

Variable Viscous Navier-Stokes Equations

变黏性 Navier-Stokes 方程组

◎方道元 张 挺 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

变黏性 Navier-Stokes 方程组 / 方道元, 张挺著. —杭州: 浙江大学出版社, 2008. 12
ISBN 978-7-308-06392-0

I. 变… II. ①方…②张… III. 数学物理方程—方程组—研究 IV. 0175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 177631 号

变黏性 Navier-Stokes 方程组

方道元 张挺 著

责任编辑 徐素君

封面设计 吴慧莉

出版发行 浙江大学出版社

(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(E-mail: zupress@mail. hz. zj. cn)

(网址: <http://www.zjupress.com>

<http://www.press.zju.edu.cn>)

电话: 0571-88925591, 88273066(传真)

排版 杭州中大图文设计有限公司

印刷 浙江省良渚印刷厂

开本 787mm×1092mm 1/16

印张 18

字数 440 千

版印次 2008 年 12 月第 1 版 2008 年 12 月第 1 次印刷

书号: ISBN 978-7-308-06392-0

定 价: 35.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88925591

前言

自 2002 年以来,我们对一类有深刻物理意义的黏性依赖于密度的 Navier-Stokes 方程组作了较深入的探讨,研究在适当条件下弱解的局部或整体适定性、解的破裂 (blow-up) 性质、解的渐近性态和解的收敛率估计等问题,取得了一系列较为深刻的结果。它们中的多数已经在国内外重要的学术刊物上发表。这样的变黏性系统与常黏性 Navier-Stokes 方程组的本质差异当然来自于这个变黏性系数。当处理含有真空的问题时,会造成系统的退化,从而导致诸多实质性的困难,为此我们必须引入一些新的想法、技巧和工具来克服。为了便于有兴趣的学者对这一领域的了解,结合当前同行们已取得的结果,我们将它们作了系统的处理,以专著的形式出版。

本书的第一章,介绍了研究黏性依赖于密度的 Navier-Stokes 方程组的必要性,并介绍了我们所取得的主要结果。第二、三章,分别介绍了一维自由边界问题和高维球面对称系统的局部适定性。第四章,介绍了一维自由边界问题的整体适定性。第五章,介绍了含外力项的一维自由边界问题的大时间性态,证明了解随着时间趋于无穷而收敛到稳态解,得到了解在 L^∞ 范数、(带权的) L^2 范数和带权的 H^1 范数意义下的稳定率估计。第六章,介绍了无固体核、有外压强的高维球面对称系统的大时间性态,证明了解随着时间趋于无穷而收敛到稳态解,得到了解在 L^∞ 范数、(带权的) L^2 范数和带权的 H^1 范数意义下的指数型稳定率估计。第七、八章,介绍了高维球面对称系统的大时间性态,分别对有无固体内核的情形进行讨论,证明了解随着时间趋于无穷而收敛到稳态解,得到了解在 L^∞ 范数、(带权的) L^2 范数和带权的 H^1 范数意义下的多项式型稳定率估计。第九章,分别对黏性系数非退化的系统和黏性系数退化的系统分别进行讨论,介绍了光滑解 (正则解) 会在有限时间内破裂 (blow-up) 的结论。第十章,介绍了第二黏性系数依赖于密度 ($\lambda = \lambda(\rho)$) 的二维可压缩 Navier-Stokes 系统的弱解的整体存在性,以及解的奇性发展;说明如果初值存在真空区域,则以后真空区域是始终存在的,真空区域的面积将随着时间趋于无穷而趋于零。第十一章,介绍了相关的其他一些问题。

借此机会,感谢多年来所有支持和帮助过我们的朋友们。特别是刘太平、辛周平、杨彤、朱长江等教授,是他们的工作将我们引入这一领域的。该书的大部分内容是我们所获国家自然科学基金面上项目成果的一部分,在此我们再次对基金委的支持表示由衷的感谢。也感谢浙江大学数学系应用数学重点学科对我们的支持。最后,我们得感谢我们的家人,是他们持续的支持与奉献,才使我们的研究得以顺利进行。

作者

2008 年 11 月于求是园

目 录

第一章 绪论	1
1.1 黏性系数依赖于密度的原因	1
1.2 局部适定性	3
1.3 整体适定性	4
1.4 大时间性态	4
1.5 解的破裂性	6
第二章 一维自由边界问题的局部适定性	8
2.1 引言	8
2.2 存在性的证明	12
2.3 解的唯一性以及关于初值的连续依赖性	24
第三章 球面对称系统自由边界问题的局部适定性	27
3.1 引言	27
3.2 逼近系统	31
3.3 先验估计	33
3.4 定理 3.2.1 的证明	41
3.5 解的唯一性以及关于初值的连续依赖性	45
3.6 附录	48
第四章 一维自由边界问题的整体适定性	59
4.1 引言	59
4.2 主要定理	60
4.3 先验估计	63
4.4 弱解的构造	79
4.5 解的唯一性以及关于初值的连续依赖性	82
第五章 一维自由边界问题的整体性态	85
5.1 引言	85
5.2 主要定理	86
5.3 先验估计和存在性	89
5.4 唯一性	100
5.5 渐近性态	102
5.6 稳定率估计	105

第六章 球面对称系统自由边界问题的整体性态 (一)	113
6.1 引言	113
6.2 稳态系统	119
6.3 逼近系统	126
6.4 先验估计	128
6.5 差分格式和逼近解	143
6.6 唯一性	146
6.7 渐进性态	148
6.8 稳定率估计	150
第七章 球面对称系统自由边界问题的整体性态 (二)	156
7.1 引言	156
7.2 整体适定性与整体性态结果	159
第八章 球面对称系统自由边界问题的整体性态 (三)	162
8.1 引言	162
8.2 稳态系统	169
8.3 逼近系统	173
8.4 先验估计	176
8.4.1 密度的估计	178
8.4.2 速度的估计	195
8.4.3 衰减估计	201
8.5 整体存在性	204
8.6 唯一性	205
第九章 解的破裂	208
9.1 黏性系数非退化的系统	208
9.2 黏性系数退化的系统	212
第十章 第二黏性系数依赖于密度的二维系统	215
10.1 引言	215
10.2 先验估计	223
10.3 定理 10.1.1 的证明	239
10.4 Lagrange 结构	242
10.5 奇性的发展	246
10.6 非物理解	251
10.7 正则解的破裂性	252
第十一章 相关问题与结果	254
11.1 物理真空边界条件	254
11.2 浅水波方程	256
11.3 真空消去	258

11.4	跳跃连接真空的流体	261
11.5	高维球面对称系统	263
第十二章	附录	266
12.1	Boltzmann 方程和 Chapman–Enskog 展开	266
12.2	紧致性原理和不动点原理	269
	参考文献	271

第一章 绪 论

Navier-Stokes 方程组作为描述流体运动的模型,已被物理学界广泛的接受。流体力学家、气象学家、数学家等已经对该模型进行了广泛而深入的研究,但仍然有很多问题尚待解决。有些在物理上看起来很简单的问题,并没有在数学上得到很好的解释。因此,Navier-Stokes 方程组的数学理论研究仍然是当代数学物理的一个中心问题。

我们知道 Navier-Stokes 方程是一个非线性系统,定解条件(如初始条件、边界条件)的正则性要求与解的局部、整体适定性之间存在着深层的联系,我们希望能揭示它,也希望了解系统解的长时间性态、奇性的形式和结构等。

我们知道,区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 上的黏性可压缩等熵流体运动可以由下面的 Navier-Stokes 方程组来描述:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0,$$

$$(\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p - \operatorname{div}(\mu(\nabla u + \nabla u^\top)) - \nabla(\lambda \operatorname{div} u) = \rho f.$$

这里未知函数 ρ , p 和 u 分别表示流体的密度、压强和速度,系数 μ 和 λ 分别是黏性系数和第二黏性系数,其中 p , μ 和 λ 是 ρ 的函数。(对于非等熵流体,压强 p 和黏性系数 μ , λ 是密度和温度的函数。)

最近几十年,常黏性系数的 Navier-Stokes 方程组的研究有了一些重要的进展。当初值具有某种小性且不含真空状态时,系统解的整体存在性、唯一性和长时间性态已是众所周知(见 [30, 83-85])。但大初值的问题却是十分困难的,第一个重要结论是由 Lions [77] 得到的。当绝热系数 γ 充分大时, $p = A\rho^\gamma$ (当维数 $N = 2$ 时要求 $\gamma \geq \frac{3}{2}$, 当维数 $N = 3$ 时要求 $\gamma \geq \frac{9}{5}$, 当维数 $N \geq 4$ 时要求 $\gamma > \frac{N}{2}$), Lions 利用弱收敛方法得到了弱解的整体存在性。接着,Feireisl, Novotny 和 Petzeltova [46] 把 Lions 的结果推广到 $\gamma \geq \frac{N}{2}$ ($N = 2, 3$) 的情形。江松和张平 [65, 66] 证明了球面对称弱解的整体存在性 ($\gamma > 1$)。江松和张平 [67], 孙文俊, 江松和郭真华 [108] 分别得到了轴对称和螺旋形的弱解的整体存在性。此外,假设初值仅在能量空间中是充分小的, Hoff [52, 53, 56] 得到了整体弱解的存在性,进一步,他和 Santos [56] 还研究了解的奇性的发展。另外,考虑描述由自由分界面分隔的两种流体运动的常黏性系数 Navier-Stokes 方程组, Denisova 和 Solonnikov 证明了其解的局部存在性和唯一性 ([31-34] 等)。

§1.1 黏性系数依赖于密度的原因

在研究流体运动过程中,常常会涉及真空状态而使问题变得困难和复杂。文献 [58, 79, 121] 中的结果指出了包含真空状态的常系数的 Navier-Stokes 方程组的柯西问

题是不适定的。这种不适定性体现在此系统的解关于初值没有连续依赖性 (参见 [58]); 当初始密度有紧支集的时候, 此系统不可能存在整体正则解 (参见 [121])。基于物理上的考虑, 刘太平、辛周平和杨彤 [79] 研究了黏性依赖于密度的 Navier-Stokes 方程组的柯西问题, 并证明了其局部适定性。实际上, 只有当温度和密度在适当范围内变化时, 真实流体才可以用理想流体 (黏性系数 μ 和 λ 是常数) 来很好地近似描述。在温度和密度变化很大的情况下, 真实流体的黏性系数将会随温度和密度发生较大的变化 (详见参考文献 [6, 126])。另一方面, 我们知道由 Boltzmann 方程通过 Chapman-Enskog 二阶展开可以导出 Navier-Stokes 方程组 (参见 [16, 48, 79] 和第十二章), 在推导过程中我们会发现黏性系数是依赖于温度的。例如, 对于硬球碰撞模型, 黏性系数应该正比例于温度的平方根。如果我们考虑的是等熵流体的运动, 由热力学第二定律, 可以推得黏性系数是依赖于密度的。所以, 当研究初始密度含有真空的问题时, 我们需要考虑到密度或温度对黏性系数的影响。另外, 在地球物理学中, 研究流体运动时所用的很多数学模型是与黏性依赖于密度的 Navier-Stokes 方程组类似的 ([8, 12, 77]), 如研究浅水波的 Saint-Venant 系统。在 [109] 中, Sundbye 研究了浅水波方程 Dirichlet 边界问题的局部光滑解和平衡态附近初值的整体光滑解的存在性。对于浅水波方程或黏性依赖于密度的高维 Navier-Stokes 方程组的大初值弱解的整体存在性等问题, 最近有一些成果如 [10, 11, 88], 但还有许多问题仍未解决。

对于这一类物理模型, 从数学上看是有很多困难的。首先, 即使初值不含真空, 随着时间的发展, 也有可能产生真空 (Hoff [51] 说明常黏性系数 Navier-Stokes 方程组的球面对称解可能会在原点附近产生真空)。其次, 由于黏性系数在真空处是退化的, 速度在真空处就很难被定义, 也就没有一致性的估计。最后, 变黏性系数的系统相对常黏性系数的系统, 增大了非线性程度, 更难求解。

数学家往往是通过研究黏性依赖于密度的 Navier-Stokes 方程组的自由边界问题, 来研究含有真空状态的流体运动。本书将主要研究等熵流体运动的自由边界问题:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0,$$

$$(\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p - \operatorname{div}(\mu(\nabla u + \nabla u^\top)) - \nabla(\lambda \operatorname{div} u) = \rho f.$$

其中 $x \in \Omega_t$, $t > 0$, 初值条件

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0), \quad x \in \Omega_0,$$

边界条件是

$$\{(p - \lambda \operatorname{div} u) Id - \mu(\nabla u + \nabla u^\top)\} \cdot n = p_r n, \quad x \in \partial\Omega_t,$$

其中 $\partial\Omega_t = \psi(\partial\Omega_0, t)$ 是自由边界, n 是 $\partial\Omega_t$ 的单位外法线方向, p_r 是外压强 (后面, 除第六章外都是考虑 p_r 取零的情形), $\partial\Omega_0$ 表示自由边界的初始位置, ψ 满足

$$\begin{cases} \partial_t \psi(x, t) = u(\psi(x, t), t) \\ \psi(x, 0) = x. \end{cases}$$

§1.2 局部适定性

在第二章中, 我们考虑了如下的一维可压缩 Navier-Stokes 方程组的自由边界问题,

$$\begin{cases} \rho_\tau + (\rho u)_\xi = 0, & \tau > 0, \\ (\rho u)_\tau + (\rho u^2 + p(\rho))_\xi = (\mu(\rho)u_\xi)_\xi, & a(\tau) < \xi < b(\tau), \end{cases} \quad (1.2.1)$$

其中初值是

$$(\rho, \rho u)(\xi, 0) = (\rho_0, m_0)(\xi), \quad \xi \in [a, b], \quad (1.2.2)$$

边界条件是

$$\rho(a(\tau), \tau) = \rho(b(\tau), \tau) = 0, \quad \tau \geq 0. \quad (1.2.3)$$

这里, $a(\tau)$ 和 $b(\tau)$ 表示自由边界, 即气体和真空分界面, 满足

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} a(\tau) = u(a(\tau), \tau), & a(0) = a, \\ \frac{d}{d\tau} b(\tau) = u(b(\tau), \tau), & b(0) = b. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

假设 $p(\rho) = A\rho^\gamma$ 和 $\mu(\rho) = c\rho^\theta$, 其中 $0 < \theta < \gamma, \gamma > 1$, 且 $A > 0$ 和 $c > 0$ 是常数。基于一些先验估计, 补偿紧方法和能量方法, 我们将证明这一维自由边界问题在 Lagrange 坐标下是局部适定的。

在第三章中, 我们是在 $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 空间中研究可压缩 Navier-Stokes 方程组的球面对称解。在欧氏坐标下, 此方程组可写成:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div}(\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top)) + \nabla(\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f}, \end{cases}$$

其初值条件是

$$(\rho, \mathbf{u})|_{t=0} = (\rho_0, \mathbf{u}_0)(\mathbf{x}) = (\rho_0(r), u_0(r) \frac{\mathbf{x}}{r}), \quad 0 < a \leq r \leq b,$$

其中 $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, $b > a > 0$ 是两个常数, 其边界条件是

$$\mathbf{u}|_{r=a} = 0,$$

$$\rho|_{\mathbf{x} \in \partial \Omega_t} = 0.$$

其中 $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)$ 和 $\mathbf{f} = (f_1, \cdots, f_n)$ 分别表示气体的速度和一般质量力; $\lambda = \lambda(\rho)$ 和 $\mu = \mu(\rho)$ 是黏性系数且满足 $\lambda(0) = \mu(0) = 0$ 的性质。 $\partial \Omega_t = \psi(\partial \Omega_0, t)$ 表示自由边界。这里, $\partial \Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| = b\}$ 是自由边界的初始点集, ψ 是满足下面方程的流函数:

$$\begin{cases} \partial_t \psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\psi(\mathbf{x}, t), t), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \psi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}. \end{cases}$$

对于外力满足球面对称条件 $f(\mathbf{x}, t) = f(m, r, t) \frac{\mathbf{x}}{r}$ 的初边值问题 (1.2)–(1.2.5), (其中 $m(r, t) = \int_{a \leq |\mathbf{x}| \leq r} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$), 我们将要寻求其球面对称解 (ρ, u) :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(r, t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u(r, t) \frac{\mathbf{x}}{r}.$$

我们将证明此自由边界问题在 Lagrange 坐标下是局部适定的。

§1.3 整体适定性

在第四章中, 当初值满足一定的条件, 如 $C^{-1}(x(1-x))^\alpha \leq \rho_0(x) \leq C(x(1-x))^\alpha$, 利用逐点估计的技巧和能量方法, 我们将证明一维自由边界问题 (1.2.1)–(1.2.4) 在 Lagrange 坐标下 (1.3.1) 是整体适定的 ($\theta \in (0, \frac{1}{2})$), 密度满足 $C(T)^{-1}\rho_0(x) \leq \rho(x, t) \leq C\rho_0(x)$, 并且密度函数会随着时间趋于无穷而趋于零,

$$\begin{cases} \rho_t + \rho^2 u_x = 0, & t > 0, \\ u_t + (\rho^\gamma)_x = (\rho \mu u_x)_x, & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

因为, 高维系统在 Lagrange 坐标下是如下方程组,

$$\begin{cases} \partial_t \rho = -\rho^2 \partial_x (r^{n-1} u), \\ \partial_t u = r^{n-1} \partial_x (\rho(\lambda + 2\mu) \partial_x (r^{n-1} u) - p) - 2(n-1)r^{n-2} u \partial_x \mu, \\ r^n(x, t) = a^n + n \int_0^x \rho^{-1}(y, t) dy, \end{cases} \quad (1.3.2)$$

相对于一维系统 (1.3.1) 多了一个非线性项 $-2(n-1)r^{n-2}u\partial_x\mu$, 所以相应的自由边界问题很难求解。据作者所知, 其黏性退化的自由边界问题还没有得到适定性结论。

§1.4 大时间性态

在第五章中, 我们研究有外力作用的一维可压缩 Navier-Stokes 方程组的自由边界问题, 其方程组在欧氏坐标下写成如下形式:

$$\begin{cases} \rho_\tau + (\rho u)_\xi = 0, \\ (\rho u)_\tau + (\rho u^2 + p(\rho))_\xi = (\mu(\rho) u_\xi)_\xi - \rho f, \end{cases}$$

区域 $O := \{(\xi, \tau); 0 < \xi < l(\tau), \tau > 0\}$, 边界 l 满足

$$l'(\tau) = u|_{\xi=l(\tau)}, \quad \tau > 0,$$

初值条件是

$$(\rho, u)|_{\tau=0} = (\rho_0, u_0)(\xi), \quad \xi \in (0, l_0), l|_{\tau=0} = l_0;$$

边界条件是

$$u|_{\xi=0} = 0, \rho|_{\xi=l(\tau)} = 0, \quad \tau > 0.$$

这里 f 表示给定的外力, $\mu = \mu(\rho)$ 是黏性系数. 这个系统可以看成是半径 $R \gg 1$ 的行星表面的大气运动的简化模型, 其气体运动受到重力的影响. 当外力和初值满足适当的假设条件时, 我们将得到弱解的整体适定性, 给出解关于时间的一致有界性, 并证明解随着时间趋于无穷而收敛到稳态解. 此外, 我们还将得到了解在 L^∞ 范数、(带权的) L^2 范数和带权的 H^1 范数意义下的稳定率 (stabilization rate) 估计.

在第六章中, 我们将研究无固体核、具有外压强的 n 维可压缩球面对称 Navier-Stokes 方程组的自由边界问题, 在欧氏坐标下可写成:

$$\begin{cases} \partial_\tau \rho + \partial_r(\rho u) + \frac{n-1}{r} \rho u &= 0, \\ \rho(\partial_\tau u + u \partial_r u) + \partial_r p &= (\lambda + 2\mu)(\partial_{rr}^2 u + \frac{n-1}{r} \partial_r u - \frac{n-1}{r^2} u) \\ &\quad + 2\partial_r \mu \partial_r u + \partial_r \lambda (\partial_r u + \frac{n-1}{r} u) - \rho f, \end{cases}$$

其中 $(r, \tau) \in (0, b(\tau)) \times (0, \infty)$, 初值条件是

$$(\rho, u)|_{\tau=0} = (\rho_0, u_0)(r), \quad 0 \leq r \leq b,$$

固定边界条件是

$$u|_{r=0} = 0,$$

自由边界条件是

$$\left\{ p - 2\mu \partial_r u - \lambda \left(\partial_r u + \frac{n-1}{r} u \right) \right\} \Big|_{r=b(\tau)} = p_\Gamma,$$

其中 $b(0) = b$, $b'(\tau) = u(b(\tau), \tau)$. 当初值满足一定条件时, 利用外压强的作用, 我们可以得到此系统弱解的整体适定性, 并且给出解关于时间的一致性有界性估计, 说明解是随着时间趋于无穷而收敛到稳态解的. 进一步通过构造一些 Lyapunov 泛函, 我们得到解 L^∞ 范数和带权的 H^1 范数的指数型稳定率估计, 说明这个系统在小扰动下是稳定的.

在第七章中, 我们将研究有固体核且密度退化的 n 维可压缩球面对称 Navier-Stokes 方程组的自由边界问题, 在欧氏坐标下可写成:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_r(\rho u) + \frac{n-1}{r} \rho u &= 0, \\ \rho(\partial_t u + u \partial_r u) + \partial_r p &= \partial_r [(\lambda + 2\mu)(\partial_r u + \frac{n-1}{r} u)] - 2(n-1) \partial_r \mu \frac{u}{r} - \rho f, \end{cases}$$

其中 $(r, \tau) \in (a, b(\tau)) \times (0, \infty)$, 初值条件是

$$(\rho, u)|_{\tau=0} = (\rho_0, u_0)(r), \quad a \leq r \leq b,$$

边界条件是

$$u|_{r=a} = 0, \quad \rho|_{r=b(\tau)} = 0,$$

其中 $b(0) = b$, $b'(\tau) = u(b(\tau), \tau)$, $\tau > 0$. 基于对初值的一些假设条件, 可以得到此系统弱解的整体适定性. 进一步地还得到了解在 L^∞ 和带权的 H^1 范数意义下的稳定率估计, 说明此系统在小扰动下是稳定的.

在第八章中, 我们将研究无固体核且密度退化的 n 维可压缩球面对称 Navier-Stokes-Poisson 方程组的自由边界问题, 在欧氏坐标下可写成:

$$\begin{cases} \partial_\tau \rho + \partial_r(\rho u) + \frac{n-1}{r} \rho u = 0, \\ \rho(\partial_\tau u + u \partial_r u) + \partial_r p = \partial_r [(\lambda + 2\mu)(\partial_r u + \frac{n-1}{r} u)] \\ \quad - 2(n-1) \frac{u}{r} \partial_r \mu - \rho f_\infty - \rho \Delta f, \\ f_\infty(m, r) = G_{\frac{m}{r^{n-1}}}, \quad m(r, \tau) = \int_0^r \rho(s, \tau) s^{n-1} ds, \end{cases}$$

其中 $(r, \tau) \in (0, b(\tau)) \times (0, \infty)$, 初值是

$$(\rho, u)|_{\tau=0} = (\rho_0, u_0)(r), \quad 0 \leq r \leq b,$$

边界条件是

$$u|_{r=0} = 0, \quad \rho|_{r=b(\tau)} = 0,$$

其中自由边界 $b(\tau)$ 满足 $b(0) = b$ 和 $b'(\tau) = u(b(\tau), \tau)$, $\tau > 0$. 基于对初值的一些假设条件, 将得到此系统弱解的整体适定性, 以及解关于时间的一致有界性. 进一步, 还得到了解的稳定率估计, 说明此系统在小扰动下是稳定的. 第八章的结论说明解的稳定率在原点附近和自由边界附近是不同的. 例如,

$$\|\rho^{\frac{\gamma+\theta}{2}} - \rho_\infty^{\frac{\gamma+\theta}{2}}\|_{L^\infty([\frac{M}{2}, M])}^2 \leq C_\eta (1+t)^{-\frac{\gamma+\theta}{\gamma+\theta+1} + \frac{\eta}{2}},$$

$$\|\rho - \rho_\infty\|_{L^\infty([0, \frac{M}{2}])} \leq C_\eta (1+t)^{-\frac{2(b-1)(\gamma+\theta)}{(3b-2)(\gamma+\theta+1)} + \frac{\eta}{2}}.$$

其原因是 (8.1.22) 式中的 $|u| \leq Cr$, 即原点附近的流体速度很小, 所以其状态的改变就很缓慢.

§1.5 解的破裂性

在第九章中, 我们将分别对黏性系数非退化的系统和黏性系数退化的系统分别进行讨论, 说明光滑解 (正则解) 会在有限时间内破裂 (blow-up).

在第 9.1 节中, 我们研究如下的在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ ($n \geq 1$) 上可压缩流体的方程组:

$$\begin{aligned} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) &= 0, \\ (\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p &= \operatorname{div}(\mu(\nabla u + \nabla u^\top)) + \nabla(\lambda \operatorname{div} u) \\ (\rho e)_t + \operatorname{div}(\rho e u) + p \operatorname{div} u &= \frac{\mu}{2} |\nabla u + \nabla u^\top|^2 + \lambda (\operatorname{div} u)^2 + \operatorname{div}(\kappa \nabla \theta), \\ p &= R \rho \theta, \quad e = c_v \theta, \quad \text{和} \quad p = A \exp(S/c_v) \rho^\gamma, \end{aligned}$$

这里的未知函数 ρ, e, θ, p 和 u 分别表示流体的密度、内能、绝对温度、压强和速度。已知的函数 $\mu = \mu(\rho, \theta)$, $\lambda = \lambda(\rho, \theta)$ 和 $\kappa = \kappa(\rho, \theta)$ 分别表示黏性系数、第二黏性系数和热传导系数。要求系数对于任意的 $s_1, s_2 \geq 0$ 满足,

$$\mu(0, 0) > 0, \quad n\lambda(0, 0) + 2\mu(0, 0) = \lambda_0 > 0, \quad \kappa(s_1, s_2) \geq 0 \quad \text{和} \quad \gamma > 1.$$

将证明此系统的光滑解会在有限时间内破裂 (blow-up)。

在第 9.2 节中, 我们将介绍杨彤和朱长江在 [125] 中的一个结果, 说明黏性系数退化的下述一维系统 (1.5.1) 的正则解会在有限时间内破裂 (blow-up)。

$$\begin{cases} \rho_\tau + (\rho u)_\xi = 0, \\ (\rho u)_\tau + (\rho u^2 + p(\rho))_\xi = (\mu u_\xi)_\xi \end{cases} \quad (1.5.1)$$

初值条件是

$$\rho(\xi, 0) = \rho_0(\xi), \quad u(\xi, 0) = u_0(\xi), \quad a \leq \xi \leq b.$$

在第十章中, 我们将证明第二黏性系数依赖于密度 ($\lambda = \lambda(\rho)$) 的二维可压缩 Navier-Stokes 系统的弱解的整体存在性。仅要求初值和解在能量范数意义下是充分小的, 密度是非负且其 L^∞ 范数是任意大的。

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ (\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \mu \Delta u + \nabla((\mu + \lambda(\rho)) \operatorname{div} u) + \rho f, \end{cases} \quad (1.5.2)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^2$ 和 $t > 0$, 边界条件和初值条件是

$$u(x, t) \rightarrow 0, \quad \rho(x, t) \rightarrow \bar{\rho} > 0, \quad \text{当 } |x| \rightarrow \infty, \quad t > 0, \quad (1.5.3)$$

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0). \quad (1.5.4)$$

接着, 我们研究了解的奇性发展。证明从 $\mathbb{R}^2$ 中的任意一点出发, 存在唯一一条速度场的积分曲线。并且, 这条积分曲线系统定义了任意开区间到任意正时刻其像的局部双 Hölder 同胚映射。进一步的结果说明: 如果初值存在真空区域, 则以后真空区域是始终存在的, 真空区域的面积将随着时间趋于无穷而趋于零。其后, 还说明如果初始密度在连续超曲面上某点处在一个特定方向有极限, 则在以后任意时刻, 密度和速度的散度也有相应的极限。如果两边的极限都存在, 则 Rankine-Hugoniot 条件是在严格的点点意义下成立。还考虑了含真空的球面对称系统, 说明了所得解是一个非物理解。

最后, 在第十一章中, 我们将介绍一些相关问题的结果, 如刘太平和杨彤在文献 [78] 中提及的物理真空边界条件, 浅水波方程 (Saint-Venant 系统) 的一些进展 (参考 [8, 9, 11, 88]), 李海梁、李竞和辛周平 [72] 研究的一维固定边界系统的真空消失现象。基于 Bresch 和 Desjardins 的熵不等式, 我们在 [131] 中考虑了全空间上不含固体核的情形, 证明了球面对称弱解的整体存在性。相关的有界区域情形, 是郭真华、酒全森和辛周平在 [49] 中得到的。

第二章 一维自由边界问题的局部适定性

本章, 我们将研究一维黏性气体运动过程中气体和真空分界面的发展。我们假设黏性系数是密度的幂函数, 那么密度和黏性系数在自由边界上将会退化。基于一些先验估计、补偿紧方法和能量方法, 我们证明该一维自由边界问题是局部适定的。

§2.1 引言

我们考虑黏性依赖于密度的一维可压缩 Navier-Stokes 方程组的自由边界问题, 方程在欧氏坐标下可写成:

$$\begin{cases} \rho_\tau + (\rho u)_\xi = 0, & \tau > 0, \\ (\rho u)_\tau + (\rho u^2 + p(\rho))_\xi = (\mu(\rho)u_\xi)_\xi, & a(\tau) < \xi < b(\tau), \end{cases} \quad (2.1.1)$$

相应的初值是

$$(\rho, \rho u)(\xi, 0) = (\rho_0, m_0)(\xi), \quad \xi \in [a, b], \quad (2.1.2)$$

边界条件是

$$\begin{cases} (-p(\rho) + \mu(\rho)u_\xi)(a(\tau), \tau) = 0, \\ (-p(\rho) + \mu(\rho)u_\xi)(b(\tau), \tau) = 0. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

这里的 ρ , u 和 $p(\rho)$ 分别表示气体的密度, 速度和压强。 $\mu(\rho) \geq 0$ 是黏性系数; $a(\tau)$ 和 $b(\tau)$ 表示自由边界, 即气体和真空分界面, 满足

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}a(\tau) = u(a(\tau), \tau), \quad a(0) = a, \\ \frac{d}{d\tau}b(\tau) = u(b(\tau), \tau), \quad b(0) = b. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

对于 ρ_0 是有紧支集且连续连接真空的这类情形, 边界条件 (2.1.3) 要换成

$$\rho(a(\tau), \tau) = \rho(b(\tau), \tau) = 0, \quad \tau \geq 0. \quad (2.1.5)$$

为简便起见, 我们在本章中仅考虑多方流气体, 假设 $p(\rho) = A\rho^\gamma$ 和 $\mu(\rho) = c\rho^\theta$, 其中

$$0 < \theta < \gamma, \gamma > 1, \quad (2.1.6)$$

且 $A > 0$ 和 $c > 0$ 是常数 (不妨取 $A = c = 1$)。

因为自由边界 $x = a(\tau)$ 和 $x = b(\tau)$ 在欧氏坐标下是未知的, 所以需要通过 Lagrange 坐标变换把自由边界变成固定边界. 通过如下的 Lagrange 坐标变换

$$x = \int_{a(\tau)}^{\xi} \rho(y, \tau) dy, \quad t = \tau,$$

自由边界 $x = a(\tau)$ 和 $x = b(\tau)$ 将变成

$$\tilde{a}(t) = 0, \quad \tilde{b}(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \rho(y, t) dy = \int_a^b \rho_0(y) dy,$$

其中 $\int_a^b \rho_0(y) dy$ 是初始总质量 (不失一般性, 取成 1).

基于 Lagrange 坐标变换, 原方程组 (2.1.1) 就变为

$$\begin{cases} \rho_t + \rho^2 u_x = 0, & t > 0, \\ u_t + (\rho^\gamma)_x = (\rho^{1+\theta} u_x)_x, & 0 < x < 1, \end{cases} \quad (2.1.7)$$

同时, 初值和边界条件变成

$$(\rho, u)(x, 0) = (\rho_0, u_0)(x), \quad x \in [0, 1] \quad (2.1.8)$$

$$\rho(0, t) = \rho(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.1.9)$$

如果问题 (2.1.7)–(2.1.9) 有解, 并且解满足

$$\int_0^1 \rho^{-1}(x, t) dx < \infty \quad \text{和} \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} < \infty,$$

则通过坐标变化

$$\xi = a + \int_0^t u(0, s) ds + \int_0^x \rho^{-1}(y, t) dy, \quad \tau = t,$$

可以得到原问题 (2.1.1)–(2.1.2) 和 (2.1.5) 的一个解.

这样一类黏性依赖于密度的 Navier–Stokes 方程组的自由边界问题是一个非常重要的研究课题. 有很多工作, 如在文献 [64, 79, 96, 97, 123] 等中, 作者们考虑了流体和真空是跳跃连接并且流体密度有紧支集的情形. 其中, 刘太平, 辛周平和杨彤 [79] 得到了局部弱解的存在性和唯一性. 考虑 $0 < \theta < 1/3$ 的情形, M. Okada, Š. Matušů-Nečasová 和 T. Makino [96] 得到了整体弱解的存在性和唯一性. 后来, 这个结果分别在 [123]、[64] 和 [97] 中推广到 $0 < \theta < 1/2$, $0 < \theta < 1$ 和 $0 < \theta \leq 1$ 的情形. 我们 [44] 还考虑了初始密度不连续的系统, 得到了 $0 < \theta < 1$ 时整体弱解的存在性和唯一性.

考虑黏性流体与真空是连续连接的情形, 即密度和黏性系数在自由边界上是退化的情形, 在一定的初始条件下, 杨彤和赵会江 [124] 得到了 $\frac{1}{2} < \theta \leq \gamma - \frac{1}{3}$ 时候的弱解的局部存在性; 杨彤和朱长江 [125] 得到了 $\theta \in (0, \frac{2}{9}) \cup (\frac{1}{3}, \frac{3}{7})$ 时候的整体弱解的存在性. 后来, S. W. Vong, 杨彤和朱长江 [119] 得到了 $\theta \in (0, \frac{1}{3})$ 时候的整体弱解的

存在性, 以及 $0 < \theta < 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时候的整体弱解的唯一性。从物理学的观点来看, 基于一定的条件, 在单原子气体硬球碰撞模型中要求 $\gamma = \frac{5}{3}$, 那么黏性系数 μ 应正比例于 $\rho^{\frac{1}{3}}$ 。在 [119] 的假设条件下, 只能得到 $\theta \in (0, \frac{1}{3})$ 的结果, 没有包括 $\theta = 1/3$ 这个有重要物理意义的情形。我们在 [41, 42] 中, 对初值找到了一些合理的假设条件, 把上述存在性和唯一性结论推广到 $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ 的情形 (我们将在第四章中介绍这个结果)。后来, 我们 [45] 还得到了 $0 < \theta < 1$ 情形的更弱意义下 (速度没有有界性的) 弱解的整体存在性。

不论是对于非平衡热力学的物理理论研究, 还是对于无黏性可压缩流体的数学研究来说, 不连续解都是一个基本且重要的研究课题。然而在上述已有的结果中, 都要求初始密度 ρ_0 在 $\xi \in (a, b)$ 中有某种可导性。因此, 我们需要对此系统的不连续解进行一定深度的研究。

本章中, 我们仅仅假设 ρ_0 是有界函数, 且在自由边界上为零。特别地, 允许密度是分段光滑的。怎样克服密度和黏性系数的退化, 以及密度的低正则性所引起的困难, 就是本章的主要任务。最为重要的想法, 就是用幂函数 $(x(1-x))^\alpha$ 控制密度的下界, 见图 2.1。其中参数 α 是和初值有关的, 选取适当的 α 就可以保证 θ 的可允许集合是 $0 < \theta < \gamma$ 。

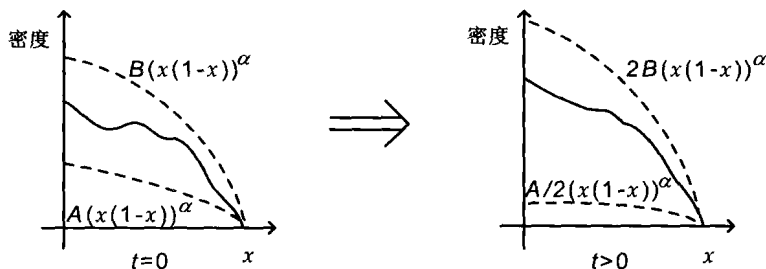


图 2.1

本章中, 对初值的假设条件如下:

(2.A1) 存在常数 $0 < \alpha < \min\{\frac{1}{2\theta}, \frac{1}{1+\theta}\}$ 和 $B > A > 0$, 使得

$$A(x(1-x))^\alpha \leq \rho_0(x) \leq B(x(1-x))^\alpha, \quad x \in [0, 1]. \quad (2.1.10)$$

(2.A2) $u_0(x) \in L^2([0, 1])$, $\rho_0^{1+\theta}(u_0)_x^2 \in L^1([0, 1])$ 。

我们用 $\langle f \rangle_X^{a,b}$ 表示通常的 Hölder 范数

$$\langle f \rangle_X^{a,b} = \sup \left\{ \frac{|f(x,t) - f(y,s)|}{|x-y|^a + |t-s|^b}, (x,t), (y,s) \in X, (x,t) \neq (y,s) \right\}.$$

本章的主要结果可以叙述为

定理 2.1.1 (存在、唯一性) 基于条件 (2.1.6) 和 (2.A1)-(2.A2), 则存在 $T_1 > 0$ 使得系统 (2.1.7)-(2.1.9) 存在唯一一个弱解 (ρ, u) , 满足

$$\frac{A}{2}(x(1-x))^\alpha \leq \rho(x, t) \leq 2B(x(1-x))^\alpha, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, T_1], \quad (2.1.11)$$

$$\rho, u \in C^{\frac{1}{2}}([0, T_1]; L^2([0, 1])) \cap L^\infty([0, 1] \times [0, T_1]), \quad (2.1.12)$$

$$(x(1-x))^{-\alpha} \rho(x, t) \in C([0, T_1]; L^\infty([0, 1])), \quad (2.1.13)$$

$$\|u\|_{L^\infty([0, T_1]; L^2[0, 1])} + \|u_x\|_{L^\infty([0, T_1]; L^\beta[0, 1])} + \|u_t\|_{L^2([0, 1] \times [0, T_1])} \leq C(T_1), \quad (2.1.14)$$

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in (0, T_1]} \left\{ t \int_0^1 [u_x^2 + u_t^2] dx + \int_0^1 \rho^{1+\theta} u_x^2 dx \right\} + \int_0^{T_1} \|\rho u_x(\cdot, t)\|_{L^\infty}^2 dt \\ & + \int_0^{T_1} \int_0^1 t \rho^{1+\theta} u_{xt}^2 dx dt + \int_0^{T_1} \int_0^1 t |u_{xt}|^\beta dx dt \leq C(T_1), \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

$$\|u\|_{L^\infty([0, 1] \times [0, T_1])} + \tau^{\frac{1}{\beta}} < u >_{[0, 1] \times [\tau, T_1]}^{\frac{1}{2}, \frac{\beta-1}{\beta}} \leq C(T_1), \quad \forall 0 < \tau < T_1, \quad (2.1.16)$$

$$\sup_{t \in (0, T_1]} t^{\frac{1}{2}} \|(\rho^{1+\theta} u_x - \rho^\gamma)(\cdot, t)\|_{H^1} \leq C(T_1), \quad (2.1.17)$$

其中 $1 < \beta < \frac{2}{1+\alpha+\alpha\theta}$, 常数 $C(T_1) = C(T_1, A, \alpha, \|\rho_0\|_{L^\infty}, \|u_0\|_{L^2}, \|\rho_0^{1+\theta}(u_0)_x\|_{L^1})$, 而且对于任意的试验函数 $\phi(x, t) \in C_0^\infty([0, 1] \times [0, T_1])$, 下面的等式成立:

$$\rho_t + \rho^2 u_x = 0, \rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad a.e. \ x \in (0, 1), \quad \forall 0 < t \leq T_1, \quad (2.1.18)$$

$$\int_0^{T_1} \int_0^1 \{u\phi_t + (\rho^\gamma - \rho^{1+\theta} u_x)\phi_x\} dx dt + \int_0^1 u_0(x)\phi(x, 0) dx = 0. \quad (2.1.19)$$

定理 2.1.2 (关于初值的连续依赖性) 基于定理 2.1.1 的假设条件, 若 (ρ_1, u_1) 和 (ρ_2, u_2) 分别是系统 (2.1.7)-(2.1.9) 以 (ρ_{10}, u_{10}) 和 (ρ_{20}, u_{20}) 为初值的在 $[0, 1] \times [0, T_1]$ 上的弱解, 且满足定理 2.1.1 中的正则性估计, 则对任意的 $t \in [0, T_1]$ 都有

$$\int_0^1 \rho_1^{-1+\theta} \rho_2^{-2} \varrho^2 dx + \int_0^1 v^2 dx \leq C \left(\int_0^1 \rho_{10}^{-1+\theta} \rho_{20}^{-2} \varrho_0^2 dx + \int_0^1 v_0^2 dx \right),$$

其中 $\varrho = \rho_1 - \rho_2$, $\varrho_0 = \rho_{10} - \rho_{20}$, $v = u_1 - u_2$ 和 $v_0 = u_{10} - u_{20}$.

注 2.1.1 正如 [96] 所指出的, 对于硬球碰撞模型, θ 和 γ 之间的关系是 $\theta = \frac{\gamma-1}{2}$. 这里的条件 (2.1.6) 正好包含这个情形.

注 2.1.2 定理 2.1.1 说明: 不管初始密度的振荡幅度有多大, 气体内部在小时间段内没有真空或集中状态产生, 自由边界是以有限速度发展的. 对于常黏性系数系统的研究, 详见 Hoff 的 [54, 55] 等等.