盛楠 ☐版式设计: 金英
☐责任校对: 龚伟宏 ☐责任印制: 徐铁军

吉林教育出版社出版发行

长春市同志街 1991 号 邮编: 130021

电话: 0431 - 85675379 85645959 85645965

传真: 0431 - 85633844

电子函件: xj8640@sina.com

吉林教育出版社制版

吉林省九三彩色印刷厂印装

长春市岭东路 169 号 邮编: 130031

2008 年 6 月第 1 版 2008 年 6 月第 1 次印刷

开本: 880 × 1230 1/32 印张: 17.125 字数: 580 千
印数: 00001 - 15000 册

书号: ISBN 978 - 7 - 5383 - 5451 - 5

定价: 25.90 元

本书亮点图示

直接给出公式，一目了然，便于查阅和记忆。

在解析过程中整合知识点，便于学生理解和掌握。

以最新高考真题为例讲解用法，针对性强，便于融会贯通。

在解题过程中讲透公式定律的应用方法，便于学生掌握解题技巧。

指明易错点，明确注意事项，帮助学生减少失误。

数学

KUAIYITONG

立体几何

1. 平行问题

1.1

$a \parallel b$

解析快易通

当空间的两条直线 a 和 b 共面且无公共点时，称直线 a 与直线 b 平行。

运用快易通

例 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 、 F 分别是棱 CD 、 CC_1 的中点，求证： $EF \parallel AB_1$ 。

分析与解答

► 证明：连接 DC_1 ，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，有 $AD \parallel B_1C_1$ 。
 $\therefore$ 四边形 ADC_1B_1 是平行四边形，
 $\therefore AB_1 \parallel DC_1$ 。①
 在 $\triangle CDC_1$ 中， E 、 F 分别是 CD 、 CC_1 的中点，这时 EF 是 $\triangle CDC_1$ 的中位线，
 $\therefore EF \parallel DC_1$ 。②
 由①、②可知， $EF \parallel AB_1$ 。

老师我懂

本题通过连接 DC_1 ，建立起了 AB_1 与 EF 的联系，这里使用了证明线线平行的第二种方法。

名师点

本题的解答是将整数按奇、偶这一标准划分为两类，符合分类讨论的三个原则。



目 录

数 学

集合与函数

1. 集合 [003]
2. 函数的概念 [007]
3. 函数的性质 [009]
4. 函数的图象变换 [014]
5. 基本初等函数 [021]

数 列

1. 数列 [024]
2. 等差数列 [029]
3. 等比数列 [036]
4. 等差数列与等比数列
的综合运用 [041]
5. 数列的经典结论 [045]

三角函数

1. 任意角和弧度制 [048]
2. 任意角的三角
函数 [051]
3. 同角三角函数的基本
关系式 [054]
4. 三角函数的诱导
公式 [056]
5. 两角和与差的三角
函数公式 [059]
6. 三角函数的积化和差、
和差化积公式 [062]
7. 三角函数的图象与
性质 [064]
8. 已知三角函数值
求角 [072]

9. 解斜三角形 [076]

平面上的向量

1. 平面向量的有关
概念 [080]
2. 平面向量的线性运
算(1) [082]
3. 平面向量的线性运
算(2) [086]
4. 平面向量的数
量积 [091]
5. 平面向量的坐标
表示 [095]

不等式

1. 关于不等式的
证明 [103]
2. 解不等式的
方法 [108]
3. 含有绝对值的不
等式 [113]
4. 不等式观点下的最
大(小)值问题 [116]

解析几何

1. 直线的方程 [120]
2. 两条直线的位置
关系 [127]
3. 曲线和方程 [130]
4. 圆的方程与性质 [132]



5. 椭圆的方程与性质 [138]
6. 双曲线的方程与性质 [142]
7. 抛物线的方程与性质 [145]
8. 直线与二次曲线的关系 [149]
- 立体几何**
1. 平行问题 [152]
2. 垂直问题 [157]
3. 成角问题 [161]
4. 距离问题 [166]
5. 棱柱 [172]
6. 棱锥 [179]
7. 球 [187]
- 空间向量**
1. 空间向量及其运算 [191]
2. 空间向量的坐标运算 [194]
3. 空间角 [198]
4. 空间距离 [203]
- 排列 组合**
- 二项式定理 概率**
1. 计数原理 [208]
2. 排列 [211]
3. 组合 [215]
4. 排列与组合的综合运用 [218]
5. 二项式定理 [220]
6. 概率 [224]
- 微积分**
1. 极限 [231]
2. 导数与微分 [236]
3. 导数的应用 [239]
- 复 数**
1. 复数的概念 [244]
2. 复数的运算 [249]
3. 复数的三角形式 [253]

物 理

- 力与运动**
1. 三种基本力 [259]
2. 直线运动及其规律 [265]
3. 牛顿运动定律的应用 [282]
4. 物体的平衡 [289]
- 曲线运动与机械能**
1. 曲线运动及其规律 [294]
2. 万有引力定律的应用 [302]
3. 冲量与动量 [306]
4. 功与机械能 [309]
5. 简谐运动与机械波 [315]
- 电场与恒定电流**
1. 电场 [328]
2. 直流电路 [336]
- 磁与电**
1. 磁场 [343]



2. 电磁感应定律 [349] 4. 电磁振荡与电
3. 交流电 [354] 磁波 [359]

化 学

基本概念

1. 溶解度 [365]
2. 物质的量 [367]
3. 氧化还原反应 [371]
4. 离子反应 [376]
5. 化学反应中的能量
变化 [378]

基本理论

1. 物质结构与元素
周期律 [380]
2. 化学反应速率与
化学平衡 [384]
3. 电解质溶液
胶体 [392]

元素、单质及其化合物

1. 卤素 [418]
2. 氧族元素 [423]
3. 氮族元素 [430]
4. 碳族元素 [434]

5. 几种重要的金属 [436]

有机化学

1. 烷烃 [443]
2. 烯烃 [446]
3. 炔烃 [449]
4. 苯 芳香烃 [451]
5. 卤代烃 [454]
6. 醇 酚 [455]
7. 醛 羧酸 酯 [458]
8. 糖类 油脂 蛋
白质 [461]

化学实验

1. 化学实验中常用的
仪器与基本操作 [465]
2. 物质的检验、分离
和提纯 [475]
3. 物质的制备、性质
及综合实验设计 [480]

生 物

绪 论

..... [489]

生命的物质基础

1. 组成生物体的化学
元素 [489]

2. 组成生物体的各种
化合物 [490]

生命的结构基础

——细胞

1. 细胞研究的发展 [492]



- | | |
|----------------------------|-------------------------|
| 2. 真核细胞的结构和功能 [492] | 4. 细胞质遗传 [520] |
| 3. 原核细胞的结构和功能 [494] | 5. 基因突变 [521] |
| 4. 细胞的生物膜系统 [495] | 6. 基因重组 [521] |
| 5. 细胞的增殖 [496] | 7. 染色体变异 [522] |
| 6. 细胞的分化 癌变 衰老 [498] | 8. 人类遗传病与优生 [523] |
| 7. 细胞工程 [499] | 9. 生物的进化 [523] |

生物与环境

生物的新陈代谢

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| 1. 酶 [500] | 1. 生物与环境的相互关系 [524] |
| 2. ATP——三磷酸腺苷 [500] | 2. 种群和生物群落 [525] |
| 3. 光合作用 [500] | 3. 生态系统 [526] |
| 4. 植物对水分的吸收和利用 [502] | 4. 人与生物圈 [528] |

- | | |
|--------------------------------|--|
| 5. 植物的矿质营养 [502] | |
| 6. 人和动物体内三大营养物质的代谢 [503] | |
| 7. 细胞呼吸 [504] | |
| 8. 新陈代谢的概念及其基本类型 [505] | |

人体内环境稳态

- | |
|----------------------------|
| 1. 内环境与稳态 [530] |
| 2. 水和无机盐的平衡及调节 [530] |
| 3. 血糖的平衡及调节 [531] |
| 4. 人的体温及其调节 [532] |

生命活动的调节

免疫

- | | |
|------------------------------|--------------------------|
| 1. 植物的激素调节 [506] | 1. 免疫的概念及种类 [533] |
| 2. 人和高等动物生命活动的调节 [506] | 2. 特异性免疫 [533] |
| 3. 动物行为产生的生理基础 [509] | 3. 免疫失调引起的疾病 [534] |
| | 4. 免疫学的应用 [535] |

生物的生殖和发育

微生物

- | | |
|------------------------|----------------------------------|
| 1. 生物的生殖 [510] | 1. 微生物的类群 [535] |
| 2. 生物的个体发育 [511] | 2. 微生物的营养 [536] |
| | 3. 微生物的代谢 [537] |
| | 4. 微生物的生长——微生物群体数量变化 [538] |
| | 5. 发酵工种 [539] |

生物的遗传和变异

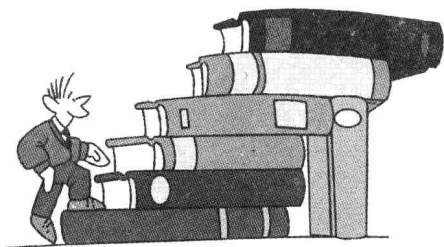
- | | |
|--------------------------|--|
| 1. 遗传的物质基础 [513] | |
| 2. 遗传的基本规律 [515] | |
| 3. 性别决定与伴性遗传 [519] | |

数 学

SHU XUE

求知识就像爬楼梯，想一下爬四五级，一步登天，会掉下来。不要生吞活剥，不求甚解，要老老实实地埋头苦干。

——华罗庚





集合与函数



1. 集合

1.1

$$A \subseteq B$$



解析快易

通

(1) $A \subseteq B$ 的意义① $\emptyset \subseteq B$ 规定空集 $\emptyset$ 是任意集合 B 的子集.② $A \subseteq B$

设 $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$, 如果对任意的 $x \in A$, 都有 $x \in B$ 成立, 那么称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$.

此种情况下, 条件与结论的相互关系可以简记为

若 $x \in A$, 则 $x \in B \Leftrightarrow A \subseteq B$.(2) $A \subsetneq B$ 的意义① $\emptyset \subsetneq B$ 设 $B \neq \emptyset$, 规定 $\emptyset \subsetneq B$.② $A \subsetneq B$

设 $A \neq \emptyset$, 如果 $A \subseteq B$, 且至少存在一个 $x \in B$, 但 $x \notin A$, 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$.

(3) $A = B$ 的意义如果 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$, 那么称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

由以上讨论可知, $A \subseteq B$ 有两个方面的含义, 即 $A \subsetneq B$, 或 $A = B$. 对其理解, 可类比实数 $x \leq y \Leftrightarrow x < y$ 或 $x = y$.



运用快易

通

例 已知集合 $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{C | C \subseteq A\}$, 求集合 B .

分析与解答

► **解答:** $A = \{3, 4, 5\}$, A 的子集为 $\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}$.

又 $B = \{C | C \subseteq A\}$,所以 $B = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$.

①对 B 的理解应为“ B 是集合的集合”. 这是因为 B 中的代表元素为 C , C 适合的条件是 $C \subseteq A$, 即 C 是 A 的子集, 进一步明确对 B 的理解, 即 B 是集合 A 的子集的集合.

②要注意, 求 A 的子集时, 易丢掉 $\emptyset$ 和它本身.

1.2

$$\complement_U A = \{x | x \in U, \text{且 } x \notin A, A \subseteq U\}$$



解析快易

通

已知全集 $U \neq \emptyset$, 集合 $A \subseteq U$, 由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做集合 A 在 U 中的补集, 记作 $\complement_U A$, 即 $\complement_U A = \{x | x \in U, \text{且 } x \notin A\}$.

几何解释见图 1-1.

由补集的定义, 有

$$\complement_U (\complement_U A) = A, \complement_U \emptyset = U, \complement_U U = \emptyset.$$

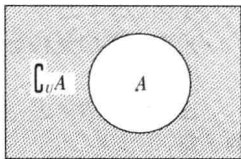


图 1-1



运用快易

通

例 若全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 5\}$, $B \subsetneq \complement_U A$, 则这样的集合 B 最多有 ()

A. 5 个

B. 7 个

C. 6 个

D. 8 个

分析与解答

► **分析:** 弄清符号“ $\subsetneq$ ”与“ $\complement_U A$ ”的含义是解本题的关键.

► **解答:** $\complement_U A = \{2, 3, 4\}$, B 是 $\{2, 3, 4\}$ 的真子集, B 可以是 $\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$, 共 7 个.

故选 B.

1.3

$$A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$$



解析快易

通

(1) $A \cap B$ 的意义

①若 A, B 至少有一个为 $\emptyset$, 则 $A \cap B = \emptyset$.



②若 $A \neq \emptyset$, 且 $B \neq \emptyset$, 则

由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}.$$

③几何解释见图 1-2.

(2) 由交集的定义可得到如下关系:

$$A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B, A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset,$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

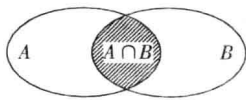


图 1-2



运用快易

通

例 设集合 $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $C = \{x | x^2 + 2x - 8 = 0\}$. 当 a 为何值时, $A \cap B \neq \emptyset$ 和 $A \cap C = \emptyset$ 同时成立?

分析 & 解答

►解答: $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$, $C = \{x | x^2 + 2x - 8 = 0\} = \{-4, 2\}$.

由 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ 可知, $3 \in A$, $2 \notin A$,

否则, 与 $A \cap B \neq \emptyset$ 且 $A \cap C = \emptyset$ 矛盾.

将 3 代入方程 $-x^2 - ax + a^2 - 1 = 0$,

得 $a = -2$, 或 $a = 5$.

当 $a = -2$ 时, $A = \{x | x^2 + 2x - 15 = 0\} = \{3, -5\}$, 此时, 集合 A 满足题设条件.

当 $a = 5$ 时, $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$, 此时 $A \cap C = \{2\} \neq \emptyset$, 集合 A 不符合题意. 所以 $a = -2$.

1.4

$$A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$$



解析快易

通

(1) $A \cup B$ 的意义

①若 $A = B = \emptyset$, 则 $A \cup B = \emptyset$.

②若 $A = \emptyset$ (或 $B = \emptyset$), $B \neq \emptyset$ (或 $A \neq \emptyset$), 则 $A \cup B = B$ (或 A).

③若 $A \neq \emptyset$, 且 $B \neq \emptyset$, 则 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$.

(2) 由交集、并集的定义可以得到如下关系:

① $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

② $A \cup B = B \cup A$, $A \cup \emptyset = A$.

③ $A \cap B = B \cap A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

④ $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

⑤ $A \cup B = A$, 且 $A \cup B = B \Leftrightarrow A = B$.

⑥ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

⑦ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\textcircled{8} \complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$$

$$\complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$$



运用快易

通

例 设方程 $x^2 + x + 2p = 0$ 的解集是 A , 方程 $2x^2 + qx + 2 = 0$ 的解集为 B , 且 $A \cap B = \{1\}$, 求 $A \cup B$.

分析与解答

► 解答: 由 $A \cap B = \{1\}$ 可知, $1 \in A$, 且 $1 \in B$.

把 $x=1$ 代入方程 $x^2 + x + 2p = 0$, 可得 $p = -1$, 这时, 方程 $x^2 + x + 2p = 0$, 即为 $x^2 + x - 2 = 0$, 解得 $x_1 = -2, x_2 = 1$, 所以 $A = \{-2, 1\}$. 同理可得 $B = \{1\}$. 所以 $A \cup B = \{-2, 1\}$.

1.5

$$\begin{aligned} A \cap B = A &\Leftrightarrow A \subseteq B, \\ A \cup B = A &\Leftrightarrow B \subseteq A \end{aligned}$$



解析快易

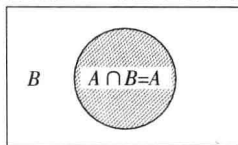
通

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$ 与 $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$, 表示集合间的交、并运算关系与集合间的包含关系的等价转换, 即

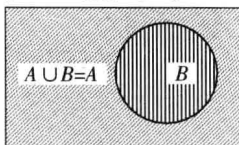
若 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$; 反之, 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$.

若 $A \cup B = A$, 则 $B \subseteq A$; 反之, 若 $B \subseteq A$, 则 $A \cup B = A$.

几何解释见图 1-3 (图中阴影部分表示 $A \cap B$, 或 $A \cup B$).



(1)



(2)

图 1-3



运用快易

通

例 设 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | ax - 2 = 0\}$, $A \cup B = A$, 求由实数 a 构成的集合 C .

分析与解答

► 解答: $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$.

由 $A \cup B = A$ 可知, $B \subseteq A$.

因为 $B = \{x | ax - 2 = 0\}$, 所以, B 有三种可能, 即

$$B = \emptyset, B = \{1\}, B = \{2\}.$$

当 $B = \emptyset$ 时, $a = 0$; 当 $B = \{1\}$ 时, $a = 2$; 当 $B = \{2\}$ 时, $a = 1$. 所以 $C = \{0, 1, 2\}$.



2. 函数的概念

2.1

$$y = f(x)$$



解析快易

通

(1) 函数 $y = f(x)$ 的定义

① 古典定义

如果在某变化过程中有两个变量 x 与 y , 并且对于 x 在某个范围内的每一个确定的值, 按照某种对应法则, y 都有唯一确定的值和它对应, 那么 y 就是 x 的函数, x 叫做自变量, x 的取值范围叫做函数的定义域, 和 x 的值对应的 y 的值叫做函数值, 函数值的集合叫做函数的值域. y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$.

② 现代定义

从非空数集 A 到非空数集 B 的一个映射 $f: A \rightarrow B$, 叫做 A 到 B 的函数, 记作 $y = f(x)$, 其中 $x \in A, y \in B$, 原象集 A 叫做函数的定义域, 象集 C 叫做函数的值域, 一般地 $C \subseteq B$.

③ 两种定义的比较

函数的古典定义和现代定义本质上是一致的, 只是两种形式的侧重点有所不同. 古典定义侧重于“运动变化”观点, 现代定义侧重于“集合映射”观点, 不论用哪种形式对函数加以定义, 函数的内涵不会因为其定义形式的不同而有所差异; 在函数的定义中涉及两个非空数集和一个对应法则, 即定义域 A , 值域 C 和对应法则 f , 我们称之为函数的三要素, 其中对应法则 f 是核心. 由于函数的三要素确定以后, 函数随之确定, 因此函数是定义域、值域和对应法则的总和. 又由于函数的值域由其定义域和对应法则唯一确定, 所以有时我们也说函数有两要素——定义域、对应法则; y 是 x 的函数, 我们记作 $y = f(x)$. 对记号 $y = f(x)$ 的理解应是: $y = f(x)$ 不一定是解析式的形式, 有时 $y = f(x)$ 可能是表格, 也可能是图象.



运用快易

通

例 求下列函数的定义域:

$$(1) f(x) = x^3 + 1; \quad (2) f(x) = \frac{1}{3x-5}; \quad (3) g(x) = \frac{(x+1)^0}{\sqrt{1-x-1}}$$

分析与解答

► **分析:** 一个函数由几部分构成, 求其定义域: 整式部分, x 不受限制; 分式部分, 分母不能为零; 形如 $[\varphi(x)]^0$ 的部分, $\varphi(x) \neq 0$; 形如 $\sqrt[n]{\psi(x)}$ 的部分, $\psi(x) \geq 0$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$.

►解答: (1) ∵ 函数 $f(x)$ 的解析式为整式, ∴ $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

(2) 由题意可知: $3x - 5 \neq 0$ 即 $x \neq \frac{5}{3}$,

∴ $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, \frac{5}{3}) \cup (\frac{5}{3}, +\infty)$.

(3) 由题意可知, $g(x)$ 的定义域由不等式组

$$\begin{cases} x+1 \neq 0, \\ 1-x \geq 0, \\ \sqrt{1-x}-1 \neq 0 \end{cases} \quad \text{确定, 解这个不等式组, 得 } x \leq 1 \text{ 且 } x \neq 0, x \neq -1,$$

∴ 函数的定义域是 $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1]$.

2.2

$$y = f[g(x)]$$



解析快易

通

复合函数 $y = f[g(x)]$ 的意义

如果 y 是 u 的函数, 记为 $y = f(u)$, u 又是 x 的函数, 记为 $u = g(x)$, 且 $g(x)$ 的值域与 $f(x)$ 的定义域的交集非空, 则通过 u 确定了 y 是 x 的函数 $y = f[g(x)]$, 这时 y 叫做 x 的复合函数, 其中 u 叫做中间变量, $y = f(u)$ 叫做外层函数, $u = g(x)$ 叫做内层函数.



运用快易

通

例 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求 $f(x+m) + f(x-m)$ ($m > 0$) 的定义域.

分析与解答

►解答: $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$.

$$\text{解不等式组 } \begin{cases} 0 \leq x+m \leq 1, \\ 0 \leq x-m \leq 1, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -m \leq x \leq 1-m, \\ m \leq x \leq 1+m. \end{cases} \quad \textcircled{*}$$

当 $1-m < m$, 即 $m > \frac{1}{2}$ 时, 不等式组 $\textcircled{*}$ 的解集为 $\emptyset$;

当 $1-m > m$, 即 $0 < m < \frac{1}{2}$ 时, 不等式组 $\textcircled{*}$ 的解集为

$$\{x | m \leq x \leq 1-m\};$$

当 $1-m = m$, 即 $m = \frac{1}{2}$ 时, 不等式组 $\textcircled{*}$ 的解集为 $\{x | x = \frac{1}{2}\}$. 所以,

$f(x+m) + f(x-m)$ 的定义域是

当 $m > \frac{1}{2}$ 时, $\emptyset$;

当 $0 < m < \frac{1}{2}$ 时, $\{x | m \leq x \leq 1-m\}$;

当 $m = \frac{1}{2}$ 时, $\{\frac{1}{2}\}$.



3. 函数的性质

3.1

<<<

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



解析快易

通

(1) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ 与 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ 的意义

对于给定区间上的函数 $f(x)$, 如果对于这个区间上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ [$f(x_1) > f(x_2)$], 那么就说函数 $f(x)$ 在这个区间上是增函数(减函数). 这个区间叫做 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 关于单调函数的重要结论

① 若函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 在公共区间 A 上都是增(减)函数, 则函数 $y=f(x)+g(x)$ 在 A 上也是增(减)函数.

② 若两个正值函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 在公共区间 A 上都是增(减)函数, 则函数 $y=f(x) \cdot g(x)$ 在区间 A 上也是增(减)函数.

③ 若两个负值函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 在公共区间 A 上都是增(减)函数, 则函数 $y=f(x) \cdot g(x)$ 在区间 A 上也是减(增)函数.

(3) 复合函数的单调性

设函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 在公共区间 A 上都是单调函数, 那么函数 $y=f[g(x)]$ 在 A 上也是单调函数; 并且, 若 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的单调性相同(反), 则 $y=f[g(x)]$ 是增(减)函数, 也就是说, 当 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 同是增函数或者同是减函数时, $y=f[g(x)]$ 是增函数; 当 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 一增一减时, 那么 $y=f[g(x)]$ 就是减函数, 简记为“同增异减”.



运用快易

通

例 证明函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + a$ ($a \in \mathbf{R}$) 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

分析与解答

► 证明:

设元

设 $0 \leq x_1 < x_2 < +\infty$, 则

$$x_2 - x_1 > 0.$$

因为 $f(x_2) - f(x_1)$

$$\left. \begin{aligned} &= (x_2^{\frac{2}{3}} + a) - (x_1^{\frac{2}{3}} + a) \\ &= x_2^{\frac{2}{3}} - x_1^{\frac{2}{3}} \\ &= (x_2^{\frac{1}{3}} + x_1^{\frac{1}{3}})(x_2^{\frac{1}{3}} - x_1^{\frac{1}{3}}) \\ &= \frac{(x_2^{\frac{1}{3}} + x_1^{\frac{1}{3}})(x_2 - x_1)}{x_2^{\frac{2}{3}} + x_2^{\frac{1}{3}}x_1^{\frac{1}{3}} + x_1^{\frac{2}{3}}} > 0. \end{aligned} \right\}$$

所以, $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + a$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数.