

周武能 苏宏业 著

区域稳定性约束 鲁棒控制理论及应用



科学出版社
www.sciencep.com

区域稳定性约束鲁棒控制 理论及应用

周武能 苏宏业 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书结合作者近年来的研究工作,详细介绍了用于动态系统稳定性分析与控制的区域,如左半复平面、圆域、线性矩阵不等式区域和二次矩阵不等式区域等,给出了矩阵区域稳定性的条件,以及动态系统区域稳定性约束下鲁棒控制与滤波方法。主要内容包括 α -稳定性分析与控制方法, D -稳定性分析与控制方法,线性矩阵不等式区域稳定性分析与控制方法以及二次矩阵不等式区域稳定性分析与控制方法等。重点介绍了区域稳定性的谱分析方法、测度分析法和线性矩阵不等式方法,以及区域稳定性约束下的状态反馈控制器、输出反馈控制器、状态观测器、可靠控制器、模糊控制器及滤波器的分析与设计方法等。此外,还特别介绍了奇异系统区域稳定性约束鲁棒控制方法的最新成果。

本书可作为从事自动控制工作的科研人员、工程技术人员以及高等院校自动化及其他相关专业的教师、研究生和高年级本科生的研究与教学用书。

图书在版编目(CIP)数据

区域稳定性约束鲁棒控制理论及应用/周武能,苏宏业著. —北京:科学出版社,2009

ISBN 978-7-03-023843-6

I. 区… II. ①周…②苏… III. 鲁棒控制-研究 IV. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 213221 号

责任编辑:王志欣 孙 芳 / 责任校对:鲁 素

责任印制:赵 博 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 2 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2009 年 2 月第一次印刷 印张:9 1/4

印数:1—2 500 字数:174 000

定价:35.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

前 言

稳定性是动力系统必须满足的性能。一个实际系统除了应具有良好的稳态特性外,还需具有良好的瞬态特性,以保证系统的品质要求,而系统的瞬态特性一般由其极点的具体位置所确定。因此,系统极点配置问题一直是控制理论中的重要研究课题之一。由于系统的不确定性和时滞的产生,使得系统极点配置很难实现。因此人们转而研究如何使系统在保持稳定的前提下,其闭环极点全部落入左半复平面上某个指定的区域内,这就是所谓的区域稳定性问题。特别是线性矩阵不等式和二次矩阵不等式区域,它们以圆域、左半复平面、角域和扇形区域等为特例,在此类区域稳定性约束下研究系统性能分析与控制问题更具广泛性、复杂性和理论与工程意义。

本书针对状态系统和半状态系统(或奇异系统),首次较系统地介绍了区域稳定性理论及区域稳定性约束下鲁棒控制器与滤波器的分析与设计方法,所涉及的区域稳定性包括 α -稳定性、 D -稳定性、线性矩阵不等式区域稳定性和二次矩阵不等式区域稳定性等,所设计的控制器包括状态反馈控制器、输出反馈控制器、状态观测器等。本书从区域稳定性这个层面阐述了鲁棒 H_∞ 控制的思想和方法,较全面地反映了国内外有关系统区域稳定性方面的最新成果。

本书的取材以区域稳定性为主线,结合可靠控制和模糊控制思想,所选取的区域从特殊到一般,所选取的系统从状态系统到奇异系统,符合思维发展规律。本书行文力求言简意明,自成体系。通过阅读本书,读者可比较全面系统地了解动态系统区域稳定性方面的成果,为进一步的研究打下良好的基础。

本书的写作得到了许多学者的关心和帮助,他们的研究方法给予了作者很好的启发。另外,浙江大学博士生吴争光和柏建军、东华大学博士生陆宏谦等参加了本书部分内容的编写、仿真或校对工作。最后,本书的出版得到了国家863计划重点项目(项目编号:2008AA042902)、国家创新研究群体科学基金(NCRGSFC: 60721062)和东华大学信息学院的资助。在此一并向他们表示衷心的感谢。

限于作者水平,书中不妥之处在所难免,敬请广大读者批评指正。

2009年1月

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 常见区域 $\mathcal{R}$ 及 $\mathcal{R}$ -稳定性	1
1.1.1 $\mathcal{R}_{AI}$ 阶段	2
1.1.2 $\mathcal{R}_{LMI}$ 阶段	3
1.1.3 $\mathcal{R}_{QMI}$ 阶段	6
1.2 不确定系统简介	7
1.3 时滞系统介绍	8
1.4 常见系统性能	9
1.5 控制系统设计分类	10
1.6 区域稳定性分析方法概述	12
第 2 章 α -稳定性分析与控制	13
2.1 α -稳定 H_∞ 动态观测器分析与设计	13
2.1.1 问题的描述	13
2.1.2 动态观测器分析	14
2.1.3 动态观测器综合	16
2.1.4 数值例子	21
2.2 不确定时滞系统鲁棒 α -稳定约束输出反馈控制	22
2.2.1 系统描述及问题的提出	22
2.2.2 鲁棒 α -稳定 H_∞ 输出反馈控制器设计	23
2.2.3 数值例子	29
2.3 线性参数变化系统鲁棒 α -稳定 H_∞ 状态反馈控制	29
2.3.1 引言	29
2.3.2 系统描述	30
2.3.3 状态反馈控制器分析	30
2.3.4 鲁棒 α -稳定 H_∞ 状态反馈控制律综合	32
2.3.5 滞后状态反馈控制	35
2.3.6 数值例子	35
2.4 谱分析法	36
2.4.1 标称系统的 α -稳定性	36

2.4.2 不确定系统 α -稳定性分析	38
2.4.3 例子	39
2.5 测度分析法	39
2.6 不确定奇异系统的 α -稳定性分析	41
第3章 D-稳定性分析与控制	46
3.1 D-稳定性的谱分析法	46
3.2 D-稳定性的测度分析法	48
3.2.1 系统描述	49
3.2.2 主要结论	49
3.2.3 数值例子	51
3.3 D-稳定性的线性分式变换法	52
3.3.1 引言	52
3.3.2 不确定线性系统鲁棒 D-稳定性分析	53
3.3.3 不确定离散时滞系统鲁棒 D-稳定性与镇定	55
3.4 D-稳定鲁棒可靠控制器设计	61
3.4.1 引言	61
3.4.2 故障模型及问题的形成	62
3.4.3 主要结果	63
3.4.4 数值仿真实例	71
3.5 奇异系统鲁棒 D-稳定性	73
3.5.1 问题的描述和预备	73
3.5.2 主要结果	75
3.5.3 数值例子	78
3.5.4 不确定连续奇异系统 D-稳定性分析	79
第4章 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$-稳定性分析与控制	82
4.1 动态区间系统的二次 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ -镇定	82
4.2 一类线性系统 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ -稳定性约束滤波器设计	88
4.3 不确定奇异系统 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ -稳定性约束状态观测器设计	93
第5章 $\mathcal{R}_{\text{QMI}}$-稳定性分析与控制	99
5.1 一类不确定线性系统二次 $\mathcal{R}_{\text{QMI}}$ -稳定的 LMI 条件	99
5.1.1 问题描述	99
5.1.2 主要结果	100
5.1.3 数值例子	103
5.2 具有方差和区域极点约束的不确定线性系统鲁棒控制	105
5.2.1 引言	105

5.2.2 系统描述	106
5.2.3 主要结果	108
5.2.4 数值仿真实例	112
5.3 不确定 T-S 模型的区域极点约束鲁棒控制	114
5.3.1 引言	114
5.3.2 T-S 模糊模型及问题的描述	115
5.3.3 主要结果	117
5.3.4 仿真示例	119
5.4 奇异系统鲁棒 $\mathcal{R}_{\text{QMI}}$ -稳定性分析	122
参考文献	126
附录 Lyapunov 稳定性理论及相关数学基础	132
A.1 Lyapunov 稳定性理论及有界实引理	132
A.2 LMI 及常用的矩阵不等式	133
A.3 矩阵测度及其性质	135
A.4 矩阵的 Kronecker 乘积及其性质	135
A.5 矩阵的谱及其性质	136
A.6 若干记号	137

第 1 章 绪 论

众所周知,稳定性是动力系统必须满足的性能。对于定常线性连续系统,其稳定的充要条件是极点在以虚轴为界的左半复平面内。而对于一个定常线性离散系统,其稳定的充要条件是极点在复平面上以原点为中心的单位圆内。另外,一个实际系统除了应具有良好的稳态特性外,还需具有良好的瞬态特性,以保证系统的品质要求,如时域形式的调整时间、超调量等,及频域形式的增益裕度和相位裕度等。而系统的瞬态性能一般由其极点的具体位置所确定。因此,闭环系统极点配置问题一直是控制理论中的重要研究课题之一。由于系统不确定性和时滞的产生,使得系统极点配置很难实现。因此,人们转而研究如何使系统在保持稳定的前提下,其闭环极点全部落入左半复平面上某个指定的区域 $\mathcal{R}$ 内,这就是所谓的区域稳定性($\mathcal{R}$ -稳定性)问题。特殊地,如果 $\mathcal{R}$ 是以虚轴为边界的左半复平面,则 $\mathcal{R}$ -稳定性即是连续系统的稳定性;如果 $\mathcal{R}$ 是以直线 $\{s: \operatorname{Re}(s) = -\alpha\} (\alpha > 0)$ 为边界的左半复平面,则系统的 $\mathcal{R}$ -稳定性即是 α -稳定性;如果 $\mathcal{R}$ 是左半复平面中的某个开圆盘 D ,则系统的 $\mathcal{R}$ -稳定性即是 D -稳定性。另外,还有许多用于研究区域稳定性的特殊区域,如角域和扇形区域等。近年来,人们从理论上开始研究基于代数不等式区域(algebra inequality region, 简记为 $\mathcal{R}_{AI}$)(Gutman et al., 1981)、线性矩阵不等式区域(linear matrix inequality region, 简记为 $\mathcal{R}_{LMI}$)(Chilali et al., 1996)和二次矩阵不等式区域(quadratic matrix inequality region, 简记为 $\mathcal{R}_{QMI}$)(Peaucelle et al., 2000)的区域稳定性问题。这些区域均以圆域、左半复平面、角域和扇形区域等为特例,因此,此类区域稳定性研究更具广泛性、复杂性和理论与工程意义。

本章首先介绍复平面上用于区域稳定性研究的若干常见区域、 $\mathcal{R}$ -稳定性及其充要条件,接着依次介绍几种基本的不确定性、时滞、系统性能、反馈系统及 $\mathcal{R}$ -稳定性的研究方法等。

1.1 常见区域 $\mathcal{R}$ 及 $\mathcal{R}$ -稳定性

多项式求根问题吸引众多数学家为之奋斗了三百多年。这一问题是从 Descartes 考虑如何将几何问题简化为代数方程的解而开始的,到 19 世纪 Sturm (1829)才第一次用系统论的方法研究多项式的根,19 世纪后半叶,许多数学家和工程学家开始考虑常微分方程的稳定性。矩阵特征根位于左半平面的条件由 Routh (1877)和 Hurwitz (1895)直接得到,后来又被 Lienard 等(1914)所简化。

线性微分方程稳定性的研究又导出了聚根(clustering roots)单位圆问题的研究,聚根单位圆的标准由 Cohn (1914) 获得且由 Jury (1971) 进一步发展, Lyapunov 用不同的方法得到了聚根单位圆的新标准, 后来 Jury (1974) 证明了这一新标准与 Hurwitz 条件是等价的。在后来的几十年中, 许多人都致力于复平面上更一般区域聚根问题的研究。其基本问题如下。

问题 1.1.1 设 A 是一个方阵, $\mathcal{R}$ 是复平面上一个区域, 在什么条件下, A 的特征值全部落入区域 $\mathcal{R}$ 中? 此问题称为矩阵 A 的 $\mathcal{R}$ -稳定性问题。

关于矩阵 $\mathcal{R}$ -稳定性的研究, 从所考虑的区域来看, 大致可分为三个阶段: $\mathcal{R}_{AI}$ 阶段、 $\mathcal{R}_{LMI}$ 阶段和 $\mathcal{R}_{QMI}$ 阶段。

1.1.1 $\mathcal{R}_{AI}$ 阶段

第一个阶段是 $\mathcal{R}_{AI}$ 阶段, 这一阶段的总结性工作可参见相关文献 (Gutman et al., 1981), 该文献定义了两种 $\mathcal{R}_{AI}$ 。这种区域以常见区域为特例, 得到了矩阵 $\mathcal{R}_{AI}$ 稳定的充要条件, 还将所得结果用于动态系统控制器的设计。

定义 1.1.1 $\mathcal{R}_{AI}$ 是复平面上符合下述条件的复点的集合:

$$\mathcal{R}_{AI} = \{z \in \mathbb{C} : \sum_{0 \leq k, l \leq m} r_{kl} z^k (\bar{z})^l < 0\} \quad (1.1.1)$$

式中, 系数 r_{kl} 是实数, 且满足 $r_{kl} = r_{lk}$; m 为给定的正整数。

对于 $\mathcal{R}_{AI}$, Gutman 等 (1981) 得到下述基本结论。

定理 1.1.1 一个矩阵 A 是 $\mathcal{R}_{AI}$ -稳定的充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 $X > 0$, 使得

$$\sum_{0 \leq k, l \leq m} r_{kl} A^k X (A^T)^l < 0 \quad (1.1.2)$$

值得注意的是, 在式 (1.1.1) 中, 取 $m = 1, r_{00} = r_{11} = 0, r_{01} = r_{10} = \frac{1}{2}$, 则 $\mathcal{R}_{AI}$

即为以虚轴为界的左半平面。这时, $\mathcal{R}_{AI}$ -稳定的条件式 (1.1.2) 变为由 Lyapunov 定理得出的连续系统 $\dot{x}(t) = Ax(t)$ 的稳定条件, 即存在 $X > 0$, 使得

$$XA^T + AX < 0 \quad (1.1.3)$$

同理, 用于连续系统 $\dot{x}(t) = Ax(t)$ 稳定性的判据和离散系统 $x(k+1) = Ax(k)$ 稳定性的判据都可归结为定理 1.1.1 的特例。

尽管定理 1.1.1 的结果比较理想, 然而, 基于定理 1.1.1 的控制器综合几乎是不可跟踪的, 这主要是由式 (1.1.2) 左端矩阵多项式的特性所决定的。为保持综合问题是可跟踪的, 必须依据状态空间矩阵 A 的 Lyapunov 稳定特性式 (1.1.3)。除了几种特殊情形外, 式 (1.1.2) 一般不是线性矩阵不等式 (linear matrix inequality, LMI), 也没有系统的方法将它转化为 LMI。事实上, $\mathcal{R}_{AI}$ 不必是凸区域。为了有效地进行控制器综合, 有必要寻找基于 LMI 表示的稳定性分析区域, 这就是 $\mathcal{R}_{LMI}$

产生的背景之一。

另一方面,考虑如图 1.1.1 所示区域。它是由直线 $\{s: \operatorname{Re}(s) = -\alpha\}$ ($\alpha > 0$)、圆周以及扇形边界所围成。因此,该区域可表示为

$$S(\alpha, r, \theta) = \{x + jy \in C: x < -\alpha, \\ |x + jy| < r, x \tan \theta < -|y|\}$$

式中, $\alpha, r, \theta > 0$ 是给定的标量。如果闭环系统的极点在区域 $S(\alpha, r, \theta)$ 中,则被控系统是 α -稳定的(即具有最小衰减度 α),且具有最小阻尼比 $\zeta = \cos \theta$ 和一个最大自然频率 $\omega_n = r \sin \theta$,这将进一步保证被控系统诸如最大超调、衰减时间、上升时间和调节时间等许多过渡过程指标不超过由 ζ 和 ω_n 所确定的上界。然而,这样一个典型区域却不能表示为 $\mathcal{R}_{AI}$ [如式(1.1.1)]的形式,这就促使人们去寻找新的区域,以更好地研究动态系统的特性。

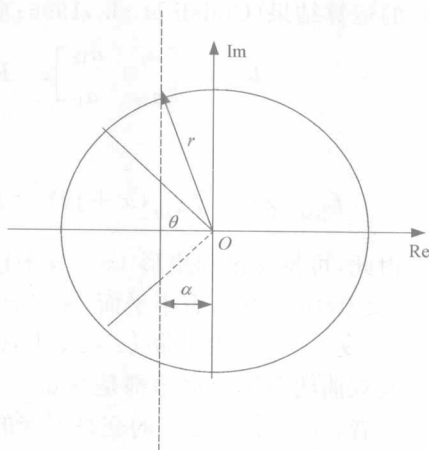


图 1.1.1 区域 $S(\alpha, r, \theta)$

1.1.2 $\mathcal{R}_{LMI}$ 阶段

第二个阶段是 $\mathcal{R}_{LMI}$ 阶段。这一阶段开创性的工作当属 Chilali 等(1996),该文首次定义了 $\mathcal{R}_{LMI}$,并研究一类线性系统在区域极点约束下的状态反馈和输出反馈控制问题。

定义 1.1.2 复平面上关于复点 z 的一个子集称为 $\mathcal{R}_{LMI}$,如果存在一个对称矩阵 $R_{11} \in R^{m \times m}$ 和一个矩阵 $R_{12} \in R^{m \times m}$,使得其复点满足 $R_{11} + zR_{12} + \bar{z}R_{12}^T < 0$,记为

$$\mathcal{R}_{LMI} = \{z \in C: R_{11} + zR_{12} + \bar{z}R_{12}^T < 0\} \quad (1.1.4)$$

矩阵值函数

$$f_{\mathcal{R}_{LMI}}(z) = R_{11} + zR_{12} + \bar{z}R_{12}^T \quad (1.1.5)$$

称为该 $\mathcal{R}_{LMI}$ 的特征函数,且其取值在 $m \times m$ 维 Hermitian 矩阵空间, $f_{\mathcal{R}_{LMI}}(z) < 0$ 表示矩阵 $f_{\mathcal{R}_{LMI}}(z)$ 是负定的。

由定义 1.1.2 可以看出,复平面上的 $\mathcal{R}_{LMI}$ 就是由 z 和 $\bar{z}$ 表示的 LMI 形式的子集,或者等价地说,它是以 $x = \operatorname{Re}(z)$ 和 $y = \operatorname{Im}(z)$ 为变量的 LMI 的可行域。事实上,这样的 $\mathcal{R}_{LMI}$ 是凸区域。另外,对任意 $z \in \mathcal{R}_{LMI}$, $f_{\mathcal{R}_{LMI}}(\bar{z}) = \overline{f_{\mathcal{R}_{LMI}}(z)} < 0$,故 $\bar{z} \in \mathcal{R}_{LMI}$,这说明 $\mathcal{R}_{LMI}$ 是关于实轴对称的区域。

$\mathcal{R}_{LMI}$ 不仅包含以前常见的聚根区域,而且形成复平面上关于实轴对称的凸区

域的稠密子集,这即是说,复平面上任一关于实轴对称的凸区域都可表示为若干 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 的运算结果(Chilali et al., 1996; 俞立, 2002)。事实上,在式(1.1.4)中取

$$R_{11} = \begin{bmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{12} & a_1 \end{bmatrix}, \quad R_{12} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_1 & b_{12} + 1 \\ b_{12} - 1 & b_2 \end{bmatrix}$$

则

$$f_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(z) = f_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(x + jy) = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 x & a_{12} + b_{12} x + jy \\ a_{12} + b_{12} x - jy & a_2 + b_2 x \end{bmatrix} \quad (1.1.6)$$

由此,可推得锥顶扇形 $\{z = x + jy: ax + b < -|y|\}$, 左半平面 $\{z = x + jy: x + \alpha < 0\} (\alpha > 0)$, 右半平面 $\{z = x + jy: x + \alpha > 0\} (\alpha > 0)$, 垂直带 $\{z = x + jy: h_1 < x < h_2\}$, 水平带 $\{z = x + jy: |y| < w\}$, 椭圆所围区域、抛物线所围区域以及双曲线所围区域等都是 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 。

再者, $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 关于集合的交是不变的。特别地,给定两个 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}: R_1$ 和 R_2 , 其相应的特征函数分别是 f_{R_1} 和 f_{R_2} , 则其交 $R_1 \cap R_2$ 也是 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$, 其特征函数是

$$f_{R_1 \cap R_2} = \text{diag}\{f_{R_1}, f_{R_2}\} \quad (1.1.7)$$

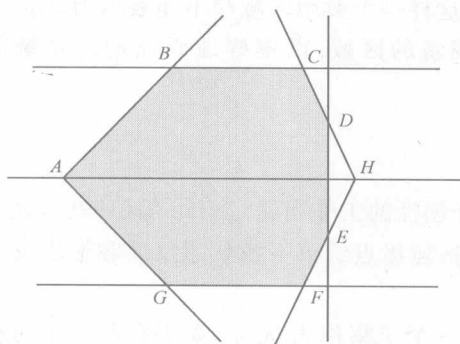


图 1.1.2 凸多边形区域

进一步,由数学归纳法可知,任意有限个 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 的交还是 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 。由这一性质可得到复平面上更为复杂的 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 。例如,图 1.1.2 中的阴影部分所表示的关于实轴对称的凸多边形区域 (A, B, C, D, E, F, G) 是一个 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 。因为它可表示成直线 (D, E) 的左半平面、直线 (B, C) 和直线 (G, F) 围成的水平带形区域,以及两个锥顶扇形这四个 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 的交。再例如,图 1.1.1 所示区域也是 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 。

由于任意一个凸区域都可以用凸多边形来逼近,而且这样的逼近可以达到任意需要的精度。因此, $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 的全体构成关于实轴对称的凸区域全体的一个稠密子集。根据这个结论,对控制中感兴趣的凸区域(实系统的极点总是以共轭的形式出现,因此控制系统设计所考虑的凸区域总可以假定是关于实轴对称的),总可以找到一个 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 来近似,而且这样的近似可以达到任意需要的精度。另外, LMI 工具箱提供了一个函数 `lmireg` 来确定所需要的 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 。

综上所述, $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 具有广泛性和实用性,用它作为聚根区域可以得到非常理想的结果。

定理 1.1.2 (Chilali et al., 1996) 给定由式(1.1.4)描述的 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$, 则矩阵 $A \in R^{n \times n}$ 是 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ -稳定的充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 $X \in R^{n \times n}$, 使得

$$M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(A, X) < 0 \quad (1.1.8)$$

式中,

$$M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(A, X) = R_{11} \otimes X + R_{12} \otimes (AX) + R_{12}^T \otimes (AX)^T \quad (1.1.9)$$

这里, $\otimes$ 是矩阵的 Kronecker 乘积。

证明 (充分性) 设 λ 是 A 的任一特征值, $v \in C^n$ 是满足 $v^* A = \lambda v^*$ 的非零向量。利用恒等式

$$(I_m \otimes v^*) M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(A, X) (I_m \otimes v) = (v^* X v) \otimes f_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(\lambda) \quad (1.1.10)$$

式中, v^* 表示 v 的共轭并转置。容易得知, $M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(A, X) < 0$ 和 $X > 0$ 蕴含 $f_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(\lambda) < 0$, 即 $\lambda \in \mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 。因此, 当式(1.1.8)成立时, A 是 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ -稳定的。

(必要性) 假设 A 是 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ -稳定的, 要证存在 $X > 0$, 使得 $M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(A, X) < 0$ 。为此, 将函数 $M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}$ 延拓至复矩阵 $A \in C^{n \times n}$ 和 $X = X^* \in C^{n \times n}$, 如下:

$$M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(A, X) = R_{11} \otimes X + R_{12} \otimes (AX) + R_{12}^T \otimes (AX)^*$$

首先, 考虑 A 为一个对角矩阵的情形, 即 $A = \Delta = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \in \mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 。容易验算得

$$M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(\Delta, I) = U^T \text{diag}\{f_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(\lambda_1), f_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(\lambda_2), \dots, f_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(\lambda_n)\} U$$

式中, U 是某个变换矩阵。因此, $M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(\Delta, X) < 0$ 对 $X = I$ 成立。

对一般情形, 令 Δ 是矩阵 A 的特征值所形成的对角矩阵。由以上的讨论知, $M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(\Delta, I) < 0$ 。对 A 的若当标准形, 构造可逆矩阵 T_k 的一个序列, 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^{-1} A T_k = \Delta$ 。例如, 若 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, 则取 $T_k = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。由于 $M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(Y, I)$ 是 Y 的连续函数, 所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(T_k^{-1} A T_k, I) = M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(\Delta, I) < 0 \quad (1.1.11)$$

因此, 对充分大的 k , $M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(T_k^{-1} A T_k, I) < 0$ 。取其中的一个 k , 并令 $T = T_k$ 。利用恒等式 $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ 以及 $M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(A, X)$ 的定义得

$$(I_m \otimes T) M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(T^{-1} A T, I) (I_m \otimes T^*) = M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(A, T T^*) \quad (1.1.12)$$

结合 $M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(T^{-1} A T, I) < 0$, 由式(1.1.12)可得, 对 $X = T T^* > 0$, $M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(A, X) < 0$ 。

注意到, 虽然 $X = T T^*$ 不必是实的, 但由于 A 是实的, 所以 X 的实部仍然满足 $\text{Re}(X) > 0$, 且有 $M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(A, \text{Re}(X)) = \text{Re}(M_{\mathcal{R}_{\text{LMI}}}(A, X)) < 0$ 。证毕

一个很自然的问题是, 一个矩阵的特征根同时在两个 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 中的条件是否可叠加? 事实上, 根据定理 1.1.2 和 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 交的特征函数性质式(1.1.7), 回答是肯定的, 即有以下推论。

推论 1.1.1 给定两个 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$, 矩阵 A 同时是 $\mathcal{R}_1$ -稳定的和 $\mathcal{R}_2$ -稳定的充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 $X \in R^{n \times n}$, 使得

$$M_{R_1}(A, X) < 0, \quad M_{R_2}(A, X) < 0$$

注意到, 式(1.1.8)是关于矩阵变量 X 的 LMI, 易于用 Matlab 工具箱求解。另一方面, 由于左半复平面、圆、带形、扇形等常见区域都是 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 的特例, 所以, 应用定理 1.1.2 可得矩阵或系统渐近稳定、 α -稳定、 D -稳定等充要条件, 且所得结果与已有结果是完全相同的。再者, 对图 1.1.1 所示区域 $\mathcal{R} = S(\alpha, r, \theta)$, 根据推论 1.1.1, 矩阵 A 是 $\mathcal{R}$ -稳定的充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 X , 使得

$$AX + XA^T + 2\alpha X < 0$$

$$\begin{bmatrix} -rX & AX \\ XA^T & -rX \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \sin\theta(AX + XA^T) & \cos\theta(AX - XA^T) \\ \cos\theta(AX - XA^T) & \sin\theta(AX + XA^T) \end{bmatrix} < 0$$

1.1.3 $\mathcal{R}_{\text{QMI}}$ 阶段

第三个阶段是 $\mathcal{R}_{\text{QMI}}$ 阶段。 $\mathcal{R}_{\text{QMI}}$ 是比 $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 更具一般性的区域, 它是由 Peaucelle 等(2000)首先引入的。

定义 1.1.3 复平面上满足

$$R_{11} + R_{12}z + R_{12}^T\bar{z} + R_{22}z\bar{z} < 0 \quad (1.1.13)$$

的点 z 的集合称为 $\mathcal{R}_{\text{QMI}}$, 即

$$\mathcal{R}_{\text{QMI}} = \{z \in \mathbb{C} : R_{11} + R_{12}z + R_{12}^T\bar{z} + R_{22}z\bar{z} < 0\} \quad (1.1.14)$$

式中, $R_{11}, R_{12}, R_{22} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, R_{11}, R_{22} 是对称矩阵, $R_{22} = LL^T$ 是半正定矩阵; d 称为 $\mathcal{R}_{\text{QMI}}$ 的秩。令 $M_{\mathcal{R}_{\text{QMI}}} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{bmatrix}$, 称之为 $\mathcal{R}_{\text{QMI}}$ 的矩阵。可见, $\mathcal{R}_{\text{QMI}}$ 是关于实

轴对称的凸区域。

注 1.1.1 由于式(1.1.13)是关于 z 和 $\bar{z}$ 的 QMI, 所以将式(1.1.14)称为 $\mathcal{R}_{\text{QMI}}$ 。若在式(1.1.14)中取 $R_{22} = 0$, 则式(1.1.14)变为式(1.1.4)。所以, $\mathcal{R}_{\text{LMI}}$ 是 $\mathcal{R}_{\text{QMI}}$ 的特例。用于系统 α -衰减度分析的区域 $\mathcal{R}(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < -\alpha\} (\alpha > 0)$ 和 D -稳定性分析的开圆盘 $D(c, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z + c| < r, c > r > 0\}$ 都是区域(1.1.14)的特例, 其区域的秩均为 1, 区域矩阵分别为

$$M_{\mathcal{R}(\alpha)} = \begin{bmatrix} 2\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{D(c, r)} = \begin{bmatrix} c^2 - r^2 & c \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

特别地, 用于连续系统稳定性分析的左半开复平面 $\mathcal{R}(0)$ 和用于离散系统稳定性分析的单位开圆盘 $D(0, 1)$ 等都是特殊的秩 1 区域。

同样地, 矩阵的 $\mathcal{R}_{\text{QMI}}$ -稳定性可用 LMI 来刻画。

定理 1.1.3 (Peaucelle et al., 2000) 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是 $\mathcal{R}_{\text{QMI}}$ -稳定的, 当且仅当存在一个对称正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得

$$R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes (PA) + R_{12}^T \otimes (A^T P) + R_{22} \otimes (A^T PA) < 0 \quad (1.1.15)$$

该定理的证明可仿照定理 1.1.2 的证明过程而得。

1.2 不确定系统简介

实际系统中存在大量不确定性,如高阶系统的降阶处理,非线性系统的线性化,各种信号测量噪声的忽略,包括对系统有影响但被忽略的输入信号,如各种干扰信号,以及工作环境的变化对系统参数和动态性能的影响等。所有这些可以概括为系统模型的不确定性,或称非结构化不确定性。另一类是结构化不确定性,比如系统模型由若干参数矩阵确定的情形等。具有不确定性系统的框图如图 1.2.1 所示。其中, ΔP 代表不确定性。

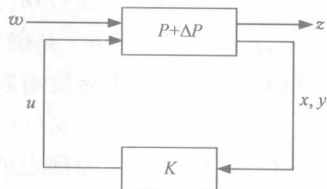


图 1.2.1 不确定控制系统结构

非结构化不确定性在控制系统的频域分析方法中应用较多,主要有以下几种类型:

$$(1 + \Delta W_2)P$$

$$P + \Delta W_2$$

$$P/(1 + \Delta W_2 P)$$

$$P/(1 + \Delta W_2)$$

式中, Δ 为范数有界的传递函数矩阵; W_2 为有确定性的加权矩阵,它可以描述不确定性的频率特性。一般来说,因为系统的不确定性体现在高频段,所以 W_2 的高频幅值要比低频幅值大。

结构化不确定性主要用于控制系统的时域分析,大致可分为以下几种。

设系统模型为

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) \quad (1.2.1)$$

式中, ΔA 表示结构化不确定性。

(1) 范数有界。若 ΔA 的范数 $\|\Delta A\| \leq \alpha$, 则称系统(1.2.1)具有范数有界不确定性,其中, α 为已知的标量。目前,经常用以下更广泛的形式:

$$\Delta A = DE(t)F, E^T(t)E(t) \leq I \quad (1.2.2)$$

(2) 凸组合。若不确定性矩阵满足(Fridman et al., 2002)

$$\Delta A = \sum_{i=1}^N f_i A_i, \quad 0 \leq f_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^N f_i = 1 \quad (1.2.3)$$

式中, A_i 为定常矩阵,则称系统(1.2.1)具有凸组合不确定性。

(3) 区间。若不确定性矩阵满足(Mao et al., 2003)

$$\Delta A = \sum_{i=1}^N \epsilon_i A_i, -1 \leq \epsilon_i \leq 1 \quad (1.2.4)$$

式中, A_i 为定常矩阵, 则称系统(1.2.1)具有区间不确定性。

(4) 绝对值。不确定性矩阵满足(Xu et al., 2002a)

$$|\Delta A| \leq M_A \quad (1.2.5)$$

的情形属于区间不确定性的特例, 其中, $|\Delta A|$ 表示 ΔA 的每个元素取绝对值后的矩阵, M_A 是一个定常矩阵。

(5) 秩 1 分解。若不确定性矩阵满足

$$\Delta A = \alpha_1(t) h_1^T g_1 + \alpha_2(t) h_2^T g_2 + \cdots + \alpha_m(t) h_m^T g_m \quad (1.2.6)$$

式中, $h_i, g_i (i = 1, \cdots, m)$ 是确定的并具有适当维数的一维实向量; $\alpha_i(t)$ 是有界的、Lebesgue 可测的实标量函数, 且满足

$$|\alpha_i(t)| \leq \sigma_i, \sigma_i \geq 0, i = 1, \cdots, m \quad (1.2.7)$$

这里, $\sigma_i (i = 1, \cdots, m)$ 为确定的标量, 则称系统(1.2.1)具有秩 1 分解不确定性。

(6) 线性。若不确定性矩阵满足

$$\Delta A = \alpha_1(t) A_1 + \alpha_2(t) A_2 + \cdots + \alpha_m(t) A_m \quad (1.2.8)$$

式中, $A_i (i = 1, \cdots, m)$ 是确定的实矩阵; $\alpha_i(t)$ 是有界的、Lebesgue 可测的实标量函数, 且满足

$$|\alpha_i(t)| \leq \sigma_i, \sigma_i \geq 0, i = 1, \cdots, m \quad (1.2.9)$$

这里, $\sigma_i (i = 1, \cdots, m)$ 为确定的标量, 则称系统(1.2.1)具有线性不确定性。

(7) 线性分式。若不确定性矩阵满足

$$\Delta A = M(I - \Phi D)^{-1} \Phi C \quad (1.2.10)$$

式中, M, D, C 是适当维数的矩阵, 且 D 的谱半径 $\rho(D)$ 满足 $\rho(D) < 1$; Φ 是未知矩阵, 且满足 $\Phi^T \Phi \leq I$, 则称系统(1.2.1)具有线性分式不确定性。

注 1.2.1 以上几种不确定性之间有一定的关系, 例如, 秩 1 分解不确定性是线性不确定性的特例, 范数有界不确定性是线性分式不确定性的特例, 线性不确定性可转化为范数有界不确定性, 范数有界不确定性可以用凸组合不确定性来逼近(蒋培刚, 2000)。从目前的研究状况来看, 研究较多的是范数有界不确定性、凸组合不确定性和区间不确定性等。

1.3 时滞系统介绍

实际工业系统中, 大量存在时滞现象, 如长管道进料或皮带传输过程, 缓慢的反应过程以及复杂的在线分析仪等, 均会导致时滞现象。另外, 为分析处理方便, 有时高阶复杂(或大时间常数)对象也被近似为适当低阶(或小时间常数)加纯滞后环节的系统。时滞的存在无论在理论分析上还是工程实际中都会给系统控制造成

特殊的困难。同无滞后过程比较,滞后使系统的响应性能变差,有时甚至难以稳定,更不能达到区域稳定的要求。因此,时滞系统的分析与综合历来是控制理论研究的热点和难点之一。将系统表达为状态空间方程时,其时滞有以下几种表现形式。

(1) 状态时滞。形如

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-d(t))$$

的系统称为具有状态时滞系统。

(2) 控制时滞。形如

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_1u(t-h(t))$$

的系统称为具有控制时滞系统。

(3) 分布时滞。形如

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + W \int_{t-\tau}^t f(s) ds$$

的系统称为具有分布时滞的系统。

通常,在一个系统模型中会出现多种类型的时滞,且时滞还不尽相同,有时滞后还是时变的,有时状态滞后可能是多重的。

1.4 常见系统性能

在工程应用中,仅仅要求系统稳定是不够的,还要求系统满足其他性能指标,甚至多目标的混合控制,这些性能指标主要包括线性二次型指标(linear quadratic, LQ)、稳态状态方差、区域稳定以及输入与输出间的关系约束等。设系统的状态空间方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dw(t) \\ y = C_1x(t) + B_1u(t) + D_1w(t) \\ z = C_2x(t) + B_2u(t) + D_2w(t) \end{cases} \quad (1.4.1)$$

式中, $x(t)$ 为状态向量; $u(t)$ 为控制输入向量; $w(t)$ 为扰动向量; y, z 分别为观测输出和控制输出向量。现将系统(1.4.1)的常见性能分述如下。

(1) $\mathcal{R}$ -稳定。系统矩阵 A 是 $\mathcal{R}$ -稳定的。

(2) H_∞ 性能。对于系统(1.4.1), 从干扰 w 到控制输出 z 的传递函数的无穷范数小于某一特定的常数, 即

$$\|G_{zw}(s)\|_\infty = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma \quad (1.4.2)$$

根据 Parseval 恒等式

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} v^*(t)u(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(j\omega)V^*(j\omega)d\omega = (U, V) \quad (1.4.3)$$

得,式(1.4.2)等价于

$$\int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + \rho u^2(t)]dt < \gamma^2 \int_0^{\infty} w^2(t)dt, \forall w \in L_2 \quad (1.4.4)$$

式中, $u, v \in L_2(-\infty, +\infty)$; $U(j\omega), V(j\omega)$ 分别为 $u(t)$ 和 $v(t)$ 的傅里叶变换的象; (u, v) 和 (U, V) 表示内积; ρ 是一个正的常数。因此, H_{∞} 性能指标问题是一个线性二次高斯(linear quadratic Gaussian, LQG)次优问题。

(3) H_2 性能。系统(1.4.1)的传递函数 $\|T(s)\| = C_1(sI - A)^{-1}D + D_1$ 的 H_2 范数定义为

$$\|T(s)\|_2 = \text{Trace}\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(j\omega)T^*(j\omega)d\omega\right)^{1/2} \quad (1.4.5)$$

可以证明, T 的 H_2 范数的平方等于系统脉冲响应总的输出能量。

(4) 成本指标。 $J^* = \min_{u(t)} J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$, 其中, Q, R 为正定矩阵。

(5) 方差指标。闭环稳态输出协方差满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} E[z(t)z^T(t)] < U$, 其中, U 是定常对称矩阵。

(6) 耗散性。对于系统(1.4.1), 引入如下二次型能量函数:

$$E(z, w, T) = \langle z, Qz \rangle_T + 2\langle z, Sw \rangle_T + \langle w, Rw \rangle_T \quad (1.4.6)$$

式中, $\langle u, v \rangle_T = \int_0^T u^T(t)v(t)dt, \forall u, v \in l_2^n[0, T]$; Q, S, R 为适当维数的权矩阵, 且 Q, R 是对称阵。若对于满足 $\beta(0) = 0$ 的某实函数 $\beta(\cdot)$, 使得 $E(z, w, T) - \beta(\phi(0)) \leq 0$, 其中, $\phi(t)$ 是初始函数, 则称系统(1.4.1)是耗散的。若还存在一个正数 $\alpha > 0$, 使得 $E(z, w, T) - \beta(\phi(0)) \leq -\alpha \langle w, w \rangle_T$, 则称系统是严格耗散的。

(7) 无源性。对于系统(1.4.1), 若存在半正定函数 $V(x) (V: X \rightarrow R)$, 使得

$$V(x(T)) - V(x(0)) \leq \int_0^T y^T(\tau)u(\tau)d\tau, \forall T > 0 \quad (1.4.7)$$

对任意的输入信号 $u \in R^m$ 都成立, 则称系统(1.4.1)是无源的, $V(x)$ 称为存储函数。对于无源系统(1.4.1)及能量函数 $V(x)$, 若存在正定函数 $Q(x)$, 使得

$$V(x(T)) - V(x(0)) \leq \int_0^T y^T(\tau)u(\tau)d\tau - \int_0^T Q(\tau)d\tau, \forall T > 0$$

对任意的输入信号 $u \in R^m$ 都成立, 则称系统(1.4.1)是严格无源的。

此外, 还有系统的饱和性、可靠性、容错性和非脆弱性等性能, 这里不再一一列举。

1.5 控制系统设计分类

我们知道, 动态系统 $\dot{x}(t) = Ax(t)$ 是 $\mathcal{R}$ -稳定的, 当且仅当其系统矩阵 A 是