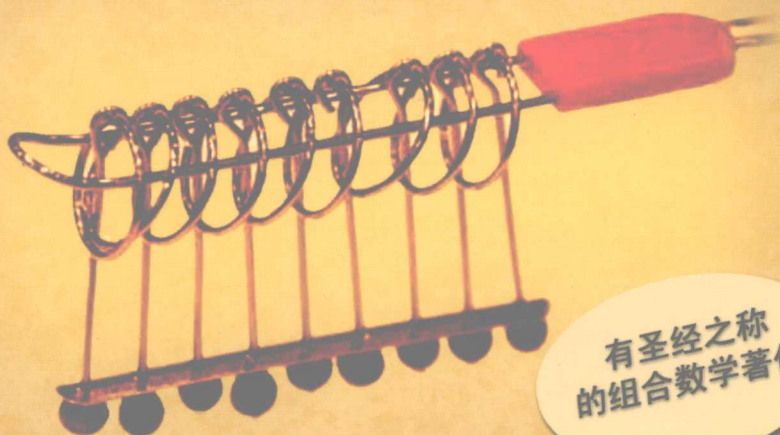


TURING

图灵数学 · 统计学丛书 32

WILEY



有圣经之称的  
组合数学著作

# Applied Combinatorics

# 应用组合数学

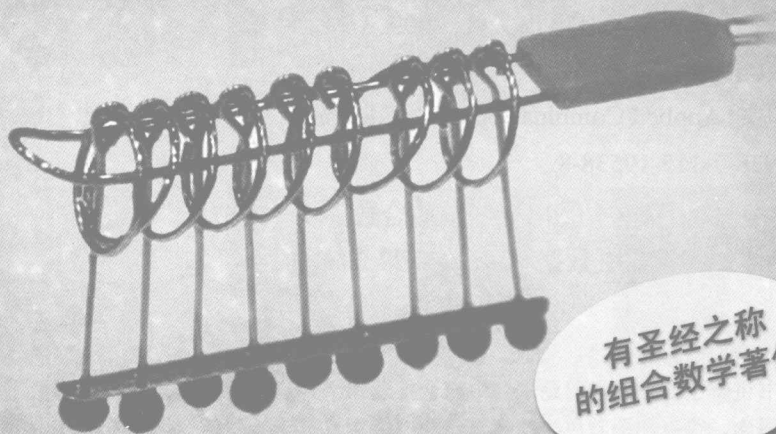
(第 5 版)

[美] Alan Tucker 著  
冯 速 译

人民邮电出版社  
POSTS & TELECOM PRESS

TURING

图灵数学 · 统计学丛书 32



有圣经之称  
的组学数学著作

---

# Applied Combinatorics

# 应用组合数学

(第 5 版)

[美] Alan Tucker 著  
冯速 译

人民邮电出版社  
北 京

## 图书在版编目(CIP)数据

应用组合数学: 第5版 / (美) 塔克 (Tucker, A.) 著;  
冯速译. —北京: 人民邮电出版社, 2009. 3

(图灵数学·统计学丛书)

书名原文: Applied Combinatorics, 5th Edition

ISBN 978-7-115-19538-8

I. 应… II. ①塔… ②冯… III. 组合数学 IV. O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 203458 号

## 内 容 提 要

本书讲解了离散数学问题求解中组合推理和组合建模的方法、思维和运用. 主要涉及图论基本概念、覆盖和图着色、搜索算法和网络运算算法等图论知识和方法, 以及基本的计数方法、生成函数计数模型、递推关系模型、容斥原理、Polya 枚举公式等枚举方法及其应用. 作者还介绍了如何用计算机科学地处理枚举, 以及逐步受限游戏的理论及其在尼姆游戏中的应用, 体现了组合数学的趣味性.

本书内容丰富, 简明易懂, 适合作为高等院校数学专业和计算机专业高年级本科生及研究生的教材, 也可供对组合数学有兴趣的相关人员阅读.

图灵数学·统计学丛书

## 应用组合数学 (第5版)

- ◆ 著 [美] Alan Tucker
- 译 冯 速
- 责任编辑 明永玲
- 执行编辑 张继发

- ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号  
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn  
网址: <http://www.ptpress.com.cn>  
北京铭成印刷有限公司印刷

- ◆ 开本: 700×1000 1/16

印张: 22.75

字数: 583 千字

印数: 1-3 000 册

2009 年 3 月第 1 版

2009 年 3 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号 图字: 01-2006-7685 号

ISBN 978-7-115-19538-8/O1

定价: 65.00 元

读者服务热线: (010)88593802 印装质量热线: (010) 67129223

反盗版热线: (010)67171154



书名: 统计软件教程  
原书名: Loss Models: From Data To Decisions, Second Edition  
作者: [美] Stuart A. Klugman 等  
译者: 吴昊等 (北京大学)  
定价: 35.00元



书名: 常用数学软件教程  
原书名: Probability Theory: The Logic of Science  
作者: [美] E. T. Jaynes  
译者: 冉启建 张斯李 张立柱  
定价: 30.00元



书名: 统计学导论  
原书名: Elements of Set Theory  
作者: [美] Samuel Karlin, Howard M. Taylor  
译者: 李勇 张淑梅  
定价: 26.00元



书名: 线性代数  
原书名: A First Course in Optimization Theory  
作者: [美] R. V. Churchill, Jr.  
译者: 何立国 刘艳秋 石鸿雁 何春池  
定价: 22.00元



书名: 实用非参数统计  
原书名: Practical Nonparametric Statistics  
作者: [美] W. J. Conover  
译者: 崔恒建  
定价: 59.00元



书名: 数值线性代数  
原书名: Numerical Linear Algebra  
作者: [美] Lloyd N. Trefethen, David Bau, II  
译者: 陈金青 关治  
定价: 59.00元



书名: 应用数值线性代数  
原书名: Applied Numerical Linear Algebra  
作者: [美] James W. Demmel  
译者: 王树荣  
定价: 49.00元



书名: 线性代数及其应用  
原书名: Linear Algebra and Its Applications  
作者: [美] David C. Lay  
译者: 沈复兴 傅莺莺 莫单玉  
定价: 59.00元



书名: 分形几何 (第2版)  
原书名: Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications  
作者: [英] Kenneth Falconer  
译者: 朱来义 黄志勇  
定价: 49.00元



书名: 实分析习题集 (第2版)  
原书名: Problems in Real Analysis  
作者: [美] Charalambos D. Aliprantis, Owen Burkinshaw  
译者: 朱来义 黄志勇  
定价: 39.00元



书名: 概率统计  
原书名: Probability and Statistics  
作者: [美] Morris H. DeGroot, Mark J. Schervish  
译者: 叶中行 王善华 徐晓峰  
定价: 59.00元



书名: 微分方程、动力系统与混沌  
原书名: Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos  
作者: [美] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert Devaney  
译者: 陈金青 关治  
定价: 59.00元



书名: 陶哲轩实分析  
原书名: Terence Tao's Analysis I  
作者: [美] Terence Tao  
译者: 陶哲轩 (Terence Tao)  
定价: 69.00元



书名: 不等式 (第2版)  
原书名: Inequalities  
作者: [美] E. T. Hardy, G. G. Polya  
译者: 葛思义  
定价: 49.00元



书名: 线性代数及其应用  
原书名: Linear Algebra and Its Applications  
作者: [美] Peter D. Lax  
译者: 傅莺莺 沈复兴  
定价: 55.00元



书名: 复分析: 可视化方法  
原书名: Visual Complex Analysis  
作者: [英] Tristan Needham  
译者: Douglas C. Montgomery  
定价: 79.00元



书名: 试验设计与分析 (英文版)  
原书名: Design and Analysis of Experiments  
作者: [美] Douglas C. Montgomery  
译者: Douglas C. Montgomery  
定价: 89.00元



书名: 微分几何与黎曼几何  
原书名: Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry  
作者: [美] William M. Boothby  
译者: 陈金青 关治  
定价: 59.00元



书名: 概率与测度论 (英文版)  
原书名: Probability Theory: The Logic of Science  
作者: [美] E. T. Jaynes  
译者: 吴昊等 (北京大学)  
定价: 69.00元



书名: 多复分析导引 (英文版)  
原书名: An Introduction to Complex Analysis in Several Variables  
作者: [美] Lars Hörmander  
译者: 傅莺莺 沈复兴  
定价: 49.00元



书名: 集合论基础 (英文版)  
原书名: Elements of Set Theory  
作者: [美] Samuel Karlin, Howard M. Taylor  
译者: Herbert B. Enderton  
定价: 39.00元



书名: 最优化导论 (英文版)  
原书名: A First Course in Optimization Theory  
作者: [美] R. V. Churchill, Jr.  
译者: Rangaraj K. Sundaram  
定价: 59.00元



书名: 小平邦彦复分析 (英文版)  
原书名: Complex Analysis  
作者: [美] Kunihiko Kodaira  
译者: Kunihiko Kodaira  
定价: 59.00元



书名: 随机分析及应用 (英文版)  
原书名: Introduction to Stochastic Calculus with Applications  
作者: [美] Fima C. Klebaner  
译者: 陈金青 关治  
定价: 59.00元

## 无限精彩, 纷至沓来

### 图灵原版数学·统计学系列

### 图灵数学·统计学丛书 高等院校数学·统计学教材系列

书名: 损失模型: 从数据到决策 (第2版)  
原书名: Loss Models: From Data To Decisions, Second Edition  
作者: [美] Stuart A. Klugman 等  
译者: 吴昊等 (北京大学)  
定价: 69.00元  
出版时间: 2008年12月

书名: 概率论: 科学的逻辑 (英文版)  
原书名: Probability Theory: The Logic of Science  
作者: [美] E. T. Jaynes  
译者: 冉启建 张斯李 张立柱  
定价: 30.00元  
出版时间: 2008年12月

书名: 随机过程高级教程 (英文版)  
原书名: A Second Course in Stochastic Processes  
作者: [美] Samuel Karlin, Howard M. Taylor  
译者: 李勇 张淑梅  
定价: 26.00元  
出版时间: 2008年12月

书名: 应用组合数学 (第5版)  
原书名: Applied Combinatorics  
作者: [美] Alan Tucker  
译者: 冯建 (北京师范大学)  
定价: 59.00元  
出版时间: 2009年1月

书名: 微分几何基础 (第2版修订版 英文版)  
原书名: Elementary Differential Geometry  
作者: [美] Barrett O'Neill  
译者: 陈金青 关治  
定价: 79.00元  
出版时间: 2009年2月

书名: 金融工程原理  
原书名: Principles of Financial Engineering  
作者: [美] John N. Nardo  
译者: 陈典发  
定价: 59.00元  
出版时间: 2009年2月

书名: 数值分析  
原书名: Numerical Analysis  
作者: [美] Timothy Sauer  
译者: 吴昊等 (北京大学)  
定价: 79.00元  
出版时间: 2009年3月

书名: 金融时间序列分析 (第2版)  
原书名: Analysis of Financial Time Series  
作者: [美] Ruey S. Tsay (蔡瑞驹)  
译者: 王辉 潘家社  
定价: 59.00元  
出版时间: 2009年3月

书名: 复分析: 可视化方法  
原书名: Visual Complex Analysis  
作者: [英] Tristan Needham  
译者: 杜现昆 马晶  
定价: 59.00元  
出版时间: 2009年3月

书名: 泛函分析  
原书名: Functional Analysis  
作者: [美] Peter D. Lax (美国国家科学院院士)  
译者: 葛思义 等  
定价: 59.00元  
出版时间: 2009年4月

书名: SPSS统计初步 (第2版)  
原书名: Discovering Statistics Using SPSS  
作者: [美] Andy Field  
译者: 陈海凌 等  
定价: 59.00元  
出版时间: 2009年4月

书名: 计算统计  
原书名: Computational Statistics  
作者: [美] Geof H. Givens, Jennifer A. Hoaglin  
译者: 王来生等 (南开大学)  
定价: 45.00元  
出版时间: 2009年5月

书名: 基础拓扑学  
原书名: Basic Topology  
作者: [美] M. A. Armstrong  
译者: 孙以丰 (吉林大学)  
定价: 39.00元  
出版时间: 2009年6月

书名: 线性代数 (第2版)  
原书名: Linear Algebra Done Right  
作者: [美] Sheldon Axler  
译者: 杜现昆 马晶  
定价: 35.00元  
出版时间: 2009年6月

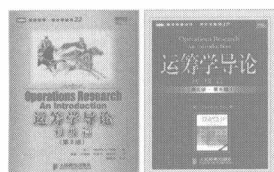
书名: 多元统计分析导论 (第3版)  
原书名: An Introduction to Multivariate Statistical Analysis  
作者: [美] T. W. Anderson  
译者: 张润楚等 (南开大学)  
定价: 69.00元  
出版时间: 2009年8月

图灵数学统计学系列丛书(含影印版和中文版)致力于引进国外优秀数学统计学教材。入选图书为世界知名院校竞相采用的顶级教材,久为国内外学界瞩目;或属于计算数学和金融数学等教学、科研和应用的热点领域,填补了国内教材的空缺;更有众多在国际学术界享有盛誉的大师名作,有些著作原版已经印行达40次以上,至今仍畅销不衰。丛书从选题、引进、翻译到出版,得到了齐民友、路见可、胡迪鹤、叶中行、陆金甫、龚光鲁等国内数学统计学界老中青三代专家的鼎力支持。

图灵原版数学·统计学系列

图灵数学·统计学丛书

高等院校数学·统计学教材系列



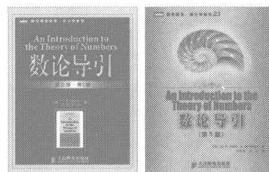
书 名: 运筹学导论: 初级篇(第8版)(中英文版)  
原书名: Operations Research: An Introduction  
作 者: [美] Hamdy A. Taha  
译 者: 薛毅 刘德刚 朱建明 侯思祥  
中文版书号: 978-7-115-18150-3  
英文版书号: 7-115-16066-9  
中文版定价: 69.00元  
英文版定价: 59.00元



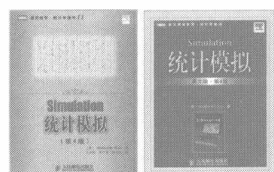
书 名: 运筹学导论: 高级篇(第8版)(中英文版)  
原书名: Operations Research: An Introduction  
作 者: [美] Hamdy A. Taha  
译 者: 刘德刚 薛毅 朱建明 侯思祥  
中文版书号: 978-7-115-18947-9  
英文版书号: 7-115-16065-2  
中文版定价: 59.00元  
英文版定价: 59.00元



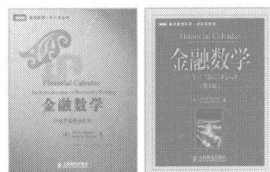
书 名: 近世代数概论(第5版)(中英文版)  
原书名: A Survey of Modern Algebra  
作 者: [美] Garrett Birkhoff, Saunders Mac Lane  
译 者: 王选祥 徐广善  
中文版书号: 978-7-115-18387-3  
英文版书号: 7-115-16231-1  
中文版定价: 69.00元  
英文版定价: 69.00元



书 名: 数论导引(第5版)(中英文版)  
原书名: An Introduction to the Theory of Numbers, SE  
作 者: G.H. Hardy, Edward Maitland Wright  
译 者: 张明尧 张凡  
中文版书号: 978-7-115-18452-8  
英文版书号: 7-115-15611-2  
中文版定价: 69.00元  
英文版定价: 69.00元



书 名: 统计模拟(第4版)(中英文版)  
原书名: Simulation, 4E  
作 者: [美] Sheldon M. Ross  
译 者: 王磊 陈广雷 邹长亮  
中文版书号: 7-115-16085-0  
英文版书号: 7-115-15564-1  
中文版定价: 39.00元  
英文版定价: 45.00元



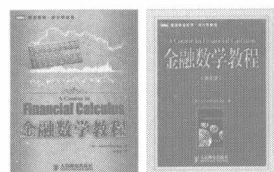
书 名: 金融数学: 衍生品定价引论(中英文版)  
原书名: Financial Calculus  
作 者: Martin Baxter, Andrew Rennie  
译 者: 叶中行 王桂兰 林建忠(上海交通大学)  
中文版书号: 7-115-14204-1  
英文版书号: 7-115-14089-8  
中文版定价: 29.00元  
英文版定价: 35.00元



书 名: 应用随机过程: 概率模型导论(第9版)  
原书名: Introduction to Probability Models  
作 者: [美] Sheldon M. Ross  
译 者: 黄光鲁(清华大学)  
中文版书号: 7-115-16733-0  
英文版书号: 7-115-16023-2  
中文版定价: 89.00元  
英文版定价: 89.00元



书 名: 随机过程初级教程(第2版)(中英文版)  
原书名: A First Course in Stochastic Processes  
作 者: Samuel Karlin, Howard M. Taylor  
译 者: 王兴元 陈宗周 陈庆华  
中文版书号: 7-115-16337-0  
英文版书号: 7-115-16598-5  
中文版定价: 69.00元  
英文版定价: 69.00元



书 名: 金融数学教程(中英文版)  
原书名: A Course in Financial Calculus  
作 者: Alison Etheridge  
译 者: 张育州等  
中文版书号: 7-115-14892-9  
英文版书号: 7-115-14090-1  
中文版定价: 29.00元  
英文版定价: 29.00元



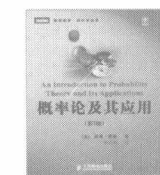
书 名: 概率论基础教程(第7版)(中英文版)  
原书名: A First Course in Probability, 7E  
作 者: Sheldon M. Ross  
译 者: 郑忠国 鲁从群  
中文版书号: 7-115-15404-X  
英文版书号: 7-115-16541-1  
中文版定价: 49.00元  
英文版定价: 69.00元



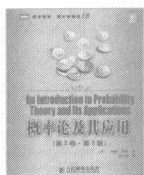
书 名: 偏微分方程数值解(第2版)(中英文版)  
原书名: Numerical Solution of PDE  
作 者: K. W. Morton, D. F. Mayers  
译 者: 李治平(清华大学)  
中文版书号: 7-115-14203-3  
英文版书号: 7-115-14075-8  
中文版定价: 29.00元  
英文版定价: 39.00元



书 名: 图论导引(中英文版)  
原书名: Introduction to Graph Theory  
作 者: Gary Chartrand, Ping Zhang  
译 者: 范慈波 汪毅 龚世才 朱明  
中文版书号: 7-115-16153-6  
英文版书号: 7-115-14834-1  
中文版定价: 49.00元  
英文版定价: 49.00元



书 名: 概率论及其应用  
原书名: An Introduction to Probability Theory and Its Applications  
作 者: 胡迪鹤(武汉大学)  
译 者: 胡迪鹤  
书 号: 7-115-14729-9  
定 价: 59.00元



书 名: 概率论及其应用(第2版)  
原书名: An Introduction to Probability Theory and Its Applications  
作 者: [美] William Feller  
译 者: 郑元译  
书 号: 7-115-16735-4  
估 价: 79.00元



书 名: 微积分入门: 一元微积分  
原书名: 解析入门  
作 者: 小泽邦彦(Kunihiro Kodaira)  
译 者: 裴东河  
书 号: 978-7-115-17261-7  
定 价: 39.00元



书 名: 微积分入门: 多元微积分  
原书名: 解析入门  
作 者: 小泽邦彦(Kunihiro Kodaira)  
译 者: 裴东河  
书 号: 978-7-115-18373-6  
定 价: 39.00元



书 名: 流形上的微积分(双语版)  
原书名: Calculus on Manifolds  
作 者: Michael Spivak  
译 者: 齐民友路见可(武汉大学)  
书 号: 7-115-14224-6  
定 价: 29.00元  
出版/时间: 2006年2月



书 名: 从微分观点看拓扑(双语版)  
原书名: Topology from the Differentiable Viewpoint  
作 者: John Willard Milnor  
译 者: 熊金城  
书 号: 978-7-115-18467-2  
定 价: 20.00元

## 版 权 声 明

*Applied Combinatorics*, 5th Edition by Alan Tucker, ISBN 0-471-73507-8.

Copyright © 2007 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Authorized translation of this edition published by John Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester, Weinheim, Singapore, Brisbane, Toronto. No part of this book may be reproduced in any form without the written permission of John Wiley & Sons, Inc.

This edition published by POSTS & TELECOM PRESS Copyright © 2009.

本书简体中文版由 John Wiley & Sons, Inc. 授权人民邮电出版社在全球出版发行. 未经出版者书面许可, 不得以任何方式复制本书内容.

本书封底贴有 John Wiley & Sons, Inc. 激光防伪标签, 无标签者不得销售.  
版权所有, 侵权必究.

## 译者序

组合数学是系统分析的基础,在计算机科学、数学、运筹学、生物学等诸多学科中有着广泛的应用.组合数学内容繁多,所要处理的问题又多是非常深奥难解的NP问题,掌握组合数学的相当知识已很不易,而熟练运用组合数学解决实际问题则更是困难.通过一两本书就想要学会组合数学是不太可能的.读者可以根据自己的需求,选择合适的书籍,循序渐进地学习组合数学的知识.

本书讲授离散数学问题求解中组合推理和组合建模的方法、思维和运用,它强调组合推理的3个主要方面——可能性的系统分析,问题逻辑结构的探究,以及精巧、灵活的设计,从而有助于培养基础离散数学问题求解的能力.

本书有如下三大特色.首先,较多地使用了贴近日常生活、比较容易理解的游戏作为示例.第二,本书详略得当,强调推理技巧:只有在需要运用证明中的推理去解决应用问题时,才给出证明,否则不给出证明,而只给出结果,然后把这些结果运用于问题求解.第三,本书以组合数学在计算机科学、运筹学以及有限概率中的重要应用作为研究动力,同时使用纸牌游戏中的概率或推理游戏等作为更有趣的学习背景.这样可以使学习趣味性更强,而且可以使读者免于陷入特殊应用的复杂场景中.因此,这是一本面向应用的组合数学教学参考书,读者可以相对轻松、快速地学习组合数学的相关概念、技巧及其应用.对理论学习感兴趣的读者也可以通过本书领略到组合数学的应用能力,理解各概念和技术的用途,为深入进行理论学习打下良好的基础.

译者对本书的翻译目标是易懂、通畅.我们为此付出了巨大的努力,感谢我爱人在本书翻译过程中所给予的支持和帮助.但是,由于译者能力有限,难免有对原书理解不够的地方,不周之处,敬请读者指正.

译者  
2008年10月

---

冯速 1961年沈阳出生,1997年获名古屋大学工学博士学位,北京师范大学教授.从教十余年,从事计算机基础理论和计算机辅助教学的研究及计算机理论课程的教学工作.对计算机教育有浓厚的兴趣.曾译《编译器工程》、《数据结构:从应用到实现》等多部教学参考书.

# 前 言

组合推理是所有计算机系统分析的基础。它在离散的运筹问题及有限概率中扮演类似的角色。计算机科学的两个最基本的数学问题是程序的速度及其逻辑结构。速度涉及枚举程序执行每一步的次数,而逻辑结构涉及流程图的形式。为了优化有效生产或垃圾回收 (garbage collection), 对运筹算法的速度以及逻辑结构的分析需要组合数学。确定等可能出现的某一特定子集中某个元素出现的概率时, 需要对这个子集的元素个数进行计数。这样的组合概率是很多非参数统计试验的基础。因此, 枚举和图论广泛、深入地运用于数学科学。

本书教数学专业的学生如何进行组合式推理和建模。如同一本微积分教材培养读者分析问题的基本求解能力一样, 本书也非常注重培养离散数学问题的基本求解能力。

本书所强调的组合推理的 3 个主要方面包括: 可能性的系统分析, 问题逻辑结构的探究 (例如, 寻找可以着手的子情况, 或者首先对 3 个对象而不是  $n$  个对象来解决问题), 以及精巧、灵活的设计。尽管我们提及组合数学在计算机科学、运筹学以及有限概率中的重要应用, 但这些应用大多用于激发研究的兴趣。许多涉及这些概念的例子使用了更有趣的背景, 诸如纸牌游戏或推理游戏。

我们总是首先以例子作为理论的背景, 而只有在需要运用证明中的推理去解决应用问题时, 才给出证明。否则, 我们不加证明地只给出结果, 例如各种递推关系的求解形式就是如此, 然后我们把这些结果运用于问题求解。有时候, 我们陈述若干定理来使学生领略特定领域的理论风采。

几十年来, 美国数学协会推荐的大学课程一直把组合问题求解作为数学专业训练的重要组成部分。在计算机专业课程中, 组合问题求解是诸多重要科目的基础。实际上, 我们期望大部分使用本书的学生是计算机专业的学生。不论是数学专业还是计算机专业, 作者相信理解这里所强调的推理技巧比掌握各种定义和实用技术更重要。

本书是为已经具备各方面能力的高年级学生和研究生设计的。学生的能力越强, 布置的练习就可以越难。根据学习内容的多少, 本书可以用于一学期或两学期<sup>①</sup>的课程。它还可以作为一学期的应用图论课程, 或者一学期或半学年的枚举组合课程 (从第 5 章开始)。半学年的本科离散数学课程应该涵盖第 1~3 章和第

---

<sup>①</sup> 这里是指一学年分为四学期 (quarter) 的学制。——编者注

5~8 章的大部分内容, 如果时间允许, 再从其他章节选讲一些主题.

强烈建议主讲教师手头备一本与本书配套的教学参考手册. 这一手册广泛讨论了学生们对于特定主题的常见误解, 介绍了成功讲授这门课程的教学风格, 以及课程大纲样本 (每周作业、测试, 等等).

本书的第 5 版延续了前几版的特色. 例如, 第 5 版恢复了第 1 版开篇的 Mastermind 游戏. 也恢复了第 2 版关于形式语言和有限状态机的一章, 但采用了缩编形式. 第 2 版和第 3 版的部分枚举练习的参考答案也加进了本版. 本版还有一些全新的内容, 例如关于色多项式、运输问题以及 NP 完备问题. 当然, 还有一些新颖的练习. 在计数问题的有关章节中, 对原来的很多练习还作了数值上的改变 (以防学生直接套用以往的习题解答).

很多人对本书的初稿和第 1 版作出了很有用的评注, Jim Frauenthal 和 Doug West 的帮助特别大. 本书的想法可以追溯到 1969 年 George Dantzig 和 George Polya 在斯坦福大学讲授的组合数学课程, 当时我还是学习这门课程的一名学生. 使用过本书早前版本的很多教师向我提供了很多宝贵的反馈和建议, 我衷心希望这一切可以使这一版变得更好. 我要对他们表示真诚的感谢. 追本溯源, 是我的父亲 A. W. Tucker 引起我对组合数学及积极讲授这门课程的兴趣, 长期以来, 我父亲致力于确立有穷数学在数学中的作用, 并力主在本科数学教学中加大有穷数学的内容. 最后, 我还要特别感谢纽约州立大学石溪分校听我的组合数学课程的学生们. 正是他们教会我如何讲授这门课程.

Alan Tucker

纽约州立大学石溪分校

# 绪 论

本书旨在探索并开发组合推理方面的工具,它在计算机科学和离散应用数学中是分析很多问题的基础. 作为这种推理的一个热身练习,我们在这里介绍一种 Mastermind 游戏. 它是于 20 世纪 70 年代提出来的,在英格兰得到广泛普及,以至于在 1975 年举办了全国 Mastermind 锦标赛,参赛者如潮. Mastermind 所使用的组合推理方法与构成本书基础的组合推理属于同一类型,但它把这些推理运用于娱乐之中.

这种游戏的目标是猜测由涂有颜色的小木柱组成的密码. 这一密码是从红色 (R)、白色 (W)、黄色 (Y)、绿色 (G)、蓝色 (Bu) 和黑色 (Bk) 中选出的一行 4 个柱子. 给每一种猜测结果打分,以此透露出这些猜测结果接近真实密码的程度. 而且,选定密码的玩家还需要告知猜测者: (1) 在猜测结果中有多少代码柱其颜色及在行中的位置都正确; (2) 有多少代码柱颜色是正确的 (它在密码的某个地方出现),但位置是错误的. 这两条信息分别以下面的形式记录: 信息 (1) 以黑键的形式记录,而信息 (2) 则以白键的形式记录. 密码被正确地猜测出来时游戏结束,即该猜测结果被给予 4 个黑键的评分. 例 1 中的猜测说明了这种评分过程的工作程序.

例 1 Mastermind 评分过程

| 密码 R Bu Y Y | 柱 子       | 评 分 | 评 注                                     |
|-------------|-----------|-----|-----------------------------------------|
| 第 1 次猜测     | Bu W G Y  | ●○  | 1 个代码柱至多只能得到 1 个键,因此 Y 得到 1 个黑键         |
| 第 2 次猜测     | Y G G Y   | ●○  |                                         |
| 第 3 次猜测     | Bk G G W  |     | 零分实际上非常有用,因为它排除了所有 3 种颜色                |
| 第 4 次猜测     | Bu Bu R R | ●○  | 在密码中只有 1 个蓝色柱子,所以只有 1 个位置也正确的蓝色柱子得到一个黑键 |

这种游戏与计数问题有密切的关系. 有多少种可能的密码? 有多少种黑白评分键的不同集合? 已知第一次猜测结果和它的评分后,还有多少种可能的密码? 这一游戏在概念上与信息分类和检索中的若干关键问题类似. 在计算机对人类语言、化学混合物或其他复杂数据集的识别中,我们必须对数据提出若干预设问题. 编译器通常以二分搜索树的形式执行一系列顺序检测,以便识别文本中它们正在编译的命令. 很多与高效识别相关的理论分析需要用到与 Mastermind 游戏的计数问题相同的推理和技术.

尽管我们把 Mastermind 游戏的讨论与计数问题关联在一起,但是这一游戏本身具有娱乐性,因此我们鼓励读者与朋友一起做一做这个游戏. 在没有娱乐伙伴的情况下,本节的练习给出了一些游戏,具有足以确定密码的猜测次数和评分. 下面

的例子说明如何分析这些练习.

例 2 寻找密码

依据下面的猜测和评分, 在阅读下面的分析之前读者应该尝试着自己确定密码.

|         | 柱 子       | 评 分 |
|---------|-----------|-----|
| 第 1 次猜测 | W G Bu R  | ●○  |
| 第 2 次猜测 | Bk Y R Bu | ●○  |
| 第 3 次猜测 | R R G Y   | ○○○ |
| 第 4 次猜测 | Y R R W   | ●●  |

关键的颜色是红色. 第 3 次猜测有 2 个红色且有 3 分记分键, 表明密码中至少有 1 个红色柱子; 但因为键是白色的, 所以红色一定在位置 3 或位置 4. 然而, 猜测 4 的得分只有黑键, 而红柱子在位置 2 和位置 3; 因为猜测 3 表明位置 2 不可能是红色, 所以可以推断密码在位置 3 有 1 个红色柱子, 而且没有其他红色柱子 (否则在位置 2 的红色柱子将得到 1 个白键). 注意, 猜测 2 中的黑色键也一定属于位置 3 的红色柱子.

现在, 猜测 3 表明绿色和黄色柱子必定得到 3 个白键中的 2 个 (因为有 1 个红色柱子没有得到任何键). 因为黄色在密码中的某个位置上, 猜测 4 告诉我们黄色一定在位置 1. 所以密码有 Y\_R\_ 的形式. 此时已知猜测 2 和猜测 4 中的键是黄色和红色, 这两个猜测中的其他颜色 (黑色、蓝色和白色) 都不可能在密码中. 另外, 黄色也不可能在位置 2 和位置 4, 因为它出现在猜测 2 和猜测 3 的相应位置上却没有得到黑键. 因此密码剩下的唯一可能是 Y G R G. □

有关 Mastermind 游戏策略的更多信息, 可以在 Ault 的著作中找到, 见文献 [1].

练 习

1. 确定下面猜测的密码:
- G Y R Bu

○○○○

G Bu R Y

●●○○
2. 对于下面的猜测, 确定两种可能的密码 (其中一种没有重复颜色):
- Bk Bu Y W

○○

R W Bu G

●○○

Bu G R G

○○

Y R W Bu

●○○
3. 确定下面猜测的密码:
- Bu Bu Bk W

●○

Y W Bk W

●●

W Bu R G

●○

Y Bu Bk R

●●

4. 确定下面猜测的两种可能密码:

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| R  | G  | Y  | W  | oo |
| Y  | Bk | W  | Bu | •o |
| G  | R  | R  | G  | •o |
| Bk | Bu | G  | R  | •o |
| W  | R  | Bk | R  | o  |

5. 寻找第 4 次猜测, 它的得分可以使你确定下面猜测的密码:

|    |    |    |   |    |
|----|----|----|---|----|
| G  | Y  | Bk | R | •• |
| Y  | Bu | G  | W | •o |
| Bu | W  | Y  | Y | o  |

6. 寻找第 4 次猜测, 它的得分可以使你确定下面猜测的密码:

|   |    |    |   |   |
|---|----|----|---|---|
| G | R  | Bu | W | • |
| G | Y  | Bu | G | • |
| Y | Bk | Bk | Y | o |

7. 把第 7 种颜色橙色 (O) 加到这一游戏中. 确定下面猜测的密码:

|    |    |    |   |     |
|----|----|----|---|-----|
| O  | R  | Bu | G | oo  |
| Y  | O  | W  | Y | o   |
| R  | Bk | Bu | G | ooo |
| O  | R  | R  | Y | •o  |
| Bk | Bu | O  | R | oo  |

8. 把第 7 种颜色橙色 (O) 加进来. 确定下面猜测的 2 种可能密码:

|    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|-----|
| O  | R  | G  | Bu | oo  |
| Y  | Y  | W  | O  | •o  |
| R  | Bu | Bu | Bk | •o  |
| Bk | O  | Y  | R  | •o  |
| Bu | Bk | O  | Y  | •oo |

9. 把橙色 (O) 加进来. 确定下面猜测的 7 种可能密码:

|   |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|
| O | Y  | W  | Bk | o  |
| W | Bk | O  | R  | •o |
| G | O  | R  | R  | •  |
| Y | R  | Bu | O  | oo |

10. 现在, 有 5 个位置和 2 种其他颜色: 橙色 (O) 和粉色 (P). 确定下面猜测的密码:

|    |    |    |   |    |     |
|----|----|----|---|----|-----|
| Bk | G  | G  | O | O  | ••o |
| W  | O  | Bk | G | R  | ••o |
| O  | Bk | P  | Y | Bu | •o  |
| G  | P  | Y  | R | W  | oo  |

11. 现在, 有 5 个位置和 3 种其他颜色: 橙色 (O)、粉色 (P) 和紫色 (V). 确定下面猜测的密码:

|    |   |    |    |    |    |
|----|---|----|----|----|----|
| R  | V | Bk | G  | O  | oo |
| V  | R | V  | R  | Y  | •o |
| Bk | W | W  | Bu | Bk | •  |
| P  | O | P  | O  | G  | oo |

|   |    |    |    |    |     |
|---|----|----|----|----|-----|
| G | Y  | Bu | W  | P  | •○○ |
| W | P  | V  | Bu | Y  | •○○ |
| Y | Bu | R  | V  | Bk | ○○○ |

12. 确定在 Mastermind 游戏中初始猜测的正确概率.
13. (a) 在 Mastermind 记分中, 不可能出现的 4 种或少于 4 种的黑白键集合是什么?  
(b) 在 Mastermind 记分中, 有多少种不同的黑白键集合?
14. 称 Mastermind 中的两个猜测类似, 如果其中一个猜测可以通过对另一个猜测的位置置换或颜色置换而得到. 有多少不同 (非类似) 的猜测?
15. 假设你在第一次猜测使用了 4 种不同的颜色, 并且这一猜测的得分是 4 个白键. 有多少种不同的可能密码? (注意, 所有的 4 种颜色的猜测都是类似的, 参见练习 14.)
16. 假设你的第一次猜测使用了 3 种不同的颜色 (有一种颜色是重复的), 并且这一猜测的得分是 1 个黑键 3 个白键. 有多少种可能的密码? (注意, 所有的 3 种颜色的猜测都是类似的, 参见练习 14.)
17. 假设你的第一次猜测至少使用了 2 种颜色, 但它的得分是没有键. 这一猜测至少能排除多少种密码?
18. 考虑有 4 个柱子的简化 Mastermind 游戏, 每个柱子一种颜色, 而密码是由这 4 个柱子的某个排列组成的. 找出这一游戏的一个完备策略, 使得你能够在最多 3 次猜测之后确定密码 (在第 4 次猜测得到 4 个黑键的得分.)
19. 考虑有 3 个位置和 3 种柱子颜色的简化 Mastermind 游戏. 为这一游戏寻找最佳的第一次猜测. 称一次猜测是最佳的, 如果对于某个数  $k$ , 这个猜测的所有可能得分最多剩下  $k$  种可能密码, 而其他任意猜测的某个可能得分至少剩下  $k$  种可能密码.
20. 考虑有 4 个位置但只用 2 种柱子颜色的简化 Mastermind 游戏. 寻找这一游戏的最佳第一次猜测 (参见练习 19).
21. 证明: 无论下面的 4 种猜测的得分是什么, 我们都可以 (使用前 4 次猜测) 在至多 2 次猜测之后正确地猜出任意的密码.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| R  | R  | W  | W  |
| R  | Bk | R  | Bk |
| Bu | Bu | G  | G  |
| Bu | Y  | Bu | Y  |

22. 编写一个构建密码并对猜测评分的计算机程序.
23. 编写一个 Mastermind 游戏的程序.

参 考 文 献

1. L. Ault, *Mastermind Official Handbook*, Signet Press, New York, 1976.

# 目 录

## 第一部分 图论

|                |     |
|----------------|-----|
| 第 1 章 图论入门     | 3   |
| 1.1 图模型        | 3   |
| 1.2 同构         | 11  |
| 1.3 边计数        | 19  |
| 1.4 可平面图       | 25  |
| 1.5 小结及参考文献    | 35  |
| 第 2 章 覆盖回路和图着色 | 40  |
| 2.1 欧拉圈        | 40  |
| 2.2 哈密顿回路      | 46  |
| 2.3 图着色        | 55  |
| 2.4 着色定理       | 62  |
| 2.5 小结及参考文献    | 69  |
| 第 3 章 树和搜索     | 75  |
| 3.1 树的性质       | 75  |
| 3.2 搜索树和生成树    | 82  |
| 3.3 旅行商问题      | 90  |
| 3.4 排序算法的树分析   | 97  |
| 3.5 小结及参考文献    | 100 |
| 第 4 章 网络算法     | 101 |
| 4.1 最短路径       | 101 |
| 4.2 最小生成树      | 104 |
| 4.3 网络流        | 107 |
| 4.4 算法上的匹配     | 122 |
| 4.5 运输问题       | 131 |
| 4.6 小结及参考文献    | 140 |

## 第二部分 枚举

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 第 5 章 排列和选择的一般计数方法 | 143 |
| 5.1 两个基本计数法则       | 143 |
| 5.2 简单排列和选取        | 150 |
| 5.3 重复排列和选取        | 162 |
| 5.4 分配             | 169 |
| 5.5 二项恒等式          | 178 |
| 5.6 小结及参考文献        | 186 |

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 第 6 章 生成函数        | 192 |
| 6.1 生成函数模型        | 192 |
| 6.2 计算生成函数的系数     | 198 |
| 6.3 分拆            | 205 |
| 6.4 指数生成函数        | 209 |
| 6.5 一个求和方法        | 213 |
| 6.6 小结及参考文献       | 216 |
| 第 7 章 递推关系        | 218 |
| 7.1 递推关系模型        | 218 |
| 7.2 分治关系          | 228 |
| 7.3 线性递推关系的解      | 232 |
| 7.4 非齐次递推关系的解     | 235 |
| 7.5 使用生成函数对递推关系求解 | 239 |
| 7.6 小结及参考文献       | 245 |
| 第 8 章 容斥原理        | 247 |
| 8.1 利用 Venn 图计数   | 247 |
| 8.2 容斥公式          | 254 |
| 8.3 限定位置和车多项式     | 264 |
| 8.4 小结及参考文献       | 273 |

## 第三部分 其他主题

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 第 9 章 Polya 枚举公式     | 277 |
| 9.1 等价和对称群           | 277 |
| 9.2 Burnside 定理      | 283 |
| 9.3 循环指标             | 289 |
| 9.4 Polya 公式         | 294 |
| 9.5 小结及参考文献          | 300 |
| 第 10 章 计算机科学在枚举中的应用  | 302 |
| 10.1 生成排列和组合, 程序设计项目 | 302 |
| 10.2 形式语言和文法         | 307 |
| 10.3 有限状态机           | 312 |
| 10.4 小结及参考文献         | 316 |
| 第 11 章 图游戏           | 317 |
| 11.1 逐步受限游戏          | 317 |
| 11.2 尼姆类游戏           | 323 |
| 11.3 小结及参考文献         | 328 |

|                         |     |                   |     |
|-------------------------|-----|-------------------|-----|
| 附录 A .....              | 330 | 关于计数和图论的术语表 ..... | 341 |
| A.1 集合论 .....           | 330 | 关于树的术语表 .....     | 343 |
| A.2 数学归纳法 .....         | 333 | 参考文献 .....        | 344 |
| A.3 概率简介 .....          | 334 | 索引 .....          | 346 |
| A.4 鸽巢原理 .....          | 337 | 部分练习解答(图灵网站下载)    |     |
| A.5 计算复杂度和 NP 完备性 ..... | 339 |                   |     |

# 第一部分 图 论

