

文登考研指定用书

全国硕士研究生入学统一考试

2006 版

数学复习指南

理工类

主 编

陈文灯

黄先开

曹显兵

基础+题型=成功的保证

紧扣考试大纲，汇集了考研教学的所有题型，讲解到位，侧重训练学生的解题思路和发散性思维，实用性极强。



文登考研指定

O13
202

全国硕士研究生入学统一考试

2006 版

数学复习指南

理工类

主 编

陈文灯

黄先开

曹显兵

界园书出版公司



FOCUS
聚焦图书

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 理工类 / 陈文灯等编著. —11 版. —北京: 世界图书出版公司北京公司, 2004. 1

ISBN 7-5062-5211-2

I. 数... II. 陈... III. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002) 第 014886 号

数学复习指南(理工类) (2006 版)

主 编: 陈文灯 黄先开 曹显兵
副 主 编: 施明存 殷先军
责任编辑: 武海燕
封面设计: 滕晓娜

出 版: 世界图书出版公司北京公司
发 行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号 电话 62198079 邮编 100081)
销 售: 各地新华书店
印 刷: 廊坊人民印刷厂

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16
印 张: 39
字 数: 890 千字
版 次: 2005 年 2 月第 11 版 2005 年 5 月第 3 次印刷

ISBN 7-5062-5211-2/O · 332

定价: 49.80 元

服务热线: 010 - 62198078

前言

“得数学者得天下”。这句话在广大读者中广为流传。怎么才能考好数学,这是广大读者的迫切愿望。要实现这个愿望,首先要了解考研数学究竟考什么。从87年统考以来18年的试卷及历年考试大纲可以看出,主要是考四个方面:

一、基础。主要是从填空题和单选题两种题型来考核,通过考计算题和证明题也可看出一个读者的基础是否扎实。

二、简单知识点的综合能力。这是和过去很不同的一点。

三、分析问题和解决问题的能力,即解应用题的能力。

四、解题的速度。

针对这四个方面,根据广大读者提出的意见和我们的教学经验,我们对书中有关内容进行了修改,使它与考试更加协调,更加吻合。

本书的特点:

一、对基本概念、基本理论进行剖析,配合精选的例题使学生能够深入理解牢固掌握,考试时避免犯要领性的错误。

二、本书采用“举题型讲方法”代替普遍采用的讲方法举题型的作法,使读者做题时有的放矢、思路畅达。

三、本书介绍了许多新的、快捷的解题方法和技巧,有些技巧是全国各高校从事几十年教学工作的老师给我们提供的,在此表示衷心感谢。

四、普遍采用表格法使广大读者对有些知识点能够一目了然。

五、从大处着手,不做小枝节的分析,使广大读者能够站在比较高的角度掌握题型的解法,而不是引导学生去作无谓的细小问题的分析。

六、本书介绍了两个超纲的内容,一个是广义积分的收敛,另一个是二重积分的换元法,同学们掌握了这两项内容,在做某些题时可以获得思路上的启发。

本书的这六个特点,还不太完善,但是是我们追求的目的和愿望。愿广大读者对本书给予批评和指正。

陈文灯

目 录

考研数学复习策略	1
----------------	---

篇前篇 高数解题的四种思维定式	2
-----------------------	---

第一篇 高等数学

第一章 函数·极限·连续	8
--------------------	---

第1节 函数	8
--------------	---

知识点精讲	8
-------------	---

题型归纳及思路提示	11
-----------------	----

第2节 极限及连续性	18
------------------	----

知识点精讲	18
-------------	----

题型归纳及思路提示	23
-----------------	----

本章备忘录	40
-------------	----

精选习题一	40
-------------	----

参考答案	42
------------	----

第二章 导数与微分	43
-----------------	----

第1节 导数与微分	43
-----------------	----

知识点精讲	43
-------------	----

题型归纳及思路提示	45
-----------------	----

第2节 高阶导数	53
----------------	----

知识点精讲	53
-------------	----

题型归纳及思路提示	54
-----------------	----

本章备忘录	57
-------------	----

精选习题二	57
-------------	----

参考答案	59
------------	----

第三章 一元函数积分学	60
-------------------	----

第1节 不定积分	60
----------------	----

知识点精讲	60
-------------	----

题型归纳及思路提示	72
-----------------	----

精选习题三(1)	82
----------------	----

参考答案	83
------------	----

第2节 定积分	84
---------------	----

知识点精讲	84
-------------	----

题型归纳及思路提示	90
-----------------	----

精选习题三(2)	116
----------------	-----

参考答案	117
------------	-----

第3节 广义积分	118
----------------	-----

知识点精讲	118
-------------	-----

题型归纳及思路提示	119
-----------------	-----

精选习题三(3)	121
----------------	-----

参考答案	121
------------	-----

本章备忘录	122
-------------	-----

第四章 微分中值定理与泰勒公式	123
-----------------------	-----

第1节 泰勒公式	123
----------------	-----

知识点精讲	123
-------------	-----

题型归纳及思路提示	124
-----------------	-----

第2节 中值定理	126
----------------	-----

知识点精讲	126
-------------	-----

题型归纳及思路提示	127
-----------------	-----

本章备忘录	136
-------------	-----

精选习题四	136
-------------	-----

参考答案	137
------------	-----

第五章 常微分方程	138
-----------------	-----

第1节 常微分方程的基本概念	138
----------------------	-----

知识点精讲	138
-------------	-----

第2节 一阶微分方程	139
------------------	-----

知识点精讲	139
-------------	-----

题型归纳及思路提示	140
-----------------	-----

第3节 可降阶的高阶微分方程	148
----------------------	-----

知识点精讲	148
-------------	-----

题型归纳及思路提示	149	第2节 函数项级数与幂级数	208
第4节 高阶线性微分方程	150	知识点精讲	208
知识点精讲	150	题型归纳及思路提示	211
题型归纳及思路提示	154	第3节 无穷级数的求和	216
第5节 欧拉方程*	157	题型归纳及思路提示	216
知识点精讲	157	第4节 傅里叶级数	225
题型归纳及思路提示	157	知识点精讲	225
第6节 微分方程的应用	159	题型归纳及思路提示	228
题型归纳及思路提示	159	本章备忘录	231
本章备忘录	162	精选习题七	231
精选习题五	162	参考答案	233
参考答案	163	第八章 多元函数微分学及应用 ...	234
第六章 一元微积分的应用	165	第1节 二元函数	234
第1节 函数的单调性	165	知识点精讲	234
知识点精讲	165	题型归纳及思路提示	234
题型归纳及思路提示	165	第2节 二元函数的极限及连续性	235
第2节 极值与最值	166	知识点精讲	235
知识点精讲	166	题型归纳及思路提示	236
题型归纳及思路提示	167	第3节 二元函数的偏导数、全导数及	
第3节 方程的根	173	全微分	237
题型归纳及思路提示	173	知识点精讲	237
第4节 函数的图形性质	178	题型归纳及思路提示	238
知识点精讲	178	第4节 多元函数微分学在几何上的应用	248
题型归纳及思路提示	179	知识点精讲	248
第5节 弧微分	182	题型归纳及思路提示	249
知识点精讲	182	第5节 多元函数的极值及应用	251
题型归纳及思路提示	182	知识点精讲	251
第6节 微元法	183	题型归纳及思路提示	252
知识点精讲	183	本章备忘录	257
题型归纳及思路提示	183	精选习题八	257
本章备忘录	193	参考答案	258
精选习题六	193	第九章 向量代数与空间解析几何*	
参考答案	195		259
第七章 无穷级数*	196	第1节 向量	259
第1节 常数项级数	196	知识点精讲	259
知识点精讲	196	题型归纳及思路提示	261
题型归纳及思路提示	199		

第2节 直线与平面	265
知识点精讲	265
题型归纳及思路提示	266
第3节 投影方程	270
知识点精讲	270
题型归纳及思路提示	271
第4节 曲面方程	273
知识点精讲	273
题型归纳及思路提示	275
本章备忘录	277
精选习题九	278
参考答案	278
第十章 重积分	280
第1节 二重积分	280
知识点精讲	280
题型归纳及思路提示	284
第2节 三重积分*	297
知识点精讲	297
题型归纳及思路提示	299
本章备忘录	302
精选习题十	302
参考答案	304
第十一章 曲线、曲面积分及场论	
初步*	306
第1节 曲线积分	306
知识点精讲	306
题型归纳及思路提示	308
第2节 曲面积分	315
知识点精讲	315
题型归纳及思路提示	317
第3节 场论初步	325
知识点精讲	325
题型归纳及思路提示	327
本章备忘录	330
精选习题十一	330
参考答案	331

18 第十二章 函数方程与不等式证明

.....	332
精选习题十二	349
参考答案	349

第二篇 线性代数

第一章 行列式	351
第1节 排列与逆序	351
知识点精讲	351
题型归纳及思路提示	352
第2节 行列式	353
知识点精讲	353
题型归纳及思路提示	355
本章备忘录	366
精选习题一	366
参考答案	367
第二章 矩阵	368
第1节 矩阵	368
知识点精讲	368
题型归纳及思路提示	369
第2节 逆矩阵	374
知识点精讲	374
题型归纳及思路提示	377
本章备忘录	389
精选习题二	389
参考答案	392
第三章 向量	394
第1节 向量	394
知识点精讲	394
第2节 向量的线性组合、线性表示及线性相关性	395
知识点精讲	395
题型归纳及思路提示	396
第3节 向量组的秩和矩阵的秩	405
知识点精讲	405
题型归纳及思路提示	407
第4节 向量空间	413

知识点精讲	413
题型归纳及思路提示	415
本章备忘录	417
精选习题三	418
参考答案	419
第四章 线性方程组	421
知识点精讲	421
题型归纳及思路提示	424
本章备忘录	444
精选习题四	444
参考答案	446
第五章 特征值和特征向量	448
第1节 矩阵的特征值和特征向量	448
知识点精讲	448
题型归纳及思路提示	450
第2节 相似矩阵、对称矩阵及矩阵的 对角化	456
知识点精讲	456
题型归纳及思路提示	458
本章备忘录	468
精选习题五	469
参考答案	470
第六章 二次型*	472
第1节 二次型	472
知识点精讲	472
题型归纳及思路提示	474
第2节 二次型的正定性及正定矩阵	480
知识点精讲	480
题型归纳及思路提示	481
本章备忘录	485
精选习题六	485
参考答案	486

第三篇 概率论与数理统计*

第一章 随机事件和概率	487
第1节 随机试验和随机事件	487

知识点精讲	487
题型归纳及思路提示	490
第2节 条件概率与事件的独立性	496
知识点精讲	496
题型归纳及思路提示	498
本章备忘录	503
精选习题一	503
参考答案	505
第二章 随机变量及其分布	506
第1节 一维随机变量与分布函数	506
知识点精讲	506
题型归纳及思路提示	509
第2节 二维随机变量与分布函数	519
知识点精讲	519
题型归纳及思路提示	522
本章备忘录	537
精选习题二	537
参考答案	540
第三章 随机变量的数字特征	543
第1节 一维随机变量的数字特征	543
知识点精讲	543
题型归纳及思路提示	545
第2节 二维随机变量的数字特征	552
知识点精讲	552
题型归纳及思路提示	554
本章备忘录	569
精选习题三	569
参考答案	571
第四章 大数定律和中心极限定理	572
第1节 切比雪夫不等式与大数定律	572
知识点精讲	572
题型归纳及思路提示	573
第2节 中心极限定理	575
知识点精讲	575
题型归纳及思路提示	576
本章备忘录	579

精选习题四	579	知识点精讲	589
参考答案	579	题型归纳及思路提示	590
第五章 数理统计的基本概念	580	第2节 区间估计	597
第1节 总体、样本和统计量	580	知识点精讲	597
知识点精讲	580	题型归纳及思路提示	599
题型归纳及思路提示	581	本章备忘录	601
第2节 抽样分布	583	精选习题六	601
知识点精讲	583	参考答案	603
题型归纳及思路提示	585	第七章 假设检验	604
本章备忘录	587	知识点精讲	604
精选习题五	587	题型归纳及思路提示	606
参考答案	588	本章备忘录	608
第六章 参数估计	589	精选习题七	608
第1节 点估计	589	参考答案	609

带“*”号内容数二考生不作要求



考研数学复习策略

一、考研数学对考生知识和能力的要求

数学考试要求考生比较系统地理解数学的基本概念和基本理论,掌握数学的基本方法,要求考生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力。

二、考研数学试题的特点

数学考试根据工学、经济学、管理学各学科和专业对硕士研究生入学所应具备的数学知识和能力的不同要求,将数学统考试卷分为数学一、数学二、数学三和数学四。考生具体考哪个卷种,须向所报考院校咨询或查看该校的招生简章。

在题型比例上,填空题和选择题约占40%,其中填空题6道,每道4分,单项选择题8道,每道4分;解答题(包括证明题)约占60%,共9道题。

本书为理工类,涵盖数学一和数学二的内容。数学一卷中,高等数学约占60%,线性代数约占20%,概率论与数理统计约占20%;数学二卷中,高等数学约占80%,线性代数约占20%。

试卷满分为150分,考试时间为180分钟,基本上考试时间在考试开始后的第二天的上午。

三、考研数学复习策略

1. 书该怎么读

由于数学考试重点考查考生的基本概念、基本理论、基本方法的掌握,所以考生应重视基础知识的掌握。考生应全面复习考纲要求的基础知识,通过一定量的习题巩固对基本概念及相关定理的理解,特别是对定理的条件要熟练掌握,否则容易用错。

2. 题该怎么做

数学中的习题相当多,考生应有针对性地进行练习。大家知道,题目是无限的,但题型是有限的。通过对典型题型的练习,掌握相应的解题方法,能迅速提高你的解题能力,节省考场上的宝贵时间。另外,大家应准确审题,一定要认真仔细。

3. 怎样逐渐提高自己的能力

经常进行自我总结,错题总结能逐渐提高解题能力。我们可以在学完每一章后,自己通过画图的形式回忆这章有哪些知识点,有哪些定理,它们之间有些什么联系,如何应用等;对做错的题分析一下原因:概念不清楚、定理用错了还是计算粗心?数学思维方法是数学的精髓,只有对此进行归纳、领会、应用,才能把数学知识与技能转化为分析问题、解决问题的能力,使解题能力“更上一层楼”。

4. 复习进度安排建议

复习进度因人而异,这只是给同学们的一个建议,供大家参考:

3月—7月

复习大纲规定的基本知识

7月—9月

第一阶段的全面复习

10月—11月

第二阶段的强化练习

12月—第二年1月

冲刺复习,隔两天做一套模拟题并及时查缺补漏

篇前篇 高数解题的四种思维定式

先赠送给大家四句话,相信在考研中能起到关键作用,请考生务必牢记.

第一句话:在题设条件中若函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导,“不管三七二十一”,把 $f(x)$ 在指定点展成泰勒公式再说.

【例1】设 C 为实数,函数 $f(x)$ 满足下列两个等式:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'''(x) = 0.$$

求证: $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$.

【证】由泰勒公式有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_1), \quad x < \xi_1 < x+1, \quad (1)$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2), \quad x-1 < \xi_2 < x. \quad (2)$$

$$\text{由 } (1) + (2) \text{ 得, } f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1). \quad (3)$$

$$\text{由 } (1) - (2) \text{ 得, } 2f'(x) = f(x+1) - f(x-1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2). \quad (4)$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\xi_1 \rightarrow \infty, \xi_2 \rightarrow \infty$, 于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 2C - 2C + \frac{1}{6} \times 0 - \frac{1}{6} \times 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2f'(x) = C - C - \frac{1}{6} \times 0 - \frac{1}{6} \times 0 = 0.$$

因此 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$.

【例2】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶导数连续, $f(0) = f(1) = 0$, 并且当 $x \in (0, 1)$ 时, $|f''(x)| \leq$

A. 求证: $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}, x \in [0, 1]$.

【证】由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶连续导数, 则 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式, 即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2, \quad \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间.}$$

取 $x = 0, x_0 = x$, 则

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0 - x) + \frac{1}{2!}f''(\xi_1)(0 - x)^2, \quad 0 < \xi_1 < x \leq 1; \quad (1)$$

取 $x = 1, x_0 = x$, 则

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1 - x) + \frac{1}{2!}f''(\xi_2)(1 - x)^2, \quad 0 \leq x < \xi_2 < 1. \quad (2)$$

② - ① 得

$$f'(x) = f(1) - f(0) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1 - x)^2]$$



$$\frac{f(0) = f(1) = 0}{2!} [f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

又 $|f''(x)| \leq A, x \in (0, 1)$, 则

$$|f'(x)| \leq \frac{A}{2} [x^2 + (1-x)^2] = \frac{A}{2} (2x^2 - 2x + 1).$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $2x^2 - 2x + 1 \leq 1$. 故 $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}$.

【例3】试证:若偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数, 且 $f(0)=1$, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] \text{ 绝对收敛.}$$

【证】因 $f(x)$ 为偶函数, 故 $f'(x)$ 为奇函数, $f'(0)=0$. 又

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{f''(0)}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\text{故 } u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{f''(0)}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\text{从而 } |u_n| = \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right| \sim \frac{|f''(0)|}{2n^2}.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f''(0)|}{2n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

【例4】设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$, 函数 u 在区间 $[0, a] (a > 0)$ 上连续. 证明:

$$\frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)] dt \geq f\left[\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right].$$

【证】令 $x_0 = \frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt$, 将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展成一阶泰勒公式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi)(x - x_0)^2.$$

由于 $f''(x) \geq 0$, 则 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

令 $x = u(t)$, 则 $f[u(t)] \geq f(x_0) + f'(x_0)[u(t) - x_0]$.

上式两边在 $[0, a]$ 上对 t 积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^a f[u(t)] dt &\geq \int_0^a f(x_0) dt + \int_0^a f'(x_0)[u(t) - x_0] dt \\ &= af(x_0) + f'(x_0) \left[\int_0^a u(t) dt - ax_0 \right] = af(x_0). \end{aligned}$$

$$\text{故 } \frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)] dt \geq f\left[\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right].$$

【另证】因 $f''(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 为凸函数. 因此, 具有性质:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad (\text{其中 } \lambda \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1).$$

由 u 在 $[0, a]$ 上连续, 从而可积. 将 $[0, a]$ n 等分, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{u(\xi_i)}{a} \frac{a}{n} = \frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt.$$



由 f 的凸性及连续性,有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{u(\xi_i)}{a} \cdot \frac{a}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f[u(\xi_i)] = \sum_{i=1}^n \frac{f(u(\xi_i))}{a} \cdot \frac{a}{n}.$$

对上式两边令 $n \rightarrow \infty$ 取极限,由可积性可得

$$f\left(\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right) \leq \frac{1}{a} \int_0^a f(u(t)) dt.$$

第二句话:在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时,则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例5】设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续,在 $(0, 2)$ 内二阶可导,且 $f(0) = f(\frac{1}{2})$, $2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$.

证明:存在一个 $\xi \in (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【证】 $f(2) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \xrightarrow{\text{积分中值定理}} 2(1 - \frac{1}{2})f(\eta) = f(\eta)$, $\frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$.

于是 $f(x)$ 在 $[\eta, 2]$ 上满足洛尔定理,即存在一个 $\xi_1 \in (\eta, 2)$, 使

$$f'(\xi_1) = 0. \quad ①$$

又 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上满足洛尔定理,于是存在一个 $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$, 使

$$f'(\xi_2) = 0. \quad ②$$

由 ①, ② 可知 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2, \xi_1]$ 上使用洛尔定理,于是 $\exists \xi \in (\xi_2, \xi_1) \subset (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【例6】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是非负、单调递减的连续函数,且 $0 < a < b < 1$. 证明:

$$\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【证】由积分中值定理

$$\int_0^a f(x) dx = af(\xi_1) \geq af(a), \quad \xi_1 \in [0, a],$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi_2) \leq (b-a)f(a), \quad \xi_2 \in [a, b].$$

$$\text{于是 } \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \geq f(a) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq \frac{1}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{故 } \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【另证】 $\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_a^b f(x) dx.$

$$\text{令 } F(x) = b \int_0^x f(t) dt - x \int_x^b f(t) dt, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= bf(x) - \int_x^b f(t) dt + xf(x) = \int_x^b f(x) dt - \int_x^b f(t) dt + 2xf(x) \\ &= \int_x^b [f(x) - f(t)] dt + 2xf(x) \geq 0, \quad (\text{由于 } f(x) \geq f(t) \geq 0). \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0) = 0$, 故

$$F(a) > F(0) = 0, \text{ 即 } b \int_0^a f(x) dx - a \int_a^b f(x) dx > 0,$$



亦即 $\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$

第三句话:在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内可导,且 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 或 $f(a) = f(b) = 0$, 则“不管三七二十一”先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x) \stackrel{f(a)=0}{=} f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \quad a < \xi < x.$$

$$\text{或 } f(x) \stackrel{f(b)=0}{=} f(x) - f(b) = f'(\xi)(x-b), \quad x < \xi < b.$$

$$\text{若 } f(a) = f(b) = 0, \text{ 则 } \begin{cases} f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a), & a < \xi_1 < x, \\ f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b), & x < \xi_2 < b. \end{cases}$$

【例7】设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数,且 $f(a) = f(b) = 0, M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, 试证:

$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【证】 $f(x) \stackrel{f(a)=0}{=} f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi_1), a < \xi_1 < x$, 则
 $|f(x)| = (x-a)|f'(\xi_1)| \leq (x-a)M.$

$$\text{同理 } |f(x)| \leq (b-x)M.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \\ &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)M dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)M dx = \frac{(b-a)^2}{4} M. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{(b-a)^2}{4} M.$$

$$\text{即 } \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【例8】已知在 $[0, a]$ 上 $|f''(x)| \leq M$, 且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取最大值, 试证:

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma.$$

【证】设 $f(c) = \max_{x \in (0, a)} \{f(x)\}$, 则 $f'(c) = 0$. (费尔马定理)

对 $f'(x)$ 在 $[0, c]$ 与 $[c, a]$ 内分别用拉格朗日中值定理, 有

$$f'(c) - f'(0) = f''(\xi_1)c, \quad 0 < \xi_1 < c,$$

$$f'(a) - f'(c) = f''(\xi_2)(a-c), \quad c < \xi_2 < a.$$

$$\text{于是 } |f'(0)| = |f''(\xi_1)c| \leq Mc,$$

$$|f'(a)| = |f''(\xi_2)(a-c)| \leq M(a-c).$$

$$\text{故 } |f'(0)| + |f'(a)| \leq Mc + M(a-c) = Ma.$$

【例9】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的 $f''(x)$, 且 $f''(x) < 0, f(a) = f(b) = 0$, 则在 (a, b) 上 $f(x) > 0$, 且

$$\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > \frac{4}{b-a}.$$

【证】由 $f''(x) < 0$ 可知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹函数 (图形上凸); 由凹函数性质知, $f(x)$ 大于连接 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 线段上点的纵坐标. 而此线段所在直线即为 $y = 0$ (x 轴), 所以在 (a, b) 上 $f(x) > 0$. 再由 $f''(x) < 0$ 知 $f'(x)$ 是严格单调减少的, 从而知 $f(x)$ 在 (a, b) 内有惟



一的极大值点,记为 $x = c$. 此时 $f'(c) = 0$, 如右图所示, 而在 (a, c) 上, $f'(x) > 0$, 在 (c, b) 上 $f'(x) < 0$.

由拉格朗日中值定理, 当 $x \in [a, c]$ 时,

$$f(x) = f'(\xi_1)(x - a) + f(a), \quad \xi_1 \in (a, x).$$

由 $f'(x)$ 严格递减, $f'(\xi_1) < f'_+(a)$, 注意到 $f(a) = 0$, 有

$$f(x) < f'_+(a)(c - a), \quad x \in [a, c].$$

当 $x \in [c, b]$ 时, 同理可得

$$f(x) < [-f'_-(b)](b - c), \quad x \in [c, b].$$

于是 $\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(c - a)f'_+(a)}, x \in [a, c],$

$$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(b - c)(-f'_-(b))}, x \in [c, b].$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx &= - \int_a^b \frac{f''(x)}{f(x)} dx = \int_a^c \frac{-f''(x)}{f(x)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{f(x)} dx \\ &> \int_a^c \frac{-f''(x)}{(c - a)f'_+(a)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{(b - c)(-f'_-(b))} dx \\ &= \frac{1}{(c - a)f'_+(a)} [f'_+(a) - f'(c)] + \frac{1}{(b - c)(-f'_-(b))} [f'(c) - f'_-(b)] \\ &= \frac{1}{c - a} + \frac{1}{b - c} = \frac{b - a}{(c - a)(b - c)} > (b - a) \frac{1}{\left(\frac{b - a}{2}\right)^2} = \frac{4}{b - a}. \end{aligned}$$

第四句话: 对定限或变限积分, 若被积函数或其主要部分为复合函数, 则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例 10】求下列函数的导数 (设 $f(u)$ 是 u 的连续函数):

(1) $F(y) = \int_0^y f(x - y) dx$, 求 $F'(y)$; (2) $F(x) = \int_0^{x^2} tf(x - t) dt$, 求 $F'(x)$;

(3) $F(x) = \int_0^1 f(te^x) dt$, 求 $F'(x)$; (4) $F(x) = \int_0^{x^2} xf(x + t) dt$, 求 $F'(x)$.

【解】(1) $F(y) \xrightarrow{\text{令 } u = x - y} \int_{-y}^0 f(u) du$, 则 $F'(y) = -f(-y) \cdot (-1) = f(-y)$.

(2) $F(x) \xrightarrow{\text{令 } u = x - t} \int_x^{x - x^2} (x - u)f(u)(-du)$
 $= -x \int_x^{x - x^2} f(u) du + \int_x^{x - x^2} uf(u) du,$

则 $F'(x) = - \int_x^{x - x^2} f(u) du - x[f(x - x^2) \cdot (1 - 2x) - f(x)]$
 $+ (1 - 2x)(x - x^2)f(x - x^2) - xf(x)$
 $= \int_{x - x^2}^x f(u) du + x^2(2x - 1)f(x - x^2).$

(3) $F(x) \xrightarrow{\text{令 } u = te^x} \int_0^{e^x} f(u) \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{e^x} \int_0^{e^x} f(u) du = e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du,$



则 $F'(x) = -e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du + e^{-x} f(e^x) \cdot e^x = f(e^x) - e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du.$

(4) $\int_0^{x^2} f(x+t) dt \xrightarrow{\text{令 } u=x+t} \int_x^{x+x^2} f(u) du, \text{ 于是有 } F(x) = x \int_x^{x+x^2} f(u) du,$

则 $F'(x) = \int_x^{x+x^2} f(u) du + x[f(x+x^2)(1+2x) - f(x)].$

【例 11】设 $f(x)$ 可微, 且满足 $x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t-x) dt$, 求 $f(x)$.

【解】 $\int_0^x t f(t-x) dt \xrightarrow{\text{令 } u=t-x} \int_{-x}^0 (u+x) f(u) du = - \int_{-x}^0 u f(u) du + x \int_{-x}^0 f(u) du.$

于是原方程变为 $x = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{-x} u f(u) du - x \int_0^{-x} f(u) du.$

两边对 x 求导, 得 $1 = f(x) - (-x) f(-x) (-1) - \int_0^{-x} f(u) du - x f(-x) (-1).$

整理, 得 $1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u) du,$

两边再对 x 求导, 得 $0 = f'(x) - f(-x) (-1),$

即 $f'(x) = -f(-x),$

上式两边对 x 求导, 得 $f''(x) = f'(-x),$

由 ①, ② 得 $f''(x) = -f(x),$

即 $f''(x) + f(x) = 0,$

解此方程得 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

注意到 $f(0) = 1, f'(0) = -1$, 故 $f(x) = \cos x - \sin x.$

【注】第四句话可推广为: 若给定的函数为抽象的复合函数, 则运算之前应先做变量替换, 使之成为简单的形式.

例如: $f[\varphi(x)] \xrightarrow{\text{令 } u=\varphi(x)} f(u).$

【例 12】设 $f(x^2 - 1) = \ln \frac{x^2}{x^2 - 2}$, $f[\varphi(x)] = \ln x$, 计算 $\int \varphi(x) dx$.

【解】令 $x^2 - 1 = t$, 则 $f(t) = \ln \frac{t+1}{t-1}$, $f[\varphi(x)] = \ln \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x,$

$\Rightarrow \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1},$

故 $\int \varphi(x) dx = \int \frac{x+1}{x-1} dx = x + 2 \ln |x-1| + C.$

$f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$

$f(\ln x) = \ln \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$

$\frac{1}{x-1}$

$x^2 > 2$
 $x > \sqrt{2} \quad x < -\sqrt{2}$

$x = x^2$

$x > 1$

$\frac{1}{x-1}$

第一篇 高等数学

第一章 函数·极限·连续

第1节 函数

■ 知识点精讲

一、基本概念

1. 函数

设有两个变量 x 和 y , 变量 x 的变域为 D , 如果对于 D 中的每一个 x 值, 按照一定的法则, 变量 y 有一个确定的值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记作: $y = f(x)$.

其中 x ——自变量, y ——因变量, 变域 D 为定义域, 记为 D_f , 变量 y 的取值的集合称为函数的值域, 记作 Z_f .

函数概念的两要素:

- ① 定义域 $\triangleq$ 自变量 x 的变化范围 (若函数是解析式子表示的, 则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域).
- ② 对应关系 $\triangleq$ 给定 x 值, 求 y 值的方法.