

◎ 本社组编

GaoKao FuXi JiaoCheng

2010 年上海高考考生适用

高考 复习教程

数 学

答案与详解

高考

高考复习教程·语文上册

高考复习教程·语文下册

高考复习教程·数学上册

高考复习教程·数学下册

高考复习教程·英语上册

高考复习教程·英语下册

高考复习教程·物理上册

高考复习教程·物理下册

高考复习教程·化学上册

高考复习教程·化学下册

高考复习教程·数学答案与详解

ISBN 978-7-5617-5982-0



9 787561 759820 >

定价：22.00元

www.ecnupress.com.cn

高考

复习教程

数学答案与详解

华东师范大学出版社

本社组编

图书在版编目(CIP)数据

高考复习教程·数学答案与详解 / 本社组编. —上海: 华东
师范大学出版社, 2008
ISBN 978-7-5617-5982-0

I. 高… II. 沈… III. 数学课—高中—解题 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 052164 号

高考复习教程·数学答案与详解

组 编 本 社
项目编辑 应向阳
组稿编辑 徐惟简
审读编辑 石 岩
装帧设计 黄惠敏

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
电话总机 021-62450163 转各部门 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话 021-62869887
门市地址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 址 www.ecnupress.com.cn

印 刷 者 华东师范大学印刷厂
开 本 787×1092 16 开
印 张 16.25
字 数 523 千字
版 次 2009 年 6 月第二版
印 次 2009 年 6 月第一次
书 号 ISBN 978-7-5617-5982-0 / G·3465
定 价 22.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

目 录

上 册

第一章 集合、命题、不等式

第1节	集合及其运算	1
第2节	命题与条件	1
第3节	不等式基本性质及其简单应用	2
第4节	一元二次不等式	3
第5节	其他不等式	4
第6节	不等式的应用(一)	6
第7节	不等式的应用(二)	6
第8节	不等式的证明(理)	8
第9节	本章小结(一)	10
第10节	本章小结(二)	11

第二章 函数的基本性质

第11节	函数的概念与运算	13
第12节	函数的奇偶性	13
第13节	函数的单调性	14
第14节	函数的值域与最值(一)	15
第15节	函数的值域与最值(二)	16
第16节	函数的图象、对称性、周期性	17
第17节	函数应用题	18
第18节	本章小结(一)	19
第19节	本章小结(二)	20

第三章 幂函数、指数函数和对数函数

第20节	幂函数	22
第21节	指数函数	23
第22节	反函数	27
第23节	对数与对数函数	30
第24节	指数方程和对数方程	33
第25节	函数与方程、不等式(一)	35
第26节	函数与方程、不等式(二)	39
第27节	本章小结(一)	43
第28节	本章小结(二)	47

第四章 三角比与三角函数

第 29 节	任意角的三角比	51
第 30 节	诱导公式及同角三角比的关系	52
第 31 节	两角和与差的三角比	54
第 32 节	二倍角及半角的三角比	56
第 33 节	正弦定理和余弦定理	58
第 34 节	和差化积与积化和差(理)	60
第 35 节	三角函数的图象与性质(一)	63
第 36 节	三角函数的图象与性质(二)	65
第 37 节	反三角函数及三角方程	67
第 38 节	本章小结	69

第五章 数列、极限与数学归纳法

第 39 节	数列的概念	72
第 40 节	等差、等比数列及通项公式(一)	73
第 41 节	等差、等比数列及通项公式(二)	76
第 42 节	等差数列、等比数列的性质	78
第 43 节	数列求和	80
第 44 节	数列极限	83
第 45 节	数学归纳法	85
第 46 节	数列的应用(一)	86
第 47 节	数列的应用(二)	88
第 48 节	本章小结(一)	90
第 49 节	本章小结(二)	92

第六章 平面向量的坐标表示

第 50 节	向量的概念及运算	96
第 51 节	平面向量的坐标表示及分解定理	97
第 52 节	向量的数量积及其应用	99
第 53 节	本章小结	100

第七章 矩阵、行列式及算法初步

第 54 节	矩阵、行列式的运算及性质	103
第 55 节	矩阵、行列式的应用	104
第 56 节	算法初步	105
第 57 节	本章小结	107

第八章 坐标平面上的直线与线性规划

第 58 节	直线的方程	109
第 59 节	直线的倾斜角与斜率	109
第 60 节	直线与直线的位置关系(一)	110
第 61 节	直线与直线的位置关系(二)	111
第 62 节	线性规划(文)	111
第 63 节	本章小结	111

第九章 二次曲线

第 64 节	曲线与方程	113
第 65 节	圆的方程(一)	114
第 66 节	圆的方程(二)	116
第 67 节	椭圆及其性质	118
第 68 节	双曲线及其性质	121
第 69 节	抛物线及其性质	123
第 70 节	直线与圆锥曲线(一)	126
第 71 节	直线与圆锥曲线(二)	128
第 72 节	圆锥曲线综合应用(一)	130
第 73 节	圆锥曲线综合应用(二)	133
第 74 节	参数方程与极坐标(理)	136
第 75 节	本章小结(一)	138
第 76 节	本章小结(二)	140

第十章 复数

第 77 节	复数的概念及运算(一)	143
第 78 节	复数的概念及运算(二)	144
第 79 节	复数中的方程问题	146
第 80 节	本章小结	149

第十一章 空间图形与简单几何体

第 81 节	平面的基本性质	153
第 82 节	直线和平面的位置关系	154
第 83 节	空间角的计算	155
第 84 节	棱柱和棱锥	158
第 85 节	圆柱和圆锥	161
第 86 节	空间向量及运算(理)	163
第 87 节	球的体积、表面积及球面距离	165
第 88 节	向量在立体几何中的应用(理)	167
第 89 节	本章小结	170

第十二章 排列、组合、二项式定理、概率与统计

第 90 节	加法原理与乘法原理	174
第 91 节	排列组合	175
第 92 节	排列组合应用题	177
第 93 节	二项式定理	178
第 94 节	概率初步	181
第 95 节	统计初步	183
第 96 节	概率运算和数学期望(理)	184
第 97 节	本章小结	186

下 册

一、单元测试卷

单元测试卷 1 集合与命题	190
---------------	-----

单元测试卷 2	不等式及其应用	190
单元测试卷 3	函数(1)	192
单元测试卷 4	函数(2)	192
单元测试卷 5	函数(3)	194
单元测试卷 6	三角比与三角函数	197
单元测试卷 7	复数	198
单元测试卷 8	数列	200
单元测试卷 9	坐标平面上的直线与线性规划	202
单元测试卷 10	圆锥曲线(1)	202
单元测试卷 11	圆锥曲线(2)	204
单元测试卷 12	平面向量及运算	206
单元测试卷 13	空间图形(1)	208
单元测试卷 14	空间图形(2)	210
单元测试卷 15	排列组合、二项式定理	212
单元测试卷 16	概率与统计方法	213
单元测试卷 17	矩阵、行列式及算法初步	214

二、专题训练卷

专题训练卷 1	函数与方程思想	216
专题训练卷 2	数形结合思想	217
专题训练卷 3	分类讨论思想	219
专题训练卷 4	三角比与三角函数	220
专题训练卷 5	立体几何	222
专题训练卷 6	数列	222
专题训练卷 7	直线与圆锥曲线	225
专题训练卷 8	学习能力型问题	227
专题训练卷 9	探究能力型问题	229
专题训练卷 10	应用能力型问题	231
专题训练卷 11	创新能力型问题	232

三、高考模拟卷

高考模拟卷 1		234
高考模拟卷 2		235
高考模拟卷 3		236
高考模拟卷 4		238
高考模拟卷 5		240
高考模拟卷 6		242
高考模拟卷 7		243
高考模拟卷 8		245
高考模拟卷 9		246
高考模拟卷 10		248
高考模拟卷 11		250
高考模拟卷 12		251

目 录

上 册

第一章 集合、命题、不等式

第1节	集合及其运算	1
第2节	命题与条件	1
第3节	不等式基本性质及其简单应用	2
第4节	一元二次不等式	3
第5节	其他不等式	4
第6节	不等式的应用(一)	6
第7节	不等式的应用(二)	6
第8节	不等式的证明(理)	8
第9节	本章小结(一)	10
第10节	本章小结(二)	11

第二章 函数的基本性质

第11节	函数的概念与运算	13
第12节	函数的奇偶性	13
第13节	函数的单调性	14
第14节	函数的值域与最值(一)	15
第15节	函数的值域与最值(二)	16
第16节	函数的图象、对称性、周期性	17
第17节	函数应用题	18
第18节	本章小结(一)	19
第19节	本章小结(二)	20

第三章 幂函数、指数函数和对数函数

第20节	幂函数	22
第21节	指数函数	23
第22节	反函数	27
第23节	对数与对数函数	30
第24节	指数方程和对数方程	33
第25节	函数与方程、不等式(一)	35
第26节	函数与方程、不等式(二)	39
第27节	本章小结(一)	43
第28节	本章小结(二)	47

第四章 三角比与三角函数

第 29 节	任意角的三角比	51
第 30 节	诱导公式及同角三角比的关系	52
第 31 节	两角和与差的三角比	54
第 32 节	二倍角及半角的三角比	56
第 33 节	正弦定理和余弦定理	58
第 34 节	和差化积与积化和差(理)	60
第 35 节	三角函数的图象与性质(一)	63
第 36 节	三角函数的图象与性质(二)	65
第 37 节	反三角函数及三角方程	67
第 38 节	本章小结	69

第五章 数列、极限与数学归纳法

第 39 节	数列的概念	72
第 40 节	等差、等比数列及通项公式(一)	73
第 41 节	等差、等比数列及通项公式(二)	76
第 42 节	等差数列、等比数列的性质	78
第 43 节	数列求和	80
第 44 节	数列极限	83
第 45 节	数学归纳法	85
第 46 节	数列的应用(一)	86
第 47 节	数列的应用(二)	88
第 48 节	本章小结(一)	90
第 49 节	本章小结(二)	92

第六章 平面向量的坐标表示

第 50 节	向量的概念及运算	96
第 51 节	平面向量的坐标表示及分解定理	97
第 52 节	向量的数量积及其应用	99
第 53 节	本章小结	100

第七章 矩阵、行列式及算法初步

第 54 节	矩阵、行列式的运算及性质	103
第 55 节	矩阵、行列式的应用	104
第 56 节	算法初步	105
第 57 节	本章小结	107

第八章 坐标平面上的直线与线性规划

第 58 节	直线的方程	109
第 59 节	直线的倾斜角与斜率	109
第 60 节	直线与直线的位置关系(一)	110
第 61 节	直线与直线的位置关系(二)	111
第 62 节	线性规划(文)	111
第 63 节	本章小结	111

第九章 二次曲线

第 64 节	曲线与方程	113
第 65 节	圆的方程(一)	114
第 66 节	圆的方程(二)	116
第 67 节	椭圆及其性质	118
第 68 节	双曲线及其性质	121
第 69 节	抛物线及其性质	123
第 70 节	直线与圆锥曲线(一)	126
第 71 节	直线与圆锥曲线(二)	128
第 72 节	圆锥曲线综合应用(一)	130
第 73 节	圆锥曲线综合应用(二)	133
第 74 节	参数方程与极坐标(理)	136
第 75 节	本章小结(一)	138
第 76 节	本章小结(二)	140

第十章 复数

第 77 节	复数的概念及运算(一)	143
第 78 节	复数的概念及运算(二)	144
第 79 节	复数中的方程问题	146
第 80 节	本章小结	149

第十一章 空间图形与简单几何体

第 81 节	平面的基本性质	153
第 82 节	直线和平面的位置关系	154
第 83 节	空间角的计算	155
第 84 节	棱柱和棱锥	158
第 85 节	圆柱和圆锥	161
第 86 节	空间向量及运算(理)	163
第 87 节	球的体积、表面积及球面距离	165
第 88 节	向量在立体几何中的应用(理)	167
第 89 节	本章小结	170

第十二章 排列、组合、二项式定理、概率与统计

第 90 节	加法原理与乘法原理	174
第 91 节	排列组合	175
第 92 节	排列组合应用题	177
第 93 节	二项式定理	178
第 94 节	概率初步	181
第 95 节	统计初步	183
第 96 节	概率运算和数学期望(理)	184
第 97 节	本章小结	186

下 册

一、单元测试卷

单元测试卷 1 集合与命题	190
---------------	-----

单元测试卷 2	不等式及其应用	190
单元测试卷 3	函数(1)	192
单元测试卷 4	函数(2)	192
单元测试卷 5	函数(3)	194
单元测试卷 6	三角比与三角函数	197
单元测试卷 7	复数	198
单元测试卷 8	数列	200
单元测试卷 9	坐标平面上的直线与线性规划	202
单元测试卷 10	圆锥曲线(1)	202
单元测试卷 11	圆锥曲线(2)	204
单元测试卷 12	平面向量及运算	206
单元测试卷 13	空间图形(1)	208
单元测试卷 14	空间图形(2)	210
单元测试卷 15	排列组合、二项式定理	212
单元测试卷 16	概率与统计方法	213
单元测试卷 17	矩阵、行列式及算法初步	214

二、专题训练卷

专题训练卷 1	函数与方程思想	216
专题训练卷 2	数形结合思想	217
专题训练卷 3	分类讨论思想	219
专题训练卷 4	三角比与三角函数	220
专题训练卷 5	立体几何	222
专题训练卷 6	数列	222
专题训练卷 7	直线与圆锥曲线	225
专题训练卷 8	学习能力型问题	227
专题训练卷 9	探究能力型问题	229
专题训练卷 10	应用能力型问题	231
专题训练卷 11	创新能力型问题	232

三、高考模拟卷

高考模拟卷 1		234
高考模拟卷 2		235
高考模拟卷 3		236
高考模拟卷 4		238
高考模拟卷 5		240
高考模拟卷 6		242
高考模拟卷 7		243
高考模拟卷 8		245
高考模拟卷 9		246
高考模拟卷 10		248
高考模拟卷 11		250
高考模拟卷 12		251

第一章 集合、命题、不等式

第1节 集合及其运算

例题精析

例1 C. 提示: 如果两个集合没有公共元素, 那么它们的子集也没有公共元素.

例2 $A = \{3, 12, 21, 27\}$, $B = \{6, 12, 15, 27\}$. 提示: 全集 $U = \{3, 6, 9, \dots, 27\}$, 画文氏图可以解决.

例3 $p < 1$; 提示: 画数轴可知, 只有当 $p < 1$ 时, $M \cap N \neq \emptyset$.

例4 $(-\infty, -1] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$. 提示: 集合 $B = (1, 3)$, $x^2 + ax - 6a^2 = 0$ 的两根为 $x_1 = -3a$, $x_2 = 2a$, 分 $a > 0$ 与 $a < 0$ 讨论.

备用题1 D. 提示: 当且仅当 P 是 Q 的子集时, $P \cap Q = P$.

备用题2 $[\frac{1}{2}, 3]$. 提示: $B = \{y | -1 \leq y \leq 2a + 3\}$, 而 $x^2 \geq 0$, 所以只需 $\begin{cases} a \geq -2, \\ 2a + 3 \geq a^2, \\ 2a + 3 \geq 4. \end{cases}$

课后练习

1 $\{a, c\}$ 2 $a \leq 2$

3 15, 10. 提示: 集合 $A \cup B$ 元素最多时, $A \cup B = U$, 集合 $A \cup B$ 元素最少时, $B \subseteq A$.

4 7. 提示: 集合 $M = \{x | x = \sin \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}\} = \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$, 其非空子集个数为 $2^3 - 1 = 7$.

5 C. 提示: 对于任意 $x \in M$, 则 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{(2k-1)\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \in N$, 而 $\frac{\pi}{2} \in N$, $\frac{\pi}{2} \notin M$.

6 D. 提示: $A = \{x | x^2 > 9\} = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

7 $a = -2$ 或 4 . 提示: $|a - 1| = 3$.

8 $a = -1$. 提示: $-3 \in B$, 所以 $a - 3 = -3$ 或 $2a - 1 = -3$, 由 $1 \notin B$ 可知: $a \neq 0$.

9 $a \geq 2$. 提示: 由 $A \cap \complement_U B = A$ 得 $A \subseteq \complement_U B$, 即 $A \cap B = \emptyset$.

10 (1) $(-\infty, -4) \cup \{0\} \cup [6, +\infty)$; (2) $[-\frac{4}{3}, 2]$

11 $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{3}$

第2节 命题与条件

例题精析

例1 命题(1)、(2)、(4)都是真命题; 命题(3)是假命题, 举反例: $a = 2, b = 3, c = 6$.

例2 逆命题: 已知空间四点, 如果这四个点不共面, 那么其中任意三点都不在同一直线上;

否命题: 已知空间四点, 如果存在三点在同一直线上, 那么这四个点共面;

逆否命题: 已知空间四点, 如果这四个点共面, 那么存在三点在同一直线上.

其中原命题和逆否命题是假命题, 逆命题和否命题是真命题.

例3 条件 " $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ " 是条件 " $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 或 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ " 的必要非充分条件. 因为 "若 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 或

$\alpha = \frac{2\pi}{3}$ 是假命题.

例 4 $a > 0, b < 0$. 提示: 当 a, b 同号时, a, b 的大小与 a^{-1}, b^{-1} 的大小反向, 故 a, b 不同号. 而 $a > b$, 所以当且仅当 $a > 0, b < 0$ 时, 不等式 $a > b$ 与 $a^{-1} > b^{-1}$ 同时成立.

备用题 1 条件“ $x \neq 3$ 或 $y \neq 5$ ”是条件“ $x + y \neq 8$ ”的必要非充分条件.

备用题 2 D. 提示: (1) 不等式两边同时乘以一个负数, 不等号的方向改变; (2) 当一元二次不等式的解集为空集时, 其系数之间没有确定的关系.

课后练习

1 真. 考虑它的逆否命题: “ $a = 2$ 且 $b = 3$, 则 $a + b = 5$ ”为真, 所以此命题为真.

2 充分非必要, 充分非必要.

3 A. 提示: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq \complement_U B$.

4 C. 提示: 当 $xy > 0$ 时, $|x + y| = |x| + |y|$, 而当 $xy = 0$ 时, 也有 $|x + y| = |x| + |y|$.

5 B. 提示: 如果 $f(x), g(x)$ 都是奇函数, 那么 $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数; 反之不成立, 反例: $f(x) \cdot g(x) = x^4$ 是偶函数, 取 $f(x) = g(x) = x^2$, 它们都是偶函数.

6 D

7 逆命题: 已知实数 a, b , 若 $a + b$ 是偶数, 则 a, b 都是偶数. 它是假命题.

否命题: 已知实数 a, b , 若 a, b 不都是偶数, 则 $a + b$ 不是偶数. 它是假命题.

逆否命题: 已知实数 a, b , 若 $a + b$ 不是偶数, 则 a, b 不都是偶数. 它是真命题.

8 必要性的证明: (反证) 假设 a, b, c 至少有一个不大于 0, 不妨设 $a \leq 0$, 若 $a = 0$, 则 $abc = 0$, 与 $abc > 0$ 矛盾; 若 $a < 0$, 由 $abc > 0$ 得 $bc < 0$; 由 $a + b + c > 0$ 得 $b + c > 0$. 所以 $a(b + c) = ab + ac < 0$, $ab + bc + ac < 0$. 这与已知 $ab + bc + ca > 0$ 矛盾. 所以 $a > 0, b > 0, c > 0$.

第 3 节 不等式基本性质及其简单应用

例 1 ①②④. 命题①正确, 若 $a \geq 0$, 可从乘方性质看出; 若 $a < 0, b \geq 0$, 显然; 若 $a < 0, b < 0$, 这时有 $-a > -b > 0$, 从而 $\sqrt[5]{-a} > \sqrt[5]{-b} > 0$, 即 $\sqrt[5]{a} < \sqrt[5]{b}$.

命题②正确, 可从倒数改向性质看出.

命题③不正确, 取 $a = 3, b = 2, c = 3, d = 1$, 这时 $1 = \frac{a}{c} < \frac{b}{d} = 2$.

命题④正确, 可从指数函数与对数函数的单调性得出.

例 2 $\begin{cases} x + y > a + b, \\ (x - a)(y - b) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - a) + (y - b) > 0, \\ (x - a)(y - b) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - a > 0, \\ y - b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > a, \\ y > b. \end{cases}$

即 $\begin{cases} x + y > a + b, \\ (x - a)(y - b) > 0 \end{cases}$ 是 $\begin{cases} x > a, \\ y > b \end{cases}$ 的充要条件.

例 3 作差比较

(1) $(x^2 + y^2) - (4x - 2y - 5) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$, 所以当 $x = 2$ 且 $y = -1$ 时, $x^2 + y^2 = 4x - 2y - 5$; 当 $x \neq 2$ 或 $y \neq -1$ 时, $x^2 + y^2 > 4x - 2y - 5$;

(2) $(a^{n+1} + b^{n+1}) - (a^n b + ab^n) = (a - b)(a^n - b^n)$. 由不等式基本性质知道, $a - b$ 与 $a^n - b^n$ 同正负, 所以 $a^{n+1} + b^{n+1} \geq a^n b + ab^n$.

例 4 从 $f(1) = a - c, f(2) = 4a - c$, 可得 $a = \frac{1}{3}[f(2) - f(1)], c = -\frac{1}{3}[4f(1) - f(2)]$. 故 $f(3) = 9a - c = \frac{8}{3}f(2) - \frac{5}{3}f(1)$. 由已知有 $-\frac{8}{3} \leq \frac{8}{3}f(2) \leq \frac{40}{3}, \frac{5}{3} \leq -\frac{5}{3}f(1) \leq \frac{20}{3}$, 所以 $-1 \leq \frac{8}{3}f(2) - \frac{5}{3}f(1) \leq 20$. 即 $-1 \leq f(3) \leq 20$.

$$\begin{aligned}
 \text{备用题 1} \quad \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} - \frac{1}{x-z} &= \frac{(y-z)(x-z) + (x-y)(x-z) - (x-y)(y-z)}{(x-y)(y-z)(x-z)} \\
 &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz}{(x-y)(y-z)(x-z)} \\
 &= \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2}{2(x-y)(y-z)(x-z)}.
 \end{aligned}$$

因 $x > y > z$, 所以 $x-y > 0$, $y-z > 0$, $x-z > 0$.

从而 $\frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2}{2(x-y)(y-z)(x-z)} > 0$ 即 $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} - \frac{1}{x-z}$ 的符号为正号.

备用题 2 当 $m = 2$ 时, 原不等式解集是空集; 当 $m > 2$ 时, 原不等式的解集是 $(-\infty, m+2)$; 当 $m < 2$ 时, 原不等式的解集是 $(m+2, +\infty)$.

课后练习

1 $ab > 0$

2 $x, -x^2, x^2, -x$. 提示: 由 $x^2 + x < 0$ 得 $-1 < x < 0$.

3 $(1) > (2) < (3) > (4) =$

4 C. 提示: $|a+b| + |a-b| \geq |(a+b) + (a-b)| = 2|a|$.

5 C. 提示: 因为 $c < 0$, 所以 $c < -c$, 所以 $3^c < 3^{-c}$.

6 C

7 B. 提示: 因为 $a > b > 1$, $0 < x < 1$, 所以 $x < b$, $x^x < b^x$, 再由 $a > b$ 得 $x^a < x^b$. 即①、②正确; ③、④的不等号方向不对.

8 C. 提示: 因为 a, b 是非零实数, 所以对 $a < b$ 两边同时乘以 $\frac{1}{a^2 b^2}$ 可得.

9 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$.

10 $22 \leq f(3) \leq 35$. 提示: $f(3) = 3a - \frac{b}{3}$, 再把 a, b 用 $f(1), f(2)$ 表示, 最后用不等式的性质解决.

11 3个. (1) 若 $ab > 0$, $-\frac{c}{a} < -\frac{d}{b}$, 则 $bc > ad$; (2) 若 $ab > 0$, $bc > ad$, 则 $-\frac{c}{a} < -\frac{d}{b}$; (3) 若 $bc > ad$, $-\frac{c}{a} < -\frac{d}{b}$, 则 $ab > 0$.

12 由于 $\sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$, $n - \sqrt{n^2-1} = \frac{1}{n + \sqrt{n^2-1}}$, 所以 $\sqrt{n^2+1} - n < \frac{1}{2n} < n - \sqrt{n^2-1}$.

第4节 一元二次不等式

例题精析

例 1 $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$

例 2 $(-1, 1]$

例 3 原不等式即: $(ax-1)(x-a) < 0$.

当 $a = 0$ 时, 不等式可化为 $-x < 0$, 所以不等式解为 $x > 0$.

当 $a > 0$ 时, 不等式同解变形为 $(x - \frac{1}{a})(x - a) < 0$.

若 $a = 1$, 不等式即为 $(x-1)^2 < 0$, 无解;

若 $a > 1$, 则 $0 < \frac{1}{a} < 1$, 不等式解为 $\frac{1}{a} < x < a$;

若 $0 < a < 1$, 则 $\frac{1}{a} > 1$, 不等式解为 $a < x < \frac{1}{a}$.

当 $a < 0$ 时,不等式同解变形为 $(x - \frac{1}{a})(x - a) > 0$.

若 $-1 < a < 0$,则 $\frac{1}{a} < -1 < a$,不等式解为 $x > a$ 或 $x < \frac{1}{a}$;

若 $a = -1$,不等式即为 $(x+1)^2 > 0$,不等式解为 $x \neq -1$;

若 $a < -1$,则 $a < -1 < \frac{1}{a} < 0$,不等式解为 $x > \frac{1}{a}$ 或 $x < a$.

例4 不等式 $cx^2 + bx + a > 0$ 等价于 $2ax^2 - 3ax + a > 0$ ($a < 0$),即 $2x^2 - 3x + 1 < 0$,所以不等式 $cx^2 + bx + a > 0$ 的解集是 $(\frac{1}{2}, 1)$.

备用题1 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. 提示: $2x^2 + x + 1 > 0$ 的解集为实数集.

备用题2 $k < \frac{7}{4}$. 提示: $k = 2$ 代入不符合题意,所以 $\begin{cases} 2-k > 0, \\ 1-4(2-k) < 0. \end{cases}$

课后练习

1 $(-\infty, \sqrt{5}) \cup [\sqrt{5}, +\infty)$ **2** $(-\infty, \frac{3}{2}] \cup [2, +\infty)$

3 -5 . 提示: $x^2 + ax + b = 0$ 的两根为 $-1, 3$,所以 $a = -2, b = -3$.

4 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$. 提示: 由根与系数关系,得到 $a = 5, b = -6$.

5 $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$. 提示: $(4a)^2 - 4 \times 1 \times (-4a + 3) \geq 0$.

6 $k \leq \frac{7}{4}$. 提示: 本题与备用题2是同一类型的不同表达方式,请注意答案的细微差别.

7 $a \leq -2$ 或 $a \geq 4$. 提示: $A = (-2, 4)$,方程的两根 $x_1 = a, x_2 = 2a$ 在该区间之外.

8 $-2 \leq a \leq 5$. 提示: $B = (-2, 5)$,当 $a = 1$ 时,集合 $A = \emptyset$,符合 $A \subseteq B$;当 $a > 1$ 时,集合 $A = (1, a)$, $a \leq 5$ 时, $A \subseteq B$;当 $a < 1$ 时,集合 $A = (a, 1)$, $a \geq -2$ 时, $A \subseteq B$.

9 设 $f(x) = x^2 + mx + m^2 + 6m$,要使 $(1, 2) \subseteq M$,只要 $\begin{cases} f(1) \leq 0, \\ f(2) \leq 0 \end{cases}$ 即可,故实数 m 的取值范围是 $[-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}, -4+2\sqrt{3}]$.

10 $x > \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ 或 $x < -\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

11 $2 \leq x < 8$. 提示: 把 $[x]$ 看成未知数解得 $\frac{3}{2} \leq [x] \leq \frac{15}{2}$.

第5节 其他不等式

例题精析

例1 解法1: 移项通分去分母.

$\frac{2-x^2-x}{x} \leq 0$,等价于不等式组 $\begin{cases} x(-x^2-x+2) \leq 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$ 解得原不等式的解集是 $[-2, 0) \cup [1, +\infty)$.

解法2: 直接讨论分母的正负号、去分母,转化为不等式组:

$\begin{cases} x > 0, \\ 2 \leq x(x+1) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 0, \\ 2 \geq x(x+1). \end{cases}$ 解得原不等式的解集是 $[-2, 0) \cup [1, +\infty)$.

例2 $(-\infty, \frac{7}{5})$

例3 因为 $\frac{ax-b}{3-2x} \geq 1$,所以 $\frac{ax-b}{3-2x} - 1 \geq 0$,所以原不等式同解于 $\frac{(a+2)x-(b+3)}{3-2x} \geq 0$,即原不等式

同解于 $\begin{cases} [(a+2)x - (b+3)] \cdot (2x-3) \leq 0, \\ 3-2x \neq 0. \end{cases}$

当 $a = -2$ 且 $b < -3$ 时, 不等式为 $\begin{cases} 2x-3 \leq 0, \\ 3-2x \neq 0. \end{cases}$ 所以 $x < \frac{3}{2}$.

当 $a = -2$ 且 $b > -3$ 时, 不等式为 $\begin{cases} 2x-3 \geq 0, \\ 3-2x \neq 0. \end{cases}$ 所以 $x > \frac{3}{2}$.

当 $a = -2$ 且 $b = -3$ 时, $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq \frac{3}{2}$.

当 $a > -2$ 时, 原不等式同解于 $\begin{cases} (x - \frac{b+3}{a+2}) \cdot (x - \frac{3}{2}) \leq 0, \\ x \neq \frac{3}{2}. \end{cases}$

若 $\frac{b+3}{a+2} > \frac{3}{2}$, 则 $\frac{3}{2} < x \leq \frac{b+3}{a+2}$;

若 $\frac{b+3}{a+2} = \frac{3}{2}$, 则无解;

若 $\frac{b+3}{a+2} < \frac{3}{2}$, 则 $\frac{b+3}{a+2} \leq x < \frac{3}{2}$.

当 $a < -2$ 时, 原不等式同解于 $\begin{cases} (x - \frac{b+3}{a+2}) \cdot (x - \frac{3}{2}) \geq 0, \\ x \neq \frac{3}{2}. \end{cases}$

若 $\frac{b+3}{a+2} > \frac{3}{2}$, 则 $x \geq \frac{b+3}{a+2}$ 或 $x < \frac{3}{2}$;

若 $\frac{b+3}{a+2} = \frac{3}{2}$, 则 $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq \frac{3}{2}$;

若 $\frac{b+3}{a+2} < \frac{3}{2}$, 则 $x > \frac{3}{2}$ 或 $x \leq \frac{b+3}{a+2}$.

例 4 原高次不等式等价转化为 $\begin{cases} (x+1)(x-4)(x+2) < 0, \\ x-2 \neq 0, \end{cases}$ 解该不等式组得 $x < -2$ 或 $-1 < x < 2$ 或 $2 < x < 4$

备用题 1 $A = \{x \mid 5-x \geq \sqrt{2(x-1)}\} = \left\{x \mid \begin{cases} (5-x)^2 \geq 2(x-1) \\ 2(x-1) \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases}\right\} = \left\{x \mid \begin{cases} (x-3)(x-9) \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x-5 \leq 0 \end{cases}\right\}$
 $= \left\{x \mid \begin{cases} x \geq 9 \text{ 或 } x \leq 3 \\ x \geq 1 \\ x \leq 5 \end{cases}\right\} = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$. $B = \{x \mid x^2 - ax \leq x - a\} = \{x \mid (x-1)(x-a) \leq 0\}$, 当

$a < 1$ 时, $B = \{x \mid a \leq x \leq 1\}$; 当 $a \geq 1$ 时, $B = \{x \mid 1 \leq x \leq a\}$.

因为 $A \cup B = A$, 故有 $B \subseteq A$, 所以 $1 \leq a \leq 3$.

备用题 2 $x < -6$ 或 $x > \frac{4}{3}$. 提示: 由于不等式两边都是非负量, 因而两边平方即可.

课后练习

1 $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ **2** $(-1, 4]$ **3** $x > 4$ 或 $x \leq \frac{5}{2}$

4 (1) $[\frac{3}{2}, 2) \cup (2, \frac{5}{2}]$; (2) $-1 < x < 0$ **5** $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

6 $[1, 3]$ **7** $(b, \frac{ab-c}{a})$ **8** $[-2, -1) \cup (1, 2]$ **9** $(-\infty, -7) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$