文登考研指定用书

全国硕士研究生入学统一考试

2006版

数学复习指南

理工类

主编

陈文灯

黄先开

曹显兵

基础＋题型＝成功的保证

紧扣考试大纲，汇集了考研教学的所有题型，讲解到位，侧重训练学生的解题思路和发散性思维，实用性极强。

FOCUS 聚焦图书

有此防伪标识皆为正版

世界图书出版公司

文登考研指定

全国硕士研究生入学统一考试

2006版

数学复习指南

理工类

主编
陈文灯
黄先开
曹显兵

FOCUS 聚典图书

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 理工类 / 陈文灯等编著. —11版. — 北京:世界图书出版公司北京公司,2004. 1

ISBN 7-5062-5211-2

Ⅰ. 数... Ⅱ. 陈... Ⅲ. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 解题 Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第014886号

数学复习指南(理工类)

(2006版)

主　　编: 陈文灯　黄先开　曹显兵

副 主 编: 施明存　殷先军

责任编辑: 武海燕

封面设计: 滕晓娜

出　　版: 世界图书出版公司北京公司

发　　行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街137号　电话62198079　邮编100081)

销　　售: 各地新华书店

印　　刷: 廊坊人民印刷厂

开　　本: 787 × 1092毫米　1/16

印　　张: 39

字　　数: 890千字

版　　次: 2005年2月第11版　2005年5月第3次印刷

ISBN 7-5062-5211-2/O · 332　　**定价:49.80元**

服务热线: 010 - 62198078

前　言

“得数学者得天下”。这句话在广大读者中广为流传。怎么才能考好数学，这是广大读者的迫切愿望。要实现这个愿望，首先要了解考研数学究竟考什么。从87年统考以来18年的试卷及历年考试大纲可以看出，主要是考四个方面：

一、基础。主要是从填空题和单选题两种题型来考核，通过考计算题和证明题也可看出一个读者的基础是否扎实。

二、简单知识点的综合能力。这是和过去很不同的一点。

三、分析问题和解决问题的能力，即解应用题的能力。

四、解题的速度。

针对这四个方面，根据广大读者提出的意见和我们的教学经验，我们对书中有关内容进行了修改，使它与考试更加协调，更加吻合。

本书的特点：

一、对基本概念、基本理论进行剖析，配合精选的例题使学生能够深入理解牢固掌握，考试时避免犯要领性的错误。

二、本书采用“举题型讲方法”代替普遍采用的讲方法举题型的作法，使读者做题时有的放矢、思路畅达。

三、本书介绍了许多新的、快捷的解题方法和技巧，有些技巧是全国各高校从事几十年教学工作的老师给我们提供的，在此表示衷心感谢。

四、普遍采用表格法使广大读者对有些知识点能够一目了然。

五、从大处着手，不做小枝节的分析，使广大读者能够站在比较高的角度掌握题型的解法，而不是引导学生去作无谓的细小问题的分析。

六、本书介绍了两个超纲的内容，一个是广义积分的收敛，另一个是二重积分的换元法，同学们掌握了这两项内容，在做某些题时可以获得思路上的启发。

本书的这六个特点，还不太完善，但是是我们追求的目的和愿望。愿广大读者对本书给予批评和指正。

陈文灯

编辑提示：本书习题详细解答请见 www. kaoshi. tv

目　录

第二篇　线性代数

带“ * ”号内容数二考生不作要求

考研数学复习策略

一、考研数学对考生知识和能力的要求

数学考试要求考生比较系统地理解数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法,要求考生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。

二、考研数学试题的特点

数学考试根据工学、经济学、管理学各学科和专业对硕士研究生入学所应具备的数学知识和能力的不同要求,将数学统考试卷分为数学一、数学二、数学三和数学四。考生具体考哪个卷种,须向所报考院校咨询或查看该校的招生简章。

在题型比例上,填空题和选择题约占40%,其中填空题6道,每道4分,单项选择题8道,每道4分;解答题(包括证明题)约占60%,共9道题。

本书为理工类,涵盖数学一和数学二的内容。数学一卷中,高等数学约占60%,线性代数约占20%,概率论与数理统计约占20%;数学二卷中,高等数学约占80%,线性代数约占20%。

试卷满分为150分,考试时间为180分钟,基本上考试时间在考试开始后的第二天的上午。

三、考研数学复习策略

1. 书该怎么读

由于数学考试重点考查考生的基本概念、基本理论、基本方法的掌握,所以考生应重视基础知识的掌握。考生应全面复习考纲要求的基础知识,通过一定量的习题巩固对基本概念及相关定理的理解,特别对定理的条件要熟练掌握,否则容易用错。

2. 题该怎么做

数学中的习题相当多,考生应有针对性地进行练习。大家知道,题目是无限的,但题型是有限的。通过对典型题型的练习,掌握相应的解题方法,能迅速提高你的解题能力,节省考场上的宝贵时间。另外,大家应准确审题,一定要认真仔细。

3. 怎样逐渐提高自己的能力

经常进行自我总结,错题总结能逐渐提高解题能力。我们可以在学完每一章后,自己通过画图的形式回忆这章有哪些知识点,有哪些定理,它们之间有些什么联系,如何应用等;对做错的题分析一下原因:概念不清楚、定理用错了还是计算粗心?数学思维方法是数学的精髓,只有对此进行归纳、领会、应用,才能把数学知识与技能转化为分析问题、解决问题的能力,使解题能力“更上一层楼”。

4. 复习进度安排建议

复习进度因人而异,这只是给同学们的一个建议,供大家参考:

3月—7月	复习大纲规定的基本知识
7月—9月	第一阶段的全面复习
10月—11月	第二阶段的强化练习
12月—第二年1月	冲刺复习,隔两天做一套模拟题并及时查缺补漏

篇前篇　高数解题的四种思维定式

先赠送给大家四句话，相信在考研中能起到关键作用，请考生务必牢记.

第一句话：在题设条件中若函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导，"不管三七二十一"，把 $f(x)$ 在指定点展成泰勒公式再说.

【例 1】设 C 为实数，函数 $f(x)$ 满足下列两个等式：

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = C,\quad \lim_{x\to\infty} f'''(x) = 0.$$

求证：$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0.$

【证】由泰勒公式有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_1),\quad x < \xi_1 < x+1, \qquad ①$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2),\quad x-1 < \xi_2 < x. \qquad ②$$

由 ① + ② 得，$f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1).$　③

由 ① − ② 得，$2f'(x) = f(x+1) - f(x-1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2).$　④

当 $x\to\infty$ 时，$\xi_1\to\infty, \xi_2\to\infty$，于是有

$$\lim_{x\to\infty} f''(x) = 2C - 2C + \frac{1}{6}\times 0 - \frac{1}{6}\times 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} 2f'(x) = C - C - \frac{1}{6}\times 0 - \frac{1}{6}\times 0 = 0.$$

因此　$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0.$

【例 2】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续，$f(0) = f(1) = 0$，并且当 $x\in(0,1)$ 时，$|f''(x)| \leqslant A$. 求证：$|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}, x\in[0,1]$.

【证】由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，则 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式，即

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$，$\xi$ 在 x 与 x_0 之间.

取 $x = 0, x_0 = x$，则

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + f''(\xi_1)\frac{(0-x)^2}{2!},\quad 0 < \xi_1 < x \leqslant 1; \qquad ①$$

取 $x = 1, x_0 = x$，则

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + f''(\xi_2)\frac{(1-x)^2}{2!},\quad 0 \leqslant x < \xi_2 < 1. \qquad ②$$

② − ① 得

$$f'(x) = f(1) - f(0) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2]$$

$$\xlongequal{f(0)=f(1)=0}\frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

又　$|f''(x)|\leqslant A,x\in(0,1)$,则

$$|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}[x^2+(1-x)^2]=\frac{A}{2}(2x^2-2x+1).$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$2x^2-2x+1\leqslant 1$. 故 $|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}$.

【例3】 试证:若偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数,且 $f(0)=1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛.

【证】 因 $f(x)$ 为偶函数,故 $f'(x)$ 为奇函数,$f'(0)=0$. 又

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2),$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故　$u_n=f\left(\frac{1}{n}\right)-1=\frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

从而　$|u_n|=\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|\sim\frac{|f''(0)|}{2n^2}$.

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|f''(0)|}{2n^2}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

【例4】 设函数 $f(x)$ 二阶可导,且 $f''(x)\geqslant 0,x\in(-\infty,+\infty)$,函数 u 在区间 $[0,a](a>0)$ 上连续. 证明:

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\,dt\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,dt\right].$$

【证】 令 $x_0=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,dt$,将 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处展成一阶泰勒公式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

由于 $f''(x)\geqslant 0$,　则 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

令 $x=u(t)$,　则　$f[u(t)]\geqslant f(x_0)+f'(x_0)[u(t)-x_0]$.

上式两边在 $[0,a]$ 上对 t 积分,得

$$\int_0^a f[u(t)]\,dt\geqslant\int_0^a f(x_0)\,dt+\int_0^a f'(x_0)[u(t)-x_0]\,dt$$

$$=af(x_0)+f'(x_0)\left[\int_0^a u(t)\,dt-ax_0\right]=af(x_0).$$

故　$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\,dt\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,dt\right]$.

【另证】 因 $f''(x)\geqslant 0$,所以 $f(x)$ 为凸函数. 因此,具有性质:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\left(\text{其中}\ \lambda\geqslant 0,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\right).$$

由 u 在 $[0,a]$ 上连续,从而可积. 将 $[0,a]$ n 等分,有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\xi_i)}{a}\frac{a}{n}=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,dt.$$

由 f 的凸性及连续性，有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\xi_i)}{a}\frac{a}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f[u(\xi_i)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(u(\xi_i))}{a}\frac{a}{n}.$$

对上式两边令 $n\to\infty$ 取极限，由可积性可得

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\,\mathrm{d}t.$$

第二句话：在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时，则"不管三七二十一"先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例5】设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导，且 $f(0)=f(\frac{1}{2})$，$2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=f(2)$. 证明：存在一个 $\xi\in(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.

【证】$f(2)=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x\xrightarrow{\text{积分中值定理}}2(1-\frac{1}{2})f(\eta)=f(\eta)$，$\frac{1}{2}\leqslant\eta\leqslant1$.

于是 $f(x)$ 在 $[\eta,2]$ 上满足洛尔定理，即存在一个 $\xi_1\in(\eta,2)$，使

$$f'(\xi_1)=0. \tag{①}$$

又 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上满足洛尔定理，于是存在一个 $\xi_2\in(0,\frac{1}{2})$，使

$$f'(\xi_2)=0. \tag{②}$$

由①，②可知 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2,\xi_1]$ 上使用洛尔定理，于是 $\exists\,\xi\in(\xi_2,\xi_1)\subset(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.

【例6】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是非负、单调递减的连续函数，且 $0<a<b<1$. 证明：

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

【证】由积分中值定理

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=af(\xi_1)\geqslant af(a),\quad \xi_1\in[0,a],$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi_2)\leqslant(b-a)f(a),\quad \xi_2\in[a,b].$$

于是 $\quad\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant f(a)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

故 $\quad\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

【另证】$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\quad\Leftrightarrow\quad b\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant a\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

令 $\quad F(x)=b\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-x\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$，则

$$f'(x)=bf(x)-\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)=\int_x^b f(x)\,\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t+2xf(x)$$

$$=\int_x^b[f(x)-f(t)]\,\mathrm{d}t+2xf(x)\geqslant0,(\text{由于}f(x)\geqslant f(t)\geqslant0).$$

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0)=0$，故

$$F(a)>F(0)=0,\text{即 }b\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x-a\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>0,$$

亦即 $$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

第三句话:在题设条件中函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且$f(a)=0$或$f(b)=0$或$f(a)=f(b)=0$,则“不管三七二十一”先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x)\xlongequal{f(a)=0}f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),\quad a<\xi<x.$$

或 $$f(x)\xlongequal{f(b)=0}f(x)-f(b)=f'(\xi)(x-b),\quad x<\xi<b.$$

若$f(a)=f(b)=0$,则 $$\begin{cases}f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a), & a<\xi_1<x,\\ f(x)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b), & x<\xi_2<b.\end{cases}$$

【例7】设函数$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导数,且$f(a)=f(b)=0$,$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$,试证:
$$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M.$$

【证】$f(x)\xlongequal{f(a)=0}f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi_1),a<\xi_1<x$, 则
$$|f(x)|=(x-a)|f'(\xi_1)|\leqslant(x-a)M.$$

同理 $|f(x)|\leqslant(b-x)M.$

于是 $$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)M\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)M\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{4}M.$$

故 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}M.$$

即 $$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

【例8】已知在$[0,a]$上$|f''(x)|\leqslant M$,且$f(x)$在$(0,a)$内取最大值,试证:
$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

【证】设$f(c)=\max\limits_{x\in(0,a)}\{f(x)\}$,则$f'(c)=0$.(费尔马定理)

对$f'(x)$在$[0,c]$与$[c,a]$内分别用拉格朗日中值定理,有
$$f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)c,\quad 0<\xi_1<c,$$
$$f'(a)-f'(c)=f''(\xi_2)(a-c),\quad c<\xi_2<a.$$

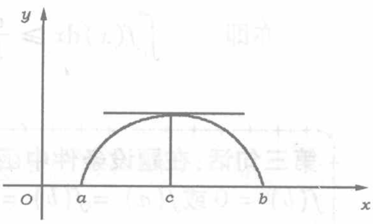
于是 $$|f'(0)|=|f''(\xi_1)c|\leqslant Mc,$$
$$|f'(a)|=|f''(\xi_2)(a-c)|\leqslant M(a-c).$$

故 $$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Mc+M(a-c)=Ma.$$

【例9】设$f(x)$在$[a,b]$上有连续的$f''(x)$,且$f''(x)<0$,$f(a)=f(b)=0$,则在(a,b)上$f(x)>0$,且
$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{4}{b-a}.$$

【证】由$f''(x)<0$可知,$f(x)$在$[a,b]$上是凹函数(图形上凸);由凹函数性质知,$f(x)$大于连接$(a,f(a))$,$(b,f(b))$线段上点的纵坐标.而此线段所在直线即为$y=0$(x轴),所以在(a,b)上$f(x)>0$.再由$f''(x)<0$知,$f'(x)$是严格单调减少的,从而知$f(x)$在(a,b)内有惟

一的极大值点，记为 $x=c$. 此时 $f'(c)=0$，如右图所示，而在 (a,c) 上，$f'(x)>0$，在 (c,b) 上 $f'(x)<0$.



由拉格朗日中值定理，当 $x\in[a,c]$ 时，

$$f(x)=f'(\xi_1)(x-a)+f(a),\quad \xi_1\in(a,x).$$

由 $f'(x)$ 严格递减，$f'(\xi_1)<f'_+(a)$，注意到 $f(a)=0$，有

$$f(x)<f'_+(a)(c-a),x\in[a,c].$$

当 $x\in[c,b]$ 时，同理可得

$$f(x)<[-f'_-(b)](b-c),x\in[c,b].$$

于是 $\dfrac{1}{f(x)}>\dfrac{1}{(c-a)f'_+(a)},x\in[a,c],$

$\dfrac{1}{f(x)}>\dfrac{1}{(b-c)(-f'_-(b))},x\in[c,b].$

则 $$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x=-\int_a^b\frac{f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^c\frac{-f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x+\int_c^b\frac{-f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$$

$$>\int_a^c\frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)}\mathrm{d}x+\int_c^b\frac{-f''(x)}{(b-c)(-f'_-(b))}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{(c-a)f'_+(a)}[f'_+(a)-f'(c)]+\frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))}[f'(c)-f'_-(b)]$$

$$=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{b-a}{(c-a)(b-c)}>(b-a)\frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\frac{4}{b-a}.$$

第四句话：对定限或变限积分，若被积函数或其主要部分为复合函数，则"不管三七二十一"先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例 10】 求下列函数的导数（设 $f(u)$ 是 u 的连续函数）：

（1）$F(y)=\int_0^y f(x-y)\mathrm{d}x$，求 $F'(y)$；（2）$F(x)=\int_0^{x^2}tf(x-t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$；

（3）$F(x)=\int_0^1 f(te^x)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$；（4）$F(x)=\int_0^{x^2}xf(x+t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$.

【解】（1）$F(y)\xlongequal{\text{令 } u=x-y}\int_{-y}^0 f(u)\mathrm{d}u$，则 $F'(y)=-f(-y)\cdot(-1)=f(-y)$.

（2）$$F(x)\xlongequal{\text{令 } u=x-t}\int_x^{x-x^2}(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)$$

$$=-x\int_x^{x-x^2}f(u)\mathrm{d}u+\int_x^{x-x^2}uf(u)\mathrm{d}u,$$

则 $$F'(x)=-\int_x^{x-x^2}f(u)\mathrm{d}u-x[f(x-x^2)\cdot(1-2x)-f(x)]$$

$$+(1-2x)(x-x^2)f(x-x^2)-xf(x)$$

$$=\int_{x-x^2}^x f(u)\mathrm{d}u+x^2(2x-1)f(x-x^2).$$

（3）$$F(x)\xlongequal{\text{令 } u=te^x}\int_0^{e^x}f(u)\frac{1}{e^x}\mathrm{d}u=\frac{1}{e^x}\int_0^{e^x}f(u)\mathrm{d}u=e^{-x}\int_0^{e^x}f(u)\mathrm{d}u,$$

则　$F'(x) = -e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\,du + e^{-x}f(e^x)\cdot e^x = f(e^x) - e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\,du.$

(4)　$\int_0^{x^2} f(x+t)\,dt \xlongequal{令 u = x+t} \int_x^{x+x^2} f(u)\,du$,于是有 $F(x) = x\int_x^{x+x^2} f(u)\,du$,

则　$F'(x) = \int_x^{x+x^2} f(u)\,du + x[f(x+x^2)(1+2x) - f(x)].$

【例 11】 设 $f(x)$ 可微,且满足 $x = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x tf(t-x)\,dt$,求 $f(x)$.

【解】 $\int_0^x tf(t-x)\,dt \xlongequal{令 u = t-x} \int_{-x}^0 (u+x)f(u)\,du = -\int_0^{-x} uf(u)\,du + x\int_{-x}^0 f(u)\,du.$

于是原方程变为　$x = \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^{-x} uf(u)\,du - x\int_0^{-x} f(u)\,du.$

两边对 x 求导,得　$1 = f(x) - (-x)f(-x)(-1) - \int_0^{-x} f(u)\,du - xf(-x)(-1).$

整理,得　$1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u)\,du,$

两边再对 x 求导,得　$0 = f'(x) - f(-x)(-1),$

即　$f'(x) = -f(-x),$　①

上式两边对 x 求导,得　$f''(x) = f'(-x),$　②

由①,②得　$f''(x) = -f(x),$

即　$f''(x) + f(x) = 0,$

解此方程得　$f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x.$

注意到　$f(0) = 1, f'(0) = -1$,故 $f(x) = \cos x - \sin x.$

【注】 第四句话可推广为:若给定的函数为抽象的复合函数,则运算之前应先做变量替换,使之成为简单的形式.

例如:$f[\varphi(x)] \xlongequal{令 u = \varphi(x)} f(u).$

【例 12】 设 $f(x^2-1) = \ln\frac{x^2}{x^2-2}$, $f[\varphi(x)] = \ln x$,计算 $\int\varphi(x)\,dx$.

【解】 令　$x^2 - 1 = t$,　则 $f(t) = \ln\frac{t+1}{t-1}$, $f[\varphi(x)] = \ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x$,

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1},$$

故　$\int\varphi(x)\,dx = \int\frac{x+1}{x-1}\,dx = x + 2\ln|x-1| + C.$

$f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$　　$x^2>2$

$x>\sqrt{2}$　$x<-\sqrt{2}$

$f(\varphi(x)) = \frac{\ln}{}$

$x = x^2-1$

$x>1$

$1+\frac{2}{x-1}$

第一篇　高等数学

第一章　函数·极限·连续

第1节　函数

知识点精讲

一、基本概念

1. 函数

设有两个变量x和y,变量x的变域为D,如果对于D中的每一个x值,按照一定的法则,变量y有一个确定的值与之对应,则称变量y为变量x的函数,记作:$y = f(x)$.

其中x—— 自变量,y—— 因变量,变域D为定义域,记为D_f,变量y的取值的集合称为函数的值域,记作Z_f.

函数概念的两要素:

① 定义域 $\triangleq$ 自变量x的变化范围(若函数是解析式子表示的,则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域).

② 对应关系 $\triangleq$ 给定x值,求y值的方法.