CHENGRENZHONGDENGZHUANYE
XUEXIAOTONGBIANJIAOCAI

辽宁人民出版社

成人中等专业学校统编教材

数学

下

主编\徐益健

成人中等专业学校统编教材

数 学

下册

徐益健 主编

辽 宁 人 民 出 版 社

1993年·沈阳

（辽）新登字1号

成人中等专业学校统编教材
数学（上、下册）
Shuxue
徐益健 主编

辽宁人民出版社出版 辽宁省新华书店发行
（沈阳市和平区北一马路108号） 朝阳新华印刷厂印刷

字数：460，000 开本：787×1092 1/32 印张：$10\frac{1}{4}$
印数：1—20，000
1993年9月第1版 1993年9月第1次印刷

责任编辑：华玉洪
刘 杨
封面设计：刘冰宇
版式设计：赵耀今
插 图：金墉墉
责任校对：刘 涛 宋毓培
刘亚杰

ISBN 7-205-02713-6/G·422
定价：11.90元

目　　录

第一章　行列式……………………………………………… 1

§1—1　二阶、三阶行列式……………………………… 1

§1—2　行列式的性质……………………………………… 7

§1—3　n 阶行列式 ……………………………………… 12

§1—4　克莱姆法则 ……………………………………… 17

第二章　矩　阵 ………………………………………………… 26

§2—1　矩阵的概念 ……………………………………… 27

§2—2　矩阵的运算 ……………………………………… 31

§2—3　矩阵的秩和矩阵的初等变换 …………………… 44

§2—4　逆矩阵 …………………………………………… 50

§2—5　线性方程组的矩阵解法 ………………………… 59

§2—6　投入产出方法简介 ……………………………… 65

第三章　线性规划初步 ……………………………………… 91

§3—1　线性规划问题的数学模型 ……………………… 91

§3—2　两个变量线性规划问题的图解法 ……………… 98

§3—3　线性规划问题的标准形式……………………… 107

§ 3—4 单纯形法…………………………………… 111

第四章 极限与连续…………………………………… 137

§ 4—1 初等函数…………………………………… 137
§ 4—2 极限的概念…………………………………… 142
§ 4—3 无穷小量与无穷大量…………………………………… 151
§ 4—4 极限的四则运算法则…………………………………… 156
§ 4—5 两个重要极限…………………………………… 162
§ 4—6 函数的连续性…………………………………… 167

第五章 导数与微分…………………………………… 179

§ 5—1 导数的概念…………………………………… 179
§ 5—2 求导公式与求导法则…………………………………… 188
§ 5—3 导数在经济工作中的应用举例…………………………………… 203
§ 5—4 微分的概念…………………………………… 208

第六章 导数的应用…………………………………… 219

§ 6—1 拉格朗日中值定理…………………………………… 219
§ 6—2 罗比达法则…………………………………… 222
§ 6—3 判定函数的单调性…………………………………… 225
§ 6—4 函数的极值…………………………………… 229
§ 6—5 函数的最大值与最小值…………………………………… 235

第七章 不定积分…………………………………… 248

§ 7—1 原函数与不定积分…………………………………… 248

§ 7—2　不定积分的性质与基本积分公式………… 254
§ 7—3　换元积分法………………………………… 259
§ 7—4　分部积分法………………………………… 268
§ 7—5　积分表的使用……………………………… 271

第八章　定积分及其应用……………………………… 277

§ 8—1　定积分的概念……………………………… 278
§ 8—2　定积分的性质……………………………… 285
§ 8—3　微积分基本定理…………………………… 287
§ 8—4　定积分的换元积分法与分部积分法……… 291
§ 8—5　定积分的应用……………………………… 295
§ 8—6　积分区间为无穷的广义积分……………… 300

附录　简易积分表……………………………………… 305

第一章　行列式

行列式是线性代数的主要内容之一，是解一般线性方程组的一种重要工具.

本章由解二元、三元线性方程组引出二阶、三阶行列式，并以三阶行列式为例研究行列式的性质．随之定义了 n 阶行列式，并引入克莱姆法则解线性方程组.

学习本章，要求读者

1. 理解二、三阶行列式的概念，会用对角线法则展开二阶、三阶行列式；

2. 掌握行列式性质和按一行（或一列）展开行列式的方法，能运用这些性质化简计算行列式.

3. 掌握克莱姆法则，会用行列式解线性方程组.

§1—1　二阶、三阶行列式

一、二阶行列式

任何一个二元一次方程组经过变形后，都可以化为一般形式

$$
(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}
$$

其中 a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22} 是未知项系数，b_1、b_2 是常数项.

用加减消元法解方程组(Ⅰ)，如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，那么方程组有唯一解，其解的公式为

$$
\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\[2ex] x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}
$$

观察和分析上面方程组解的公式发现，方程组的解只与方程组的未知项系数和常数项有关，并有内在规律可循．为了便于记忆，引入记号

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
$$

来表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.
$$

上式左边叫二阶行列式，横排叫行，纵排叫列，a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22} 叫行列式的**元素**，每一个元素都有两个下标，第一个下标表示这一元素所在行的序数，第二个下标表示它所在列的序数．a_{ij} 是第 i 行，第 j 列的元素．上式右边叫二阶行列式的**展开式**，共有 2 项．其展开式为行列式中主对角线（用实线表示）上两个元素之积减去副对角线（用虚线表示）上两个元素之积．如下图所示．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

类似地 $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

于是方程组（Ⅰ）的解可以写成

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{cases} \qquad \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

为了简便起见，记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

行列式 D 是由方程组（Ⅰ）中 x_1,x_2 的系数按原来的顺序排成，叫系数行列式；行列式 D_1 是把 D 中的 a_{11},a_{21} 依次换成 b_1,b_2 而得到；D_2 是把 D 中的 a_{12},a_{22} 依次换成 b_1,b_2 而得到.这样方程组（Ⅰ）的解便可写成

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases} \qquad (D \neq 0)$$

例 1 展开行列式并化简：

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} \text{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \text{tg}\alpha \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \times 7 - 3 \times 2 = -13$；

(2) $\begin{vmatrix} \text{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \text{tg}\alpha \end{vmatrix} = \text{tg}^2\alpha - (-1) = \text{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$.

例 2 利用行列式解二元一次方程组：

(1) $\begin{cases} x + y = 12, \\ 4x - 3y = 1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 5x + 3y = 0, \\ 12x + 7y + 1 = 0. \end{cases}$

解 (1) 因为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7 \neq 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -36 - 1 = -37,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 48 = -47.$$

所以方程组的解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-37}{-7} = \dfrac{37}{7}, \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-47}{-7} = \dfrac{47}{7}. \end{cases}$$

(2) 把原方程组化成一般形式

$$\begin{cases}5x+3y=0,\\12x+7y=-1.\end{cases}$$

因为

$$D=\begin{vmatrix}5 & 3\\12 & 7\end{vmatrix}=5\times7-3\times12=-1\neq0,$$

$$D_x=\begin{vmatrix}0 & 3\\-1 & 7\end{vmatrix}=0\times7-3\times(-1)=3,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}5 & 0\\12 & -1\end{vmatrix}=5\times(-1)-0\times12=-5,$$

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{3}{-1}=-3,\\[2ex]y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-5}{-1}=5.\end{cases}$

二、三阶行列式

仿照二阶行列式定义，可以定义三阶行列式.

设有九个数 $a_{11},a_{12},a_{13},a_{21},a_{22},a_{23},a_{31},a_{32},a_{33}$，把它们排成如下形式，并在两旁各加一竖线，如

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \tag{1}$$

用它来表示

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{2}$$

我们称（1）式为三阶行列式，把（2）式称为（1）式的

展开式．三阶行列式有三行、三列，由九个元素组成，其中 a_{ij} 是第 i 行第 j 列上的元素．它的展开式是含有六项的代数和，且每项都是不同行不同列的三个元素的乘积．它的计算可按下图展开，其中实线上三个元素的积取正号，虚线上三个元素的积取负号．这种展开三阶行列式的方法称为**对角线法则**．如图 1—1.

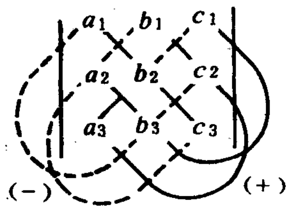

图 1—1

例 3 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times0\times2-1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times0\times(-3)$

$=-10.$

习题 1—1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

2. 展开下列行列式，并化简：

(1) $\begin{vmatrix} x-y & -y \\ y & x+y \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

3. 用行列式的展开式，证明下列等式.

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2+c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3+c_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3' \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

§1—2 行列式的性质

为了更好掌握和运用行列式这一工具，简化行列式的计算，我们以三阶行列式为例，来介绍行列式的一些性质.

下面的性质都可用对角线法则来验证.

性质 1 行列式所有的行与相应的列互换，行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 2 行列式的任意两行（或两列）互换，行列式仅改变符号.

例如，行列式的第一行与第二行互换，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 3 若行列式中某两行（或两列）对应元素相同，则此行列式等于零.

例如，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$

性质 4 行列式中某一行（或一列）各元素同乘以数 k，等于用这个数 k 乘这个行列式.

例如，$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

推论 1 行列式中某一行（或一列）有公因子时，可将公因子提到行列式外面.

推论 2 若行列式中某一行（或一列）的元素都为零，则

此行列式等于零.

例如，$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$

性质 5 若行列式中某两行（或两列）的对应元素成比例，则此行列式等于零.

例如，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$

性质 6 若行列式中某一行（或一列）的元素都是二项式，则此行列式等于把这些二项式各取一项作成相应的行（或列），而其余行（或列）不变的两个行列式的和.

例如，$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{11}' & a_{12}+a_{12}' & a_{13}+a_{13}' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 7 行列式的某一行（或一列）的各元素的 k 倍，加到另一行（或另一列）对应元素上，则行列式的值不变.

例如，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

例 1 利用行列式性质求下列行列式的值.

$$(1)\begin{vmatrix}121 & -25 & 14\\ 60 & -13 & 7\\ -59 & 14 & -7\end{vmatrix};\qquad (2)\begin{vmatrix}6 & 4.2 & 3\\ 8 & -2.8 & 4\\ 20 & 3.5 & 15\end{vmatrix}.$$

解

$$(1)\begin{vmatrix}121 & -25 & 14\\ 60 & -13 & 7\\ -59 & 14 & -7\end{vmatrix}\xlongequal[(3)+(2)]{(1)-2(2)}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 60 & -13 & 7\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0.$$

$$(2)\begin{vmatrix}6 & 4.2 & 3\\ 8 & -2.8 & 4\\ 20 & 3.5 & 15\end{vmatrix}=\frac{1}{10}\begin{vmatrix}6 & 42 & 3\\ 8 & -28 & 4\\ 20 & 35 & 15\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{10}\times3\times4\times5\begin{vmatrix}2 & 14 & 1\\ 2 & -7 & 1\\ 4 & 7 & 3\end{vmatrix}$$

$$=6\times2\times7\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}\xlongequal{③-①}84\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=84\times(-1-2)=-252.$$

例 2 证明

$$\begin{vmatrix}b+c & a & -b\\ a+c & b & -c\\ a+c & c & -a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}.$$

证明

$$\begin{vmatrix}b+c & a & -b\\ a+c & b & -c\\ a+c & c & -a\end{vmatrix}\xlongequal{①+③}\begin{vmatrix}c & a & -b\\ a & b & -c\\ b & c & -a\end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

例 3 解关于 x 的方程

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

解 将行列式展开，得方程

$$(x-2)(x^2-4x+3)=0$$

于是方程的解为 $x_1=1, x_2=2, x_3=3.$

习题 1—2

1. 利用行列式性质，计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 13 \\ 3 & -1 & 9 \\ -4 & -5 & 7 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 2.1 & 3.5 & -4.9 \\ -8 & 12 & 28 \\ 9 & 6 & 14 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$； (6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$.

注：(1) -2 (2) 表示第一行各元素减去 2 倍的第二行各对应元素. ③$-$①表示第三列各元素减去第一列各对应元素（即用 -1 乘第一列各元素，加到第三列的对应元素上去）.