普通高等教育“十一五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

GONGCHENG TANXING LIXUE

工程弹性力学

程选生　杜永峰　李　慧　编著

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

普通高等教育“十一五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

GONGCHENG TANXING LIXUE

工程弹性力学

编著　程选生　杜永峰　李　慧
主审　张延庆

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十一五”规划教材。全书共分九章，内容包括绪论，平面问题的基本理论，直角坐标下平面问题的解答，极坐标下平面问题的解答，温度应力的平面问题，空间问题的基本理论和解答，弹性薄板的弯曲问题，弹性薄板的稳定问题，弹性薄板的振动问题等。

本书依据全国非力学类结构力学及弹性力学课程教学指导委员会制定的《弹性力学课程教学基本要求》编写，兼顾弹性力学的工程实用性，将作者多年从事本科生和研究生的教学经验和科研成果融入其中，在简要阐述弹性力学经典理论的同时，针对实际工程应用介绍了部分最新研究成果。

全书以土建类专业的教学需求为基础，内容由浅入深，删繁就简，概念清晰，工程实用性强，满足了少学时和弹性力学与工程结构紧密结合的需要。

本书可作为高等院校土木工程、水利工程及工程力学等专业的本科生、研究生教材，也可作为非力学类专业博士生、教师的参考用书，还可作为相关领域工程技术人员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

工程弹性力学/程选生，杜永峰，李慧编著. —北京：中国电力出版社，2009

普通高等教育“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5083-8068-1

Ⅰ.工… Ⅱ.①程…②杜…③李… Ⅲ.工程力学：弹性力学—高等学校—教材 Ⅳ.TB125

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 169205 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路 6 号 100044 http://jc.cepp.com.cn）

北京丰源印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2009 年 1 月第一版 2009 年 1 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 8.5 印张 199 千字

定价 **14.00** 元

前 言

为贯彻落实教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》和《教育部关于以就业为导向深化高等职业教育改革的若干意见》的精神，加强教材建设，确保教材质量，中国电力教育协会组织制订了普通高等教育“十一五”教材规划。该规划强调适应不同层次、不同类型院校，满足学科发展和人才培养的需求，坚持专业基础课教材与教学急需的专业教材并重、新编与修订相结合。本书为新编教材。

随着科学技术的飞速发展和人民生活水平的不断提高，弹性力学已广泛应用于土木、水利、公路、铁路、航空航天、机械、石油化工等诸多领域。作者近年来一直从事弹性力学的教学和科研工作，在弹性薄板理论方面成绩较为显著，为此，将部分科研成果与教学实践经验相互融合，为促进弹性力学教学及其工程应用尽微薄之力。

全书共分九章，内容包括绪论，平面问题的基本理论，直角坐标下平面问题的解答，极坐标下平面问题的解答，温度应力的平面问题，空间问题的基本理论和解答，弹性薄板的弯曲问题，弹性薄板的稳定问题，弹性薄板的振动问题等。

本书依据全国非力学类结构力学及弹性力学课程教学指导委员会制定的《弹性力学课程教学基本要求》编写，兼顾弹性力学的工程实用性，将多年从事本科生和研究生的教学经验和科研成果融入其中。在参考有关教材、专著和学术论文的基础上，简要阐述弹性力学经典理论，针对弹性力学在工程中的创新应用介绍了部分最新研究成果，其中包括作者近年来在热环境混凝土薄板弯曲、屈曲和振动等方面所取得的一系列研究成果。由于弹性力学的经典理论内容极其广泛，因此许多内容本书未能涉及。全书由兰州理工大学程选生、杜永峰、李慧编著，北京工业大学张延庆审阅。

本书的特点是以土建类专业的教学需求为基础，内容由浅入深，删繁就简，概念清晰，工程实用性强，满足了少学时和弹性力学与工程结构紧密结合的需要。

在编写本书的过程中，参考了许多同行专家的研究成果，同时，本书的出版得到了“兰州理工大学优秀青年教师培养计划”项目的资助，在此一并表示感谢。

在本书出版之际，特向兰州理工大学教务处、防震减灾研究所的领导表示感谢，他们对本书的出版给予了多方面的支持和帮助。

限于编者的水平，书中定有不妥之处，恳请读者批评指正。

作 者

2008 年 10 月

目 录

第一章 绪 论

§1.1 弹性力学的发展史

弹性力学（又称为弹性理论）是固体力学的一个重要分支，它研究弹性体在受外力作用、温度改变、边界约束或其他外界因素作用下的应力、形变和位移状态。

对弹性力学的研究是从 17 世纪开始的，经过三百多年来各国科研人员的研究和探索，相应的理论和方法日益丰富和完善，目前已广泛应用于土木、机械、化工、船舶、航空航天等工程领域。弹性力学的发展大致经历了四个阶段，即：

第一阶段是弹性力学的发展初期，主要是通过实践，尤其是通过实验来探索弹性力学的基本规律。1678 年英国的胡克提出了胡克定律，1687 年牛顿确立了力学三大定律。在这一时期，数学也在迅速发展，从而为弹性力学的发展奠定了数学基础。

第二阶段是从 17 世纪末开始，主要研究梁的理论（现在梁已属于材料力学范畴）。到 19 世纪 20 年代法国的纳维和柯西基本上建立了弹性力学的数学理论。柯西在 1822 年～1828 年间发表的一系列论文中，明确地提出了应变、应变分量、应力和应力分量的概念，建立了弹性力学的几何方程、平衡方程、各向同性以及各向异性材料的广义胡克定律，从而奠定了弹性力学的理论基础，打开了弹性力学向纵深发展的突破口。

第三阶段是弹性力学在理论上和实际应用上都有较大的发展，主要是线性各向同性弹性力学大发展的时期。1855 年～1858 年间法国的圣维南发表了关于柱体扭转和弯曲的论文，并提出了圣维南原理；1881 年德国的赫兹解出了两弹性体局部接触时弹性体内的应力分布；1898 年德国的基尔施在计算圆孔附近的应力分布时，发现了应力集中。这些成就解释了过去无法解释的实验现象，并在提高机械、结构等零件的设计水平方面起了重要作用，使弹性力学得到工程界的重视。在这个时期，弹性力学的一般理论也有很大的发展。一方面建立了各种关于能量的原理，另一方面发展了许多有效的近似计算、数值计算和其他计算方法，如著名的瑞利—里兹法，为直接求解泛函极值问题开辟了道路，推动了力学、物理、工程中近似计算的蓬勃发展。

第四阶段是从 20 世纪 20 年代开始。在这一时期，人们在发展经典理论的同时，广泛地探讨了许多复杂的问题，出现了许多边缘分支：各向异性和非均匀体的理论，非线性板壳理论和非线性弹性力学，考虑温度影响的热弹性力学，研究固体同气体和液体相互作用的气动弹性力学和水弹性理论以及粘弹性理论等。磁弹性和微结构弹性理论也开始建立起来。此外，还建立了弹性力学广义变分原理。这些新领域的发展，丰富了弹性力学的内容，促进了有关工程技术的发展。

从这一时期开始，我国的力学家钱伟长、胡海昌、徐芝纶等也开始了弹性力学的研究，从而为我国弹性力学理论研究和工程应用做出了突出的贡献。

§1.2　弹性力学的基本概念

在介绍理论和方法之前，首先将弹性力学中的一些基本概念如体力、面力、形变、位移等进行解释和说明。

所谓外力，是指其他物体对弹性体研究对象的作用力。外力可以分为体积力和表面力两大类，分别简称为体力和面力。

所谓体力，是分布在弹性体体积内的力，例如重力和惯性力。物体内部各点的体力情况一般是不相同的。为了说明物体在某一点 P 所受体力的大小和方向，在这一点取包含着 P 点、体积为 ΔV 的微元体，如图 1 - 1 所示。

设作用于 ΔV 的体力为 ΔF，则体力的平均集度为 $\Delta F/\Delta V$。如果把所取的这一小部分物体 ΔV 不断缩小，则 ΔF 和 $\Delta F/\Delta V$ 均将随着 ΔV 的变化不断改变大小、方向和作用点。假设体力在弹性体内部连续分布，考虑极限情况，如果 ΔV 无限减小而趋向于 P 点，则 $\Delta F/\Delta V$ 必将趋于一定的极限矢量 f，即

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta V} = f \tag{1 - 1}$$

此极限矢量 f 即为该弹性体在 P 点所受体力的集度。由于 ΔV 是标量，所以 f 的方向就是 ΔF 的极限方向。矢量 f 在空间直角坐标轴 x，y，z 上的投影 X，Y，Z 称为该物体在 P 点沿坐标轴的体力分量，其量纲为 $L^{-2}MT^{-2}$。正负号规定：沿坐标轴正向为正，沿坐标轴负向为负。

所谓面力，是分布在弹性体表面上的力，如接触力和流体压力。物体在其表面上各点受面力作用的情况一般也是不相同的。为了说明该弹性体在表面上某一点 P 处所受面力的大小与方向，在物体表面取包含 P 点，面积为 ΔA 的微面积，如图 1 - 2 所示。

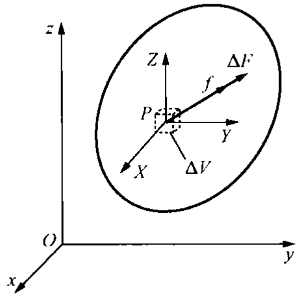

图 1 - 1　体力示意图

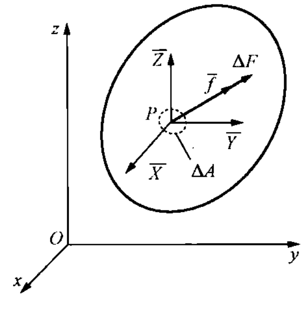

图 1 - 2　面力示意图

设作用于 ΔA 上的面力为 ΔF，则面力的平均集度为 $\Delta F/\Delta A$。如果把所取的这一小部分面积 ΔA 不断缩小，则 ΔF 和 $\Delta F/\Delta A$ 也将随着 ΔA 的变化不断改变大小、方向和作用点。假设物体上的面力为连续分布，考虑极限情况，令 ΔA 无限减小而趋向于 P 点，则 $\Delta F/\Delta A$ 必将趋于一定的极限 $\overline{f}$，即

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \overline{f} \tag{1 - 2}$$

这个极限矢量 $\overline{f}$ 即为该物体在 P 点所受面力的集度。因为 ΔA 是标量，所以 $\overline{f}$ 的方向

和 ΔF 的极限方向是一致的。矢量 $\overline{f}$ 在坐标轴 x，y，z 上的投影 $\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\overline{Z}$ 分别称为在 P 点沿 x，y，z 方向的面力集度分量，量纲为 $L^{-1}MT^{-2}$。面力正负号规定：沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。

物体在外力作用下，其内部不同部分之间要发生相互作用，这种相互作用的力称为内力。为了研究物体在内部某一点 P 处的内力，假想用经过 P 点的一个截面 kk 将该物体分为Ⅰ和Ⅱ两部分，如图 1 - 3 所示。舍弃Ⅱ部分，保留Ⅰ部分。舍弃部分对保留部分的作用即为内力。为了说明截面 kk 上某一点 P 处所受内力的大小与方向，在 kk 截面上取包含 P 点，面积为 ΔA 的微面积。设作用于 ΔA 上的内力为 ΔF，则内力的平均集度为 $\Delta F/\Delta A$。假设内力为连续分布，考虑极限情况，令 ΔA 无限减小而趋于 P 点，则 $\Delta F/\Delta A$ 必将将趋于一定的极限 p，即

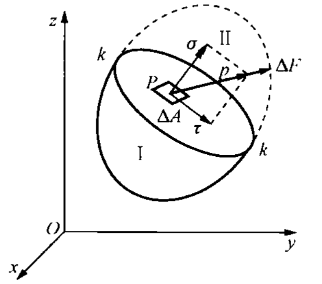

图 1 - 3　应力示意图

$$\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta A}=p \tag{1 - 3}$$

这个极限矢量 p 定义为物体在截面 kk 上 P 点的应力，量纲为 $L^{-1}MT^{-2}$。由于 ΔA 是标量，所以应力 p 的方向和 ΔF 的极限方向是一致的。

由于应力在沿坐标轴 x，y，z 方向的分量与物体的形变或材料强度都没有直接的关系，故一般不将应力沿 x，y，z 进行投影。而与物体的形变和材料强度直接相关的，是应力在其作用截面法线方向和切线方向的分量，分别定义为正应力 σ 和剪应力 τ。

通过物体内的同一点 P，可以做很多个截面，不同截面上的应力一般是不相同的。为了分析一点的应力状态，即各个截面上应力的大小和方向，在这一点从物体内取出一个微小的正平行六面体，如图 1 - 4 所示。六面体的棱边分别平行于三个坐标轴，各边的长度分别为 $PA=\Delta x$，$PB=\Delta y$，$PC=\Delta z$。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，分别与三个坐标轴平行。正应力用 σ 表示，加上一个下标以表明这个正应力的作用面和作用方向，如 σ_x 表示作用在垂直于 x 轴的面上、沿着 x 轴的方向的正应力；剪应力用 τ 表示，加双下标表示作用平面和作用方向，第一个下标字母表明剪应力作用面垂直于哪一个坐标轴，第二个下标字母表明剪应力作用方向沿着哪一个坐标轴。如，τ_{xy} 表示作用在垂直于 x 轴的面上沿着 y 轴方向作用的剪应力。

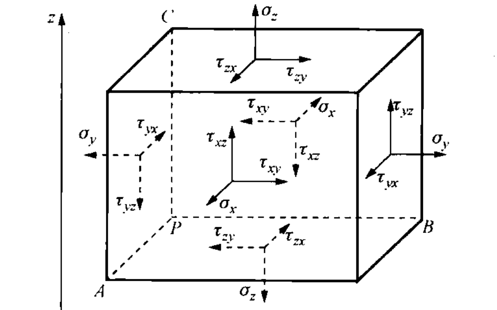

图 1 - 4　平行六面体单元

应力的正负号规定和体力、面力不同，为了说明这一点，首先需要定义截面的正负：如图 1 - 4 所示，如果截面的外法线方向和坐标轴的正方向一致，则这个截面定义为正面；如果截面的外法线方向和坐标轴的正方向相反，则这个截面定义为负面。规定：作用在正面上的应力以沿坐标轴正向为正，沿坐标轴负向为为负；作用在负面上的应力以沿坐标轴负向为正，沿坐标轴正向为为负。即：正正为正、负负为正，其余则为负。

需要说明的是，在判断应力的正负号时应

该注意不要与材料力学中的应力正负号规定相混淆。对于正应力的正负号规定，弹性力学和材料力学是一致的；而对于剪应力则有所不同：材料力学中剪应力以使单元体或其局部产生顺时针转动趋势的为正。如图 1 - 5 所示。这两门力学关于剪应力的正负号规定不能统一的原因在于，材料力学通常研究平面上的问题，可以清楚地表明顺时针方向，并且可以将其符号规定用于莫尔圆来求解斜截面上的应力；而弹性力学研究的不仅仅是平面问题，也不再用莫尔圆方法来求解斜截面上的应力，因此采用了与材料力学不同的正负号规定。

图 1 - 4 中给出的六个剪应力分量之间并不是完全独立的，它们具有一定的互等关系，满足剪应力互等定理：作用在两个互相垂直的面上且垂直于两面交线的剪应力大小相等，正负号相同。也就是说，两个互相垂直的面上的剪应力必然同时指向或者同时背离这两个面的交线，且大小相等。下面给出该定理的简单证明：以图 1 - 4 中的正六面体为研究对象，分别以连接前后两面中心的直线为轴列出六面体的力矩平衡方程

$$2\tau_{yz}\Delta x\Delta z\frac{\Delta y}{2}-2\tau_{zy}\Delta x\Delta y\frac{\Delta z}{2}=0$$

即有 $\tau_{yz}=\tau_{zy}$。同理，对连接左右两面中心的直线、连接上下两面中心的直线分别列六面体的力矩平衡方程并整理，有 $\tau_{zx}=\tau_{xz}$，$\tau_{xy}=\tau_{yx}$。由此可知，在弹性力学里，剪应力记号的两个下标字母可以对调。如果按照材料力学里剪应力的正负号规定，剪应力互等定理依然成立，不同在于下标对调以后，还要将剪应力反号，即 $\tau_{yz}=-\tau_{zy}$，$\tau_{zx}=-\tau_{xz}$，$\tau_{xy}=-\tau_{yx}$，如图 1 - 5 所示。

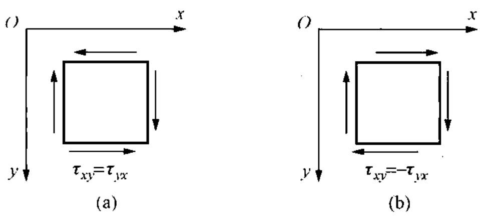

图 1 - 5　两门力学中剪应力正负号的规定
（a）弹性力学；（b）材料力学

可以证明，在物体的任意一点，如果已知 σ_x，σ_y，σ_z，τ_{xy}，τ_{yz}，τ_{zx} 这六个应力分量，就可以求解经过该点任意截面上的正应力和剪应力。因此，该点的应力状态即可由上述六个应力分量完全确定。

形变是指形状的改变。物体的形状可以用它各部分的长度和相对角度来表示。因此，物体的形变可以归结为长度的改变和角度的改变。

为了分析物体在其某一点 P 的形变状态，在 P 点沿着坐标轴 x，y，z 的正方向取三个微小的线段 PA，PB，PC，如图 1 - 4 所示。在外因作用下物体发生变形以后，这三个线段的长度以及它们之间的直角一般都将有所改变。各线段的每单位长度的伸缩，即单位伸缩或相对伸缩，称为线应变，也称正应变；线应变用字母 ε 表示：ε_x 表示 x 方向的线段 PA 的线应变，ε_y、ε_z 的意义可以此类推。线应变以伸长为正，缩短为负，与正应力的正负号规定相适应。各线段之间的直角的改变用弧度衡量，称为角应变，用字母 γ 表示。角应变 γ_{xy} 表示 x 与 y 两方向的线段 PA 与 PB 之间的直角的改变，其余类推。角应变以直角变小为正，变大为负，与剪应力的正负号规定相适应。线应变和剪应变都是量纲为 1 的量。

可以证明，在物体的任意一点，如果已知 ε_x，ε_y，ε_z，γ_{xy}，γ_{yz}，γ_{zx} 这六个应变分量，就可以求得经过该点的任一线段的线应变，也可以求得经过该点的任意两个线段之间的角度的改变。因此，这六个应变，称为该点的形变分量，可以完全确定该点的形变状态。

位移，是指一点位置的移动。物体内任意一点的位移，用它在 x，y，z 三个坐标轴上的投影 u，v，w 来表示，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。这三个投影称为

该点的位移分量，位移及其分量的量纲是 L。

需要说明的是，弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、形变分量和位移分量，都是随着该点的位置变化而变化的，因而都是位置坐标的函数。

§1.3　弹性力学的研究内容

弹性力学是在材料力学的基础上发展起来的。材料力学的研究对象是杆件（物体的长度比横截面的最大尺度大得多）。而弹性力学的研究对象不仅是杆件（一维），还包含二维和三维的问题，比如板壳和块体，比材料力学的研究范围更为广泛。对于土木、机械等工科专业来说，弹性力学的研究任务与材料力学、结构力学的任务相似，都是分析结构或构件在弹性阶段的应力和位移，校核结构或构件的强度和刚度是否满足工程要求，同时寻求并改进它们的计算方法。需要指出，这三门学科并不完全相同，它们在研究对象上各有分工、在研究方法上也具有不同之处。

对于材料力学来说，其研究对象主要是杆件，主要研究内容在于分析杆件在拉压、剪切、弯曲、扭转等因素单独或者组合作用下的内力、应力和位移；结构力学进一步研究杆件组成的结构或体系如桁架、刚架、排架、桁—梁组合结构等在外力作用、温度改变、装配误差等因素作用下的力学响应。而对于非杆状的结构，例如板和壳、水坝、挡土墙、压力隧道、弹性地基等实体结构，则为弹性力学的研究对象。与此同时，很多情形下也经常应用弹性力学理论对杆状构件作进一步的、较为精确的分析和计算。

从研究方法上来看，弹性力学和材料力学也有较大的不同。材料力学在应用静力学、几何学和物理学理论研究杆件的内力、应力和位移时，为了简化问题的分析和计算，经常对构件的形变状态或应力分布等做一些假定，在这些假定的前提下得出的解答往往只是近似的结论。而应用弹性力学对杆件结构进行研究则一般不引用那些假定，得出的结果就比较精确，从而更具有指导意义。例如，在材料力学里计算含有小孔的拉伸构件，通常假定拉应力在小孔附近的净截面上是均匀分布的，只考虑小孔引起的截面面积减小对应力的影响。而弹性力学的研究结果表明：远离小孔的净截面上应力分布均匀，而小孔附近截面上的应力不是均匀分布的，在孔的附近将发生高度的孔口应力集中，孔边的最大拉应力为平均拉应力的三倍。当然，对于很多工程问题，采用材料力学方法得出的结论具有近似性，但也已经满足工程精度要求。

虽然弹性力学并不直接研究杆系结构，但弹性力学借鉴了很多结构力学的研究方法，大大扩展了自身理论的应用范围，使得某些比较复杂的、无法求解的问题得到了很好的解答。这些解答虽然在理论上具有一定的近似性，但应用在工程上，通常却是具有足够精度的。尤其是在 20 世纪 50 年代中期发展起来的有限单元法中，把弹性连续体划分成有限大小的单元构件，然后用结构力学里的位移法、力法或混合法求解，更加显示了弹性力学与结构力学综合应用的良好效果。

由此可见，虽然材料力学、结构力学和弹性力学在研究对象、研究方法上各有特点，但这三门学科并没有严格的界限区分，对于具体的工程问题，应该根据具体的要求，合理选择适宜的理论和方法，扬长避短，力争用最经济的投入和最小的工作量取得满足工程需要的计算结果。

§1.4 弹性力学的基本假设

如果将研究对象的所有性质和特点都精确地考虑进去，则问题将变的非常复杂，甚至得不出明确的解答。为此，通常必须按照所研究物体的特点以及求解问题的性质和范围，对研究对象的材料性质做出若干基本假设，抓住主要矛盾，忽略一些影响很小的次要因素，使得问题的求解成为可能。弹性力学中对研究对象的基本假设包含以下几个方面：

（1）连续性假设——假设物体是连续的，即假定整个物体的体积内部都被组成这个物体的材料所充满，密实而无任何空隙。这样，物体内的一些物理量，例如应力、形变、位移等才可能是连续的，进而才可能用坐标变量的连续函数来表示它们的变化规律并进行数学分析。实际上，一切物体都是由微粒组成的，内部都存在着气孔、杂质等缺陷，严格说来都不符合上述假定。但如果微粒的尺寸、相邻微粒之间的距离以及内部杂质等都比物体的尺寸小得多，那么，引入物体连续性的假定，就不会引起显著的误差。

（2）均匀性假设——假定物体是均匀的，整个物体是由同一材料组成的，内部各部分的力学性能如弹性常数等是完全相同的，不随位置坐标的变化而改变。在对物体进行研究时，可取内部任意部分作为研究对象，得出的结论具有代表性。如果物体是由两种或两种以上的材料组成的，例如混凝土，只要每一种材料的颗粒远远小于物体的整体尺寸而且在物体内分布相对均匀，这个物体就可以视为满足均匀性假设。

（3）各向同性假设——假定物体是各向同性的，即物体的力学性质在物体的所有各个方向都是相同的，物体的弹性常数才不随方向改变而变化。对物体从不同方向进行研究，可以得到相同的结论。钢材、铸铁、玻璃、混凝土等宏观上都可以视为各向同性材料。而木材、竹材、复合材料则不能作为各向同性体。

（4）完全弹性假设——假定物体是完全弹性的。所谓弹性，指的是“物体在引起形变的外力被移去之后能完全恢复原形”这一性质。所谓完全弹性，指的是物体能完全恢复原形而没有任何残余形变。这样的物体在任一瞬时的形变就完全决定于它在这一瞬时所受的外力，与它过去的受力情况无关。由材料力学已知：塑性材料的物体，在应力未达到屈服极限以前，是近似的完全弹性体；脆性材料的物体，在应力未超过比例极限以前，也是近似的完全弹性体。在一般的弹性力学中，完全弹性的这一假定，还包含形变与引起形变的应力成正比的含义，亦即两者之间是成线弹性关系的。因此，应力和应变之间的关系可以用胡克定律来表示，其弹性常数不随应力或应变的大小而变化。

（5）小变形假设——假定物体的位移和形变都是微小的。这就是说，物体受力以后，整个物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸，而且应变和转角都远小于1。这样，在建立物体变形以后的平衡方程时，就可以方便地用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸，而不致引起显著的误差；并且，在考察物体的形变与位移的关系建立几何方程时，由于$\varepsilon \ll 1$，$\varepsilon \gg \varepsilon^2 \gg \varepsilon^3 \gg \cdots$，因此在同一方程中，可以只保留形变分量的一次项，略去形变分量的二次项及高阶小量，使几何方程成为线性方程，从而简化问题的计算。

（6）无初始应力假设——假设物体处于自然状态，即在外界因素作用之前，物体内部没有应力。弹性力学求解的应力仅仅是外力或温度改变而产生的。

在以上六项基本假设中，符合前四项假设的物体成为理想弹性体。本教材即以理想弹性体为研究对象，研究无初始应力的小变形问题。

习　　题

1-1　举例说明常见工程材料中哪些符合是弹性力学基本假定的，哪些是不符合的？

1-2　一般的混凝土构件和钢筋混凝土构件可否视为理想弹性体？一般的岩质地基和土质地基能否视为理想弹性体？

1-3　弹性体的应力应变关系一定是线性的吗？什么时候才服从胡克定律？

1-4　已知：$\sigma_x=100\text{MPa}$，$\sigma_y=-50\text{MPa}$，$\tau_{xy}=-25\text{MPa}$，试在图 1-6 所示单元体上标出以上应力。

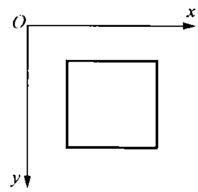

图 1-6　习题 1-4 图

第二章　平面问题的基本理论

§2.1　平面应力和平面应变问题

工程结构中的任何一个弹性体都是空间体，其外力、支座反力一般不在同一个平面上，因此，严格地来说，任何一个实际的弹性力学问题都是空间问题。如果我们所考察的弹性体具有某种特殊的形状，而且承受着某种特殊的外力，则该空间问题就可近似地简化为平面问题。这样，一方面可大大减少分析和计算的工作量，另一方面所得结果能够满足工程上的精度要求。

一、平面应力问题

如图2-1所示，设有厚度为t的等厚度薄板，板边上作用有平行于板面且不沿厚度变化的面力，同时要求体力平行于板面且不沿厚度变化。

如取薄板的中面为xy面，垂直于中面的任一直线为z轴，则板两侧面的边界条件为

$$\sigma_z\big|_{z=\pm\frac{t}{2}}=0,\quad \tau_{zx}\big|_{z=\pm\frac{t}{2}}=0,\quad \tau_{zy}\big|_{z=\pm\frac{t}{2}}=0$$

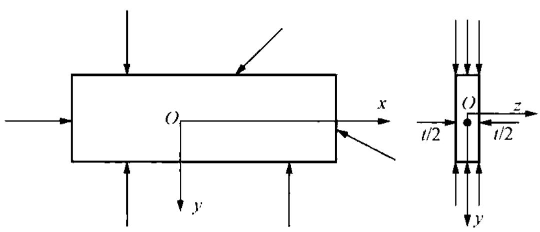

图2-1　平面应力问题

由于板很薄，外力又不沿厚度变化，故可认为在薄板内的各点均有$\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$。由剪应力互等定理，有$\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$，故空间的六个应力分量只剩下平行于$xy$面的三个应力分量，即$\sigma_x$、$\sigma_y$和$\tau_{xy}=\tau_{yx}$。由于全部应力分量与$z$无关，故称此类问题为平面应力问题。同时，因为板很薄，形变分量和位移分量也认为不沿板的厚度变化。

二、平面应变问题

如图2-2所示，设有很长的等截面棱柱体，它的支撑情况不沿长度变化，柱体上作用有平行于柱体横截面且沿柱体长度不变的外荷载，同时要求体力平行于柱体横截面且沿柱体长度保持不变。

如取柱体的任一横截面为xy面，任一纵线为z轴，则所有应力分量、形变分量和位移分量均不沿z方向变化，由对称性（柱体为无限长，任一横截面都可以看作是对称面）可知，所有各点沿z方向的位移均为零，即$w=0$，$\varepsilon_z=0$。由于全部位移分量与z无关，故称此类问题为平面位移问题，习惯上又称为平面应变问题。又由对称性可知，$\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$。由剪应力互等定理，有$\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$。另外，由于z方向的伸缩被阻止，故σ_z一般不等于零。

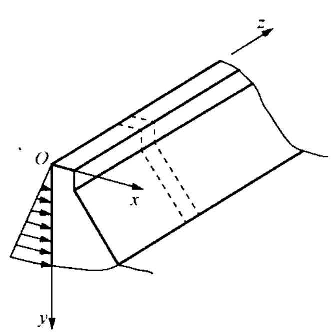

图2-2　平面应变问题

工程上诸如挡土墙、重力式坝和条形基础等问题，由于它们实际上并不是无限长的，且在靠近两端处横截面的形状一般是变化的，故严格地说，它们不符合平面应变问题的。但是实践证明，对离两端较远处，若按平面应变问题进行分析，所得出的结果是能够满足工程上的精度要求的。

§2.2 平衡微分方程

如图 2-1、图 2-2 所示的柱形体，设在图中任意一点 P 附近取出一个微小的正平行四边形，如图 2-3 所示，体力为 X、Y，为了计算方便，设 z 方向的长度为单位长度，x 和 y 方向的长度分别为 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$。

一般而言，应力分量是坐标 x 和 y 的函数，因此，作用于微元体上下两对面和左右两对面的应力分量不完全相同。对左右两对面而言，设 σ_x 只沿着坐标 x 而变化，若作用于左面 PB 的平均正应力和平均剪应力分别为 σ_x 和 τ_{xy}（即 $x=x_0$ 处的应力），则作用于右面 AC 的平均正应力和平均剪应力可根据泰勒级数展开，即

$$\begin{cases}\sigma_x+\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2!}\dfrac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}\mathrm{d}^2x+\cdots\\ \tau_{xy}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2!}\dfrac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x^2}\mathrm{d}^2x+\cdots\end{cases}$$

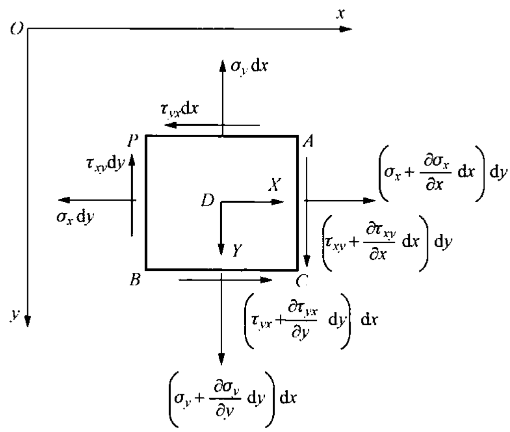

图 2-3　微元体应力

略去二阶及二阶以上的微量后得

$$\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x,\quad \tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x$$

同理，若作用于上面 PA 的平均正应力和平均剪应力为 σ_y 和 τ_{yx}（即 $y=y_0$ 处的应力），则作用于下面 BC 的平均正应力和平均剪应力为

$$\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\mathrm{d}y,\quad \tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y$$

由于物体受力后处于平衡状态，这就要求物体内的任意一点均必须保持平衡，则根据平面一般力系的特点，首先若以通过中心 D 并平行于 z 轴的直线为矩轴，则有 $\sum M_D=0$，即

$$\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\times1\times\frac{\mathrm{d}x}{2}+\tau_{xy}\mathrm{d}y\times1\times\frac{\mathrm{d}x}{2}$$

$$-\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\times1\times\frac{\mathrm{d}y}{2}-\tau_{yx}\mathrm{d}x\times1\times\frac{\mathrm{d}y}{2}=0$$

将上式两边同除以 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，合并相同的项得

$$\tau_{xy}+\frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x=\tau_{yx}+\frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y$$

当 $\mathrm{d}x$ 及 $\mathrm{d}y$ 趋向于零时，则 A、B、C 三点均趋向于 P 点，这时各面上的平均剪应力均趋向于在 P 点的剪应力，从而有

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}\qquad(2-1)$$

这又一次证明了剪应力的互等定理。

其次，由 $\sum F_x=0$ 得

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\times1-\sigma_x\mathrm{d}y\times1+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\times1-\tau_{yx}\mathrm{d}x\times1+X\mathrm{d}x\mathrm{d}y\times1=0$$

化简后，并将上式两边同除以 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+X=0 \tag{2-2}$$

同理，由 $\sum F_y=0$ 得

$$\left(\sigma_y+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\times 1-\sigma_y\mathrm{d}x\times 1+\left(\tau_{xy}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\times 1-\tau_{xy}\mathrm{d}y\times 1+Y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\times 1=0$$

化简后，并将上式两边同除以 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，得

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+Y=0 \tag{2-3}$$

式（2-2）、式（2-3）即为平衡微分方程在平面问题中的简化形式，它反映了应力分量与体力分量之间的关系式。这两个微分方程包含着三个未知数，即：σ_x、σ_y 和 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$。因此，确定应力分量的问题是超静定的，还必须考虑形变和位移，才能得到问题的解答。对于平面应变问题来说，图 2-3 所示的六面体上，一般还有 z 方向的正应力 σ_z，但由于它们自成平衡，从而完全不影响式（2-1）～式（2-3）的建立，故上述方程适用于两类平面问题。

§2.3 应 力 状 态 分 析

一、一点的应力状态

在上一节中，我们设想弹性体内任意一点的平均应力方向与 x 轴和 y 轴的方向相同。事实上，对于弹性体内的任意一个点而言，它在平面内有两个自由度，从而欲使该点发生运动，可通过任意两个正交的力或它们的合力来实现，其作用是完全等效的。为此，有必要研究过 P 点任一斜面上的平均应力。

如图 2-4 所示，设任意一点 P 处的应力分量 σ_x、σ_y、$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，过 P 点作平行于 z 轴而倾斜于 x 轴和 y 轴的任一斜面 AB，则当平面 AB 无限接近 P 点时，平面 AB 上的平均应力 S 即为过 P 点任一斜方向的平均应力。

设 N 为斜面 AB 的外法线方向，令其方向余弦为

$$\begin{cases}\cos(N,x)=l\\ \cos(N,y)=m\end{cases}$$

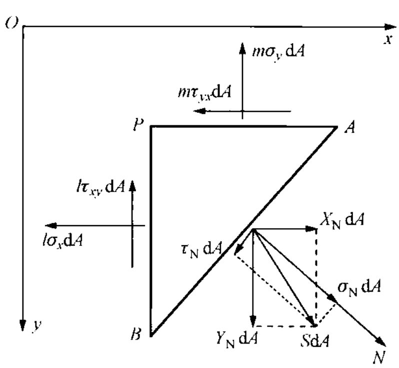

图 2-4 斜面应力

设斜面 AB 的面积为 $\mathrm{d}A$，则截面 PA 和 PB 的面积分别为 $m\mathrm{d}A$ 和 $l\mathrm{d}A$。

设 $X_N\mathrm{d}A$、$Y_N\mathrm{d}A$ 表示斜面 AB 上的力 $S\mathrm{d}A$ 在 x 轴、y 轴上的投影，则由 $\sum F_x=0$ 得

$$-l\sigma_x\mathrm{d}A\times 1-m\tau_{yx}\mathrm{d}A\times 1+X_N\mathrm{d}A\times 1=0$$

两边同除以 $\mathrm{d}A$，即得

$$X_N=l\sigma_x+m\tau_{yx} \tag{2-4}$$

式（2-4）未考虑作用于 PAB 的体力，原因是体力与体积成正比，是高一阶的微量。

同理，由 $\sum F_y=0$ 得

$$-m\sigma_y\mathrm{d}A\times 1-l\tau_{xy}\mathrm{d}A\times 1+Y_N\mathrm{d}A\times 1=0$$