普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学物理

少学时 第2版

张 宇 赵 远 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

大学物理（少学时）

第2版

主　编　张　宇　赵　远
副主编　王晓鸥　吴　琦
参　编　孟庆鑫　刘丽萍
　　　　甄丽娟　黄义春
主　审　严导淦　杨学栋

机械工业出版社

本书根据教育部高等学校非物理类专业物理基础课程教学指导分委员会于2004年确定的“非物理类理工学科大学物理课程教学基本要求”以及本书的适用对象特点，在编者多年教学实践的基础上，同时参考了国内、外的优秀教材而编写。

全书包括力学、热学、电磁学、波动和量子物理学基础，共五篇。本书配有多媒体电子教案。

本书可作为工科大学管理类专业（非机、非土、非电专业）及其他对基础物理学内容要求学时较少专业的物理课教材，适合于70～90学时的讲课时数（包括习题课）。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理：少学时/张宇，赵远主编. —2版. —北京：机械工业出版社，2007.7（2008.1重印）
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-111-12225-8

Ⅰ. 大… Ⅱ. ①张…②赵… Ⅲ. 物理学-高等学校-教材 Ⅳ. 04

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第085919号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：季顺利 责任编辑：张金奎
版式设计：张世琴 责任校对：刘志文
封面设计：姚 毅 责任印制：洪汉军
北京振兴源印务有限公司印刷厂印刷
2008年1月第2版 · 第2次印刷
169mm×239mm · 11.75印张 · 459千字
标准书号：ISBN 978-7-111-12225-8
定价：28.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639 88379641 88379643
编辑热线电话：（010）88379729

第 2 版前言

《大学物理（少学时）》教材自2003年出版以来，全国已有10余个省市的高校师生使用，反映较好，同时也对本书提出了一些有益的修改意见和建议。综合这些意见和建议，并根据教育部高等学校非物理类专业物理基础课程教学指导分委员会于2004年确定的“非物理类理工学科大学物理课程教学基本要求”正式报告稿的要求以及本书的适用对象特点，编者对本书进行了修订。

本书修订后基本保持了第1版的风格，为了完善本书知识点的完整性和逻辑性，删减并增加了部分内容，同时对各章的习题进行了精选。全书贯彻了科学性、逻辑性、重点难点突出、文字严谨的基本要求。同时，本书配有多媒体电子教案。

同济大学严导淦教授、哈尔滨工业大学唐光裕教授对本书修订大纲的制订提出了许多非常宝贵的建设性意见，并对具体内容的修改做了大量细致的工作。本书的第1版主编、哈尔滨工业大学徐国涵教授提出了许多有益的修订意见。本书的修订大纲由张宇制订。参加本书编写工作的有王晓鸥、刘丽萍、吴琦、张宇、孟庆鑫、赵远、黄义春、甄丽娟等。孟庆鑫为本书编写了电子教案。本书由张宇、赵远主编，由严导淦教授、杨学栋教授审定，最后由张宇负责统稿和定稿。

本书的修订出版工作得到了普通高等教育“十一五”国家级规划教材项目、哈尔滨工业大学“十一五”规划教材项目的资助。在修订出版过程中得到了哈尔滨工业大学物理系和大学物理教研室全体教师及机械工业出版社高等教育分社等各方面的大力支持和帮助，编者在此表示深深的感谢。

由于修订编写工作时间仓促，加之编者的学识水平有限，书中难免仍有不当之处，敬请广大读者批评、指正。

编　者

2007年3月　于哈尔滨

第1版前言

物理学是一门研究自然界中最基本、最普遍的物质运动形式及物质构成的科学。物理学总结出来的规律在其他运动形式（如化学运动、生命运动等）中也是普遍遵循的。

在历史上，物理学的许多重要发现和理论，都曾引起科技、工农业发生革命性的变化，也大大地改变了人类的生活质量。例如，电磁学的发展使人们有可能大规模地使用电能，进而实现电气化、电子化；相对论和量子理论的建立和发展使人们对宇宙起源及构造有突破性的认识，也促进了半导体工业、通信技术、核能利用等的崛起和发展。物理学不仅内容丰富，而且研究方法也在不断发展。

物理学是一门基础学科，对于非物理专业的读者来说，不要希望在今后可以直接大量运用物理学的定律和公式去直接解决工作中的困难。但是，我们相信在读者今后的工作与生活中，都将从所学到的物理学知识及物理学研究方法中得到益处、受到启迪，甚至激发出灵感。

本书由徐国涵、张宇主编；吴琦、樊涤心副主编。参加本书编写工作的有徐国涵、吴琦、张宇、樊涤心、甄丽娟、李玫瑰、张荣艳等。

本书在编写过程中，参考了国内外很多优秀的教材，还借用了少量的插图和习题，仅此致谢。

由于编者水平有限，书中难免有错误和不当之处，希望读者批评指正。

编　者

2003年3月

目　录

第三篇 电 磁 学

第四篇 波 动

第五篇 量子物理学基础

第一篇 力　　学

自然界是由物质组成的，一切物质都在不停地运动着。物质运动中最简单、最普遍的运动形式之一是机械运动。**机械运动是指各物体之间或同一物体各部分之间相对位置的变化**。例如天体的运行、大气和河水的流动、机器中各部件的运转等都是机械运动。研究物体机械运动的规律及其应用的科学称为力学。通常把力学分为运动学、动力学和静力学。运动学只研究物体在运动过程中位置和时间的关系；动力学研究物体的运动与物体间相互作用的关系；静力学研究物体相互作用下的平衡问题，可以认为它是动力学的一部分。

本篇将只介绍运动学和动力学，不专门讨论静力学。

第一章　质点运动学

在研究物体作机械运动时，为了便于研究和更突出物体的运动，在一般情况下，我们可以根据问题的性质和运动情况，将物体看成**没有大小和形状、具有物体全部质量的点**，称为质点。因此，质点是实际物体经过科学抽象而形成的一个理想化模型。同一物体在不同的问题中，有时可看成质点，有时就不能。例如地球，在讨论它绕太阳作公转时，由于地球至太阳的平均距离约为地球半径的 10^4 倍，因此地球上各点相对于太阳的运动可近似看作是相同的，此时，可以将地球的大小忽略不计，看成是质点；但在讨论地球自转时，地球就不能被当作质点了。因此，将物体当作质点是有条件的、相对的。另外，是否将物体看作质点，与物体的形状和大小无关，只与物体的运动情况有关。

下面讨论如何描述质点在机械运动中其位置随时间变化的规律。

第一节　参考系　位置矢量

一、参考系和坐标系

运动是物质存在的形式，一切物体都在作各种形式的运动，特别是机械运动

（在本篇中，简称运动）。我们坐在教室里看黑板，似乎黑板并不运动，其实，我们和黑板都伴随着地球在自转及绕太阳在公转。并且太阳、银河系也都在运动。所以在宇宙中绝对静止的物体是不存在的，这就是所谓的运动的绝对性。

我们都有过这样的经验：当乘船在平静的江河中航行时，如果不看船外境景（树、岸等）的话，往往不能确定船是否在航行。于是，为了观察某个物体的运动，就要选择另一个或几个其他物体作为参考，假定它们不动，相对于它们来描述讨论物体的运动。这些**被选择作为参考的物体或物体系称为参考系**。显然，这样所描述的运动是相对于该参考系的。对于同一个物体的运动来说，选择不同的参考系，将给出不同的描述。这就是运动描述的相对性。例如，在水平面上相对于地面作匀速直线运动的车厢里有一个自由下落的物体，以车厢为参考系，物体作直线运动；若以地面为参考系，物体则作抛物线运动。参考系的选择是任意的，通常选地球为参考系。

为了对物体的运动作定量的描述，只确定参考系是不够的，还需选用适当的坐标系。

通常将坐标系的原点 O 固定在参考系中的一点上，用通过原点并标有长度单位、且有方向的直线作为坐标轴，并按一定的规律将坐标轴构成一个坐标系。最常用的是用三条在原点相交、且相互垂直的有向直线组成的坐标系，称为空间笛卡儿坐标系。本书主要采用笛卡儿坐标系，如图 1-1 所示，它的三条坐标轴分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴，沿三个坐标轴正方向分别取大小为单位长度的矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，称为单位矢量，用来标示相应坐标轴的正方向。

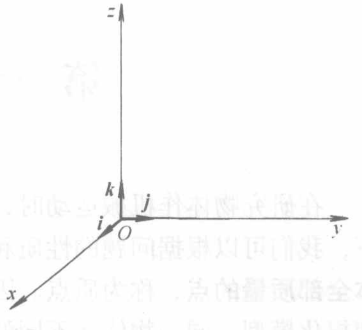

图 1-1　笛卡儿坐标系

由于坐标系与参考系是固连在一起的，所以物体相对于坐标系的运动，其实就是相对于参考系的运动。因此，当我们建立了坐标系，就意味着也已选定了参考系。

二、位置矢量　运动函数　轨迹方程

设某时刻 t 质点在空间的 P 点位置，如图 1-2 所示，我们可以由参考系上 O 点指向点 P 的矢量 $\boldsymbol{r}$ 表示，由于 $\boldsymbol{r}$ 是确定质点在空间位置的矢量，所以称为质点在该时刻 t 的**位置矢量**，简称位矢。我们也可以采用固定在 O 点的笛卡儿坐标系 $Oxyz$ 中 P 点的坐标（x，y，z）来描述质点的位置，坐标 x、y、z 实际上就是位矢 $\boldsymbol{r}$ 在相应坐标轴的投影，称为位矢 $\boldsymbol{r}$ 的分量。这样，位矢 $\boldsymbol{r}$ 便可沿 x 轴、y 轴和 z 轴的正向分解为三个分矢量 $x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$ 和 $z\boldsymbol{k}$，从而有

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

则位矢 $\boldsymbol{r}$ 的大小为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1-2}$$

设位矢 $\boldsymbol{r}$ 与 x、y、z 轴之间的夹角分别是 α、β 及 γ，那么，位矢 $\boldsymbol{r}$ 的方向可由下列的方向余弦表述，即

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{x}{r}\\\cos\beta&=\frac{y}{r}\\\cos\gamma&=\frac{z}{r}\end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

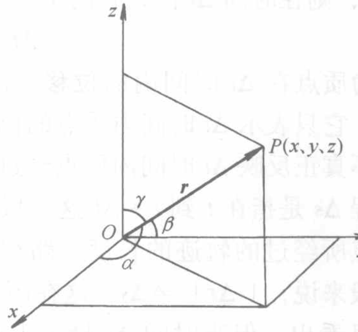

图 1-2　位置矢量

这样，对于位矢 $\boldsymbol{r}$，在笛卡儿坐标系中，我们既可用式（1-1）表示，也可用式（1-2）和式（1-3）来表示。两者是等同的。

当质点运动时，它在空间的位置是随时间而变化的，$\boldsymbol{r}$ 或 x、y、z 都是时间的函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-4a}$$

或

$$\left.\begin{aligned}x&=x(t)\\y&=y(t)\\z&=z(t)\end{aligned}\right\} \tag{1-4b}$$

式（1-4a）和式（1-4b）都称为质点的**运动函数**。因为如果知道了式（1-4a）或式（1-4b）的函数形式，也就可以确定质点在任意时刻的位置了。运动学研究的目的之一就是要找出各种具体运动所遵循的运动函数。

式（1-4b）也可以看成是运动质点轨迹的参数方程，若在式（1-4b）中消去时间 t，就可得到运动质点的轨迹方程。运动质点的轨迹是一条空间曲线。前面我们已经说过，描述运动是相对的，对同一质点的运动来说，选择不同参考系，它的运动函数是不相同的。但对于同一质点的运动，在选定了一个参考系后，即使在不同的坐标系中，轨迹曲线应是相同的一条，虽然运动函数的形式在不同的坐标系中不尽相同。

式（1-4a）和式（1-4b）还反映了运动叠加原理。

物体运动的一个重要特征是独立性（或叠加性）。从大量事实中人们发现，**一个运动可以看成是由几个同时进行的、且各自独立进行的运动叠加而成的**。这就是**运动叠加原理**，或称为**运动独立性原理**。

运动叠加原理在日常生活和工作中随处可见，例如一台塔式起重机把楼板从地面运送到房架上，楼板的运动可以看作是垂直上升运动与水平运动叠加而成

的。

三、位移

质点在运动时，它的位置在不断地变化，设 t 时刻质点在 A 点，它的位矢是 $\boldsymbol{r}(t)$，经过 Δt 时间后，在 $t+\Delta t$ 时刻，质点运动到 B 点，这时位矢是 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$，则在时间 Δt 内，它的位置变化是

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t) \tag{1-5}$$

称为质点在 Δt 时间内的**位移**，位移是矢量，它只表示 Δt 时间内质点的位置变化，并不真正反映 Δt 时间内质点经过的路程。路程 Δs 是指在 t 到 $t+\Delta t$ 这一段时间内，质点所经过的轨迹的长度。路程是标量。一般来说，$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s$，这在图 1-3 中可明显看出。但当时间 Δt 趋于零时，B 点无限接近 A 点，亦即：当 $\Delta t\to 0$ 时，路程 $\mathrm{d}s$ 和位移的大小 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 是相等的。位移的大小和路程的单位在国际单位制（SI）中都用 m（米）、km（千米）或 cm（厘米）来表示；时间的单位是 s（秒）、min（分）、h（小时）、d（天）或 a（年）。

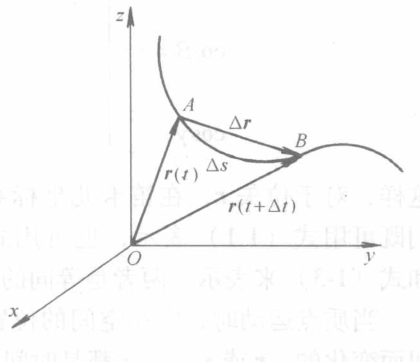

图 1-3　位移和路程

第二节　速度　加速度

为了进一步描述质点在每个时刻的运动方向和运动快慢及其变化情况，本节将引述质点的速度和加速度这两个物理量。

一、速度

1. 平均速度

设质点按运动规律 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 沿曲线运动，如图 1-4 所示，从时刻 t 经时间 Δt，质点的位移是 $\Delta\boldsymbol{r}$，我们定义 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和 Δt 的比值为质点在 t 时刻起 Δt 时间内的**平均速度**，用 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 表示

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-6}$$

平均速度是矢量，其方向与位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向相同，其大小等于 $\dfrac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t}$。由于 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的

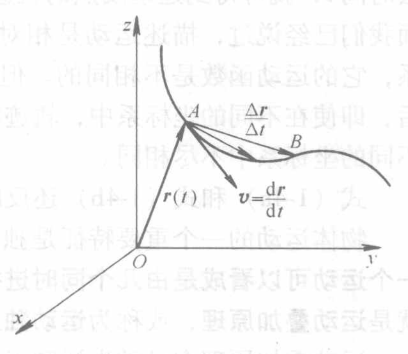

图 1-4　平均速度和瞬时速度

大小和方向不仅与时刻 t 有关，还与时间 Δt 的长短有关，所以，平均速度的大小和方向也与 t 及 Δt 有关。这样，用平均速度来描写质点的运动是比较粗糙的，它不能精确地说明质点在某一时刻 t（或空间某点）的运动快慢程度和运动方向。

有时我们也用平均速率来表征质点运动的快慢，它是质点从某时刻 t 到 $t+\Delta t$ 的时间内所经历的路程 Δs 与时间 Δt 的比值，即 $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$，由于 $\Delta s\neq|\Delta\boldsymbol{r}|$，所以 $\bar{v}\neq|\bar{\boldsymbol{v}}|$。

2. 瞬时速度

为了精确地描述质点在运动过程中某一时刻（或某一位置）的运动状态，我们令 Δt 趋于零，位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 也相应地趋于零，但它们的比值 $\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 却趋近于某一极限值 $\boldsymbol{v}$，称为**瞬时速度**，简称**速度**，即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-7}$$

亦即，质点在某时刻（或某位置）的速度 $\boldsymbol{v}$ 等于矢量 $\boldsymbol{r}$ 对时间 t 的一阶导数。从图 1-4 中我们可以看到，平均速度的方向就是该段时间内位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向，而瞬时速度的方向是平均速度的极限方向，也就是轨迹在该位置的切线方向，且指向运动前方。需要指出，某一时刻的位矢 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 是描述质点运动状态的两个物理量。

与瞬时速度相仿，瞬时速率（简称速率）的定义是 t 时刻起，当 Δt 趋于零时，平均速率 $\bar{v}$ 的极限值，即

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

由于当 Δt 趋于零时，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 和 $\mathrm{d}s$ 的值趋于相等，所以，瞬时速度的大小与同一时刻的瞬时速率相同。

3. 笛卡儿坐标系中的瞬时速度

在笛卡儿坐标系 $Oxyz$ 中，按式（1-1）及速度矢量的定义，有

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1-8}$$

并记作

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1-9}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_y &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ v_z &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

这三者即为速度$\boldsymbol{v}$在相应的三个坐标轴上的分量。由此，可具体计算速度的大小和方向（用$\boldsymbol{v}$与x、y、z轴之间的夹角α'、β'及γ'的方向余弦表述），即

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{1-11}$$

及

$$\cos\alpha' = \frac{v_x}{v} \qquad \cos\beta' = \frac{v_y}{v} \qquad \cos\gamma' = \frac{v_z}{v}$$

在国际单位制中，速度的单位是 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$（米/秒）。

综上所述，速度具有矢量性和瞬时性。此外，由于运动的描述还与参考系的选择有关，所以速度还具有相对性。

速度既指出运动物体的运动方向，又反映了物体运动的快慢程度，所以，速度是运动学中描述物体运动状态的物理量。在表 1-1 中择要列出一些物体运动速度的大小。

表 1-1　一些物体运动速度的大小

名　称	速度/$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$	名　称	速度/$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
男子百米世界纪录的平均速度（加特林）	10.20	第一宇宙速度	7.91×10^3
上海磁浮列车运行速度	1.20×10^2	第二宇宙速度	1.12×10^4
超声速飞机的巡航速度	3.40×10^2	第三宇宙速度	1.67×10^4
0℃空气分子热运动的平均速度	4.50×10^2	地球绕太阳公转的线速度	2.98×10^4
地球自转时赤道上一点的线速度	4.60×10^2	太阳绕银河系中心旋转的线速度	2.50×10^5
步枪子弹离开枪口时的速度	约 7.0×10^2	光子在真空中的速度	299792458

二、加速度

1. 平均加速度

一般情况下，质点在运动中的速度$\boldsymbol{v}$的大小和方向都可能随时间变化，如图 1-5 所示。

设质点在t时刻（A点位置）的速度为$\boldsymbol{v}(t)$，在$t+\Delta t$时刻（B点位置）速度为$\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$，那么，在$\Delta t$时间内，质点速度的增量为

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)$$

我们定义，质点速度的增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 与其所需时间 Δt 的比值称为这段时间内质点的**平均加速度**，即

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

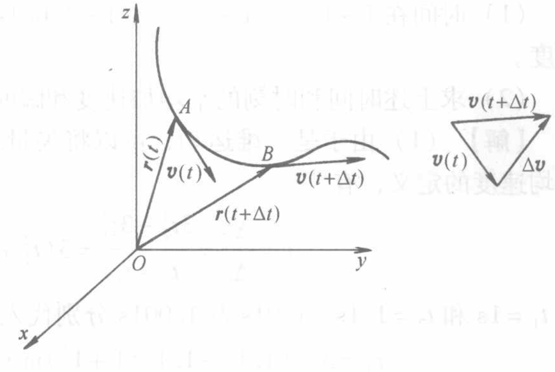

图 1-5 平均加速度和瞬时加速度

与平均速度一样，平均加速度不能精确地描述质点在任一时刻（或任一位置）的速度的变化情况。为此，必须用瞬时加速度。

2. 瞬时加速度

质点在某时刻（或某位置）的**瞬时加速度** $\boldsymbol{a}$ 等于在该时刻起的一段时间 Δt 趋于零时平均加速度的极限值，即

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-12}$$

可见，瞬时加速度 $\boldsymbol{a}$（简称加速度）是速度$\boldsymbol{v}$ 对时间 t 的一阶导数，或者是位矢 $\boldsymbol{r}$ 对时间 t 的二阶导数。加速度是矢量，一般情况下，加速度的方向与速度方向不相同。在国际单位制中，加速度的单位是 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$（米/秒^2）。

显然，加速度也具有矢量性、瞬时性以及相对性。加速度是描述质点运动状态变化的一个物理量。

3. 笛卡儿坐标系中的加速度

在笛卡儿坐标系中，加速度可写成

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} \tag{1-13}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ a_y &= \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \\ a_z &= \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

为加速度沿相应坐标轴的分量。由此式可具体计算加速度的大小

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1-15}$$

加速度的方向亦可仿照前述，用 $\boldsymbol{a}$ 与各轴之间夹角的方向余弦表述。如果已

知质点的运动函数，那么，根据上述定义，就可求得速度和加速度。

【例 1-1】 质点沿 x 轴运动，位移 $x=3t^3$，求：

（1）时间在 1 ~1.1s、1 ~1.01s、1 ~1.001s 内的平均速度和 $t=1\text{s}$ 时的瞬时速度。

（2）求上述时间和时刻的平均加速度和瞬时加速度。

【解】（1）由于是一维运动，可以将矢量运算简化为标量计算，于是，由平均速度的定义，有

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{3t_2^3-3t_1^3}{t_2-t_1}=3(t_2^2+t_2t_1+t_1^2)$$

将 $t_1=1\text{s}$ 和 $t_2=1.1\text{s}$、1.01s 及 1.001s 分别代入上式，得

$$\bar{v}_1=3\times(1.1^2+1.1\times1+1^2)\text{m}\cdot\text{s}^{-1}=9.9\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\bar{v}_2=3\times(1.01^2+1.01\times1+1^2)\text{m}\cdot\text{s}^{-1}=9.09\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\bar{v}_3=3\times(1.001^2+1.001\times1+1^2)\text{m}\cdot\text{s}^{-1}=9.009\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

按瞬时速度的定义，有

$$v=v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=9t^2$$

将 $t=1\text{s}$ 代入上式，得

$$v=9\times1^2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}=9\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

（2）对于一维运动，平均加速度可写成

$$\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{9t_2^2-9t_1^2}{t_2-t_1}=9(t_2+t_1)$$

代入数字，即可得

$$\bar{a}_1=9\times(1.1+1)\text{m}\cdot\text{s}^{-2}=18.9\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$\bar{a}_2=9\times(1.01+1)\text{m}\cdot\text{s}^{-2}=18.09\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$\bar{a}_3=9\times(1.001+1)\text{m}\cdot\text{s}^{-2}=18.009\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

而瞬时加速度为

$$a=a_x=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=18t$$

将 $t=1\text{s}$ 代入上式，得

$$a=a_x=18\times1\text{m}\cdot\text{s}^{-2}=18\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

比较上述结果，可以看出：平均速度和平均加速度的大小与时间 Δt 的长短有关（更一般的情况下，它们的方向也和时间有关）。Δt 越小，平均速度和平均加速度就越接近于该时刻的瞬时速度或瞬时加速度。

【例 1-2】 已知质点的运动函数为

$$\boldsymbol{r} = (A\cos\omega t)\boldsymbol{i} + (B\sin\omega t)\boldsymbol{j}$$

其中，A、B、ω 均为正的恒量。求：

（1）质点的速度和加速度。

（2）质点的运动轨迹。

【解】（1）由速度的定义，将 $\boldsymbol{r}$ 对时间求一阶导数，可得

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(A\cos\omega t)\boldsymbol{i} + (B\sin\omega t)\boldsymbol{j}]$$

$$= (-A\omega\sin\omega t)\boldsymbol{i} + (B\omega\cos\omega t)\boldsymbol{j}$$

再由加速度的定义，将 $\boldsymbol{v}$ 对时间求一阶导数，得

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(-A\omega\sin\omega t)\boldsymbol{i} + (B\omega\cos\omega t)\boldsymbol{j}]$$

$$= -[(A\omega^2\cos\omega t)\boldsymbol{i} + (B\omega^2\sin\omega t)\boldsymbol{j}]$$

（2）将运动函数写成参数方程

$$x = A\cos\omega t \qquad y = B\sin\omega t$$

合并上述两式，消去参数 t，即可得轨迹方程为

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

这是一个长、短半轴分别为 A 和 B 的椭圆。

【例 1-3】 试推导质点沿 x 轴作匀变速直线运动的运动函数、速度和加速度间的关系式。设已知质点的加速度为 a；初始条件为 $t=0$ 时，$x=x_0$；$v=v_0$。

【解】 质点沿直线的运动称为直线运动，如果质点的加速度始终保持不变，则质点作匀变速直线运动。

将加速度定义式 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 改写为

$$\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t$$

式中，a 是恒量。对上式两边积分，由题设的初始条件，有

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v = \int_0^t a\mathrm{d}t$$

得

$$v = v_0 + at$$

再由定义式 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，将上式改写为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 + at$，即得

$$\mathrm{d}x = (v_0 + at)\mathrm{d}t$$

对上式两边积分，由题设的初始条件，有

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x = \int_0^t (v_0 + at)\mathrm{d}t$$